2014年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010001

參展科別　數學

作品名稱　孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣

得獎獎項　大會獎：四等獎

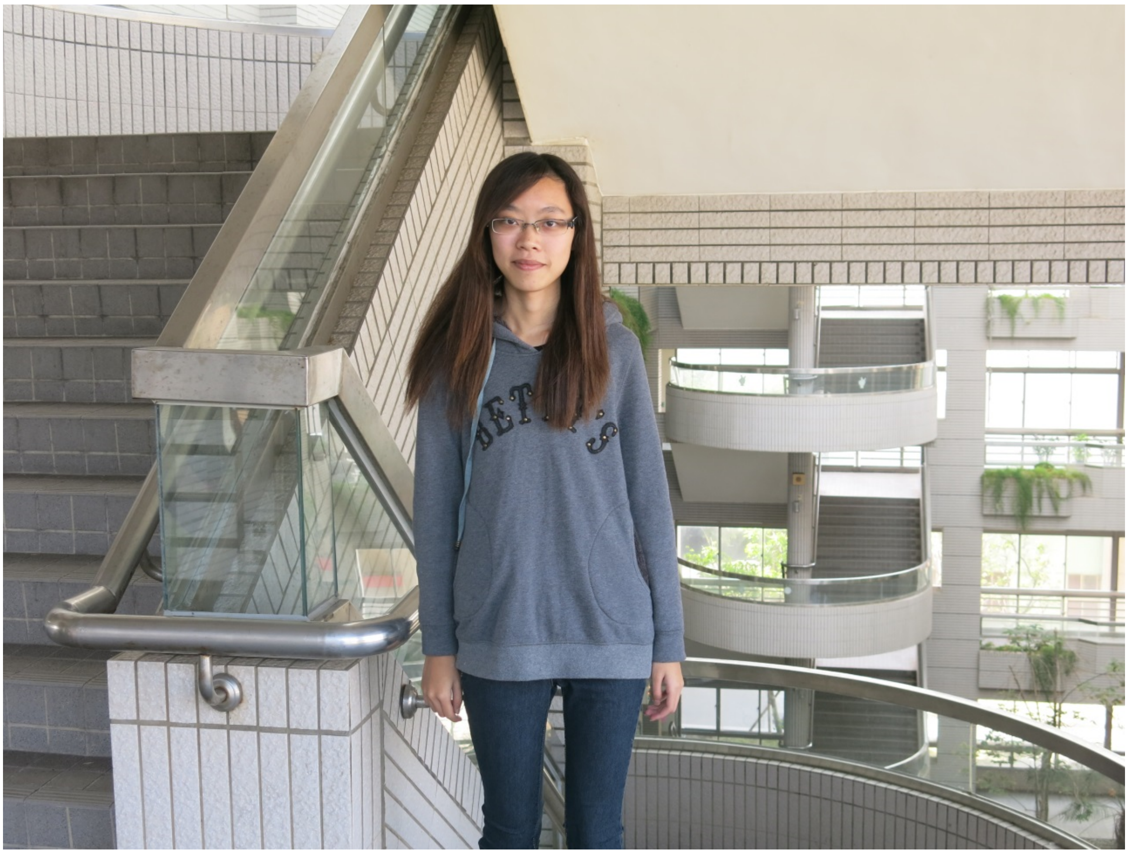
就讀學校　國立鹿港高級中學

指導教師　鄭仕豐

作者姓名　許喬婷

關鍵字　孟氏定理、西瓦定理、n點共線

作者簡介



我是許喬婷，目前就讀於鹿港高中三年級。平時我喜歡聽音樂或打桌球來宣洩情緒，在所有的科目當中，數學對我總有一種莫名的吸引力，每每投入其中便會忽略了時間的流逝。從國中開始就不斷參加各種關於數學的競賽，卻很少獲得佳績。直到高中，在因緣際會下參加了數學科展競賽，希望這次可以藉著這個機會吸取更多不同的新知識，充實自己的生活經驗。

摘要

本文主要在探討幾何中的兩個重要結果—三角形中的『孟氏定理』與『西瓦定理』推廣到平面上任意的『凸n邊形』與『凹n邊形』的相對應結果，甚至於我可以將『凸凹n邊形』換成『n條直線』，我發現亦可以得到類似的結果。

在完成平面上的圖形推廣之後，我也試著思考其在立體空間中是否也有類似的推論，很幸運地也發現有類似平面多邊形的結果，目前已完成空間中任意『n個頂點多面體』的『孟氏共面定理』；此外，我也證明了空間中任意四面體的『西瓦共點定理』，同時以實例驗證空間中的『西瓦共點定理』在四角錐中的形式，進而找到『n個頂點多面體』的『西瓦共點定理』之形式，並已驗證其正確性。

Abstract

The main purpose of the article is to investigate two important results in geometry, namely, Menelaus' theorem and Ceva's theorem. As we know the forms of Menelaus' theorem and Ceva's theorem in triangle, Menelaus' theorem states that "Given a triangle ABC, and a transversal line that crosses the straight lines BC, AC, and AB at points D, E, and F respectively, with D distinct from B and C, E distinct from A and C, F distinct from A and B, then $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$ " and Ceva's theorem states that "Given a triangle ABC, let the lines AP, BP, and CP be drawn from the vertices to a common point P to meet opposite sides at D, E ,and F respectively , then $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$".

In this article, I have extended Menelaus' theorem and Ceva's theorem to arbitrary convex and concave n-gons in the plane and obtain some similar results by using the sine law, math induction, area ratio substitution, etc. Morever, I find some similar results by replacing convex and concave n-gons by n straight lines.

After finishing the inference for convex and concave n-gons in the plane, I try to think about whether it is possible to have similar results in three dimensional space or not. Luckily, I have also observed some results similar to that in the plane. For the moment, I have found the general forms of Menelaus' theorem and Ceva's theorem for the polyhedron with n vertices which are called "**Menelaus' co-plane theorem**" and "**Ceva's concurrent theorem**" respectively.

壹、研究動機

在一次課餘的機會裡，因為課程上剛好談到平面向量，所以老師特別介紹了三角形中的『孟氏定理』與『西瓦定理』，當下的我，覺得其結果有一點神奇，但證明並不困難，經過幾天的沈浸消化之後，我開始去思考有沒有機會將這樣的結果推論到更多邊形的情形，於是我向老師表達我的想法，老師建議我可以嘗試看看。於是我從邊數較少的情形著手出發，四邊形、五邊形到n邊形，逐步完成，雖然過程有一點辛苦，但是每當完成一個小小的『猜測』，就覺得很有成就感。完成平面上的推論後，我亦試著將其推廣到『立體空間』。

在分區科展後，我又陸續的完成空間中『n個頂點多面體』的『孟氏共面定理』之形式及證明，並且完成四面體中的『西瓦共點定理』之證明及四角錐中的『西瓦共點定理』之形式推論與舉例驗證。

而在全國科展後，我又順利的找到空間中『n個頂點多面體』的『西瓦共點定理』之形式，並且給予嚴謹的證明，如此一來，我們便得更完整的掌握『孟氏定理』與『西瓦定理』在平面上多邊形與空間中多面體的一般形式。

此外，在全國科展後，我亦給出『定理一』與『定理二』的第二種證法，詳見(柒、討論與應用(3)與(4))中的論證。另外，我給出了**『平面上西瓦定理的極端情形』**(詳見引理五)及**『平面上孟氏定理的極端情形』**(詳見柒、討論與應用(6))。再者，針對『問題五』與『定理四』，我用軟體實驗，而給出了『猜測一』(詳見柒、討論與應用（7）)。

貳、研究目的

一、孟氏定理在凸四邊形上的推論。

二、孟氏定理在凹四邊形上的推論。

三、孟氏定理在凸五邊形上的推論。

四、孟氏定理在凸n邊形上的推論。

五、將孟氏定理在凸n邊形上的推論轉變在n條直線上的推論。

六、西瓦定理在凸四邊形上的推論。

七、西瓦定理在凹四邊形上的推論。

八、西瓦定理在凸五邊形上的推論。

九、西瓦定理在凸(或凹)n邊形上的推論。

十、將西瓦定理的『共點』換成『共切圓』。

十一、將西瓦定理的共『點』換成『正多邊形』。

十二、空間中四面體的孟氏共面定理。

十三、空間中四角錐的孟氏共面定理。

十四、空間中五角錐的孟氏共面定理。

十五、空間中六角錐的孟氏共面定理。

十六、空間中n個頂點多面體的孟氏共面定理。

十七、空間中四面體的西瓦共點定理。

十八、空間中四角錐的西瓦共點定理。

十九、空間中n個頂點多面體的西瓦共點定理。

參、研究設備及器材

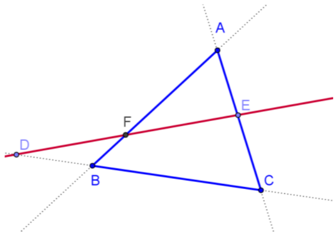
頭腦、紙、筆、電腦、電腦軟體（Microsoft Word, GSP4.0,Geogebra4.2,Maple 12,Cabri 3D）

肆、研究過程與方法

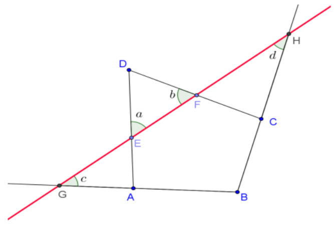
『孟氏定理』是眾所周知幾何上一個重要的結果，其結果如下。

引理一：(孟氏定理)

假設平面上有一三角形 ABC，又 D、E 與 F 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，滿足 D、E 與 F 三點共線，且 D、E 與 F 三點不與三角形 ABC 三頂點重合，如下圖(一)，則 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。



圖(一)



圖(二)

在一次課餘的機會，老師介紹了『孟氏定理』與『西瓦定理』，當時我在想說有沒有可能將其結果推廣到凸四邊形的情形，於是做了如下的嘗試，我們發現這樣的想法是可行的，下述結果為孟氏定理在凸四邊形的情形。

問題一：

假設平面上有一凸四邊形 $ABCD$，又 E、F、G 與 H 分別為 $\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{DC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，滿足 E、F、G 與 H 四點共線，且 E、F、G 與 H 四點不得與四邊形 $ABCD$ 之四頂點重合，如上頁圖(二)，則 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$。

證明：如上頁圖(二)所示，

(i) 在 ΔDEF 中，由正弦定理知， $\dfrac{\overline{DE}}{\sin b}=\dfrac{\overline{DF}}{\sin a}\Rightarrow\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\dfrac{\sin b}{\sin a}$ $\cdots\cdots①$

(ii) 在 ΔAEG 中，由正弦定理知， $\dfrac{\overline{AG}}{\sin a}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin c}\Rightarrow\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sin a}{\sin c}$ $\cdots\cdots②$

(iii)　在 ΔCHF 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{CF}}{\sin d}=\dfrac{\overline{CH}}{\sin b}\Rightarrow\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\dfrac{\sin d}{\sin b}$ ……③

(iv)　在 ΔHBG 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{BH}}{\sin c}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin d}\Rightarrow\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\dfrac{\sin c}{\sin d}$ ……④

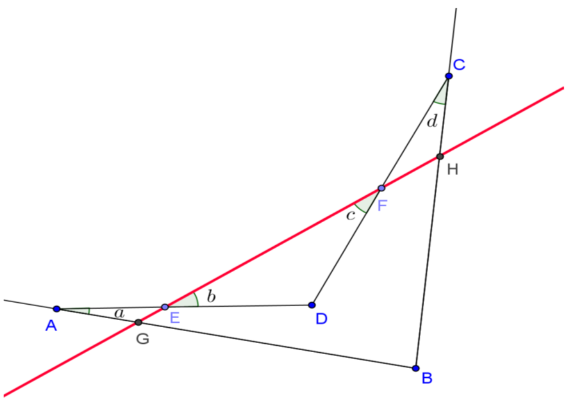
(v)　由①×②×③×④得，

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\frac{\sin b}{\sin a}\times\frac{\sin a}{\sin c}\times\frac{\sin d}{\sin b}\times\frac{\sin c}{\sin d}=1$$

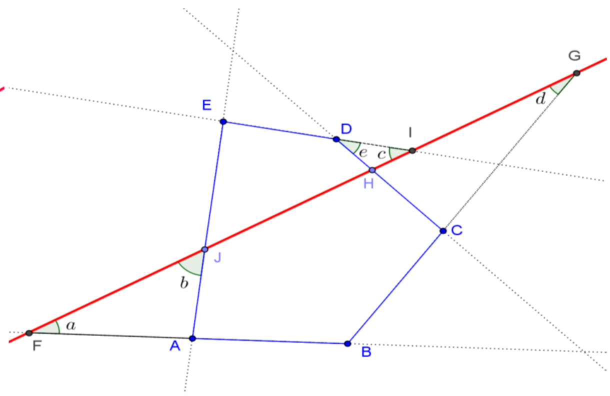
$$\Rightarrow\frac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$$

Q.E.D.

完成了『問題一』的證明之後，我們試著考慮在凹四邊形時，是不是也可以有類似的推論，結果我們發現確實是可行的，結果如下『問題二』。



圖(三)



圖(四)

問題二：

假設平面上有一凹四邊形 $ABCD$，又 E 、F 、G 與 H 分別為 $\overleftrightarrow{DA}$ 、$\overleftrightarrow{DC}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，滿足 E 、F 、G 與 H 四點共線，且 E 、F 、G 與 H 四點不得與四邊形 $ABCD$ 之四頂點重合，如上圖(三)，則 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$ 。

證明：如上圖(三)所示，

(i)　在 ΔDEF 中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{DE}}{\sin c}=\dfrac{\overline{DF}}{\sin b}\Rightarrow\dfrac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\dfrac{\sin c}{\sin b}$ ……①

(ii) 在 ΔAEG 中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{AG}}{\sin b}=\frac{\overline{AE}}{\sin(180°-(a+b))}\Rightarrow\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}=\frac{\sin b}{\sin(180°-(a+b))}=\frac{\sin b}{\sin(a+b)} \quad \cdots\cdots ②$$

(iii) 在 ΔCHF 中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{CF}}{\sin(180°-(c+d))}=\frac{\overline{CH}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\frac{\sin(180°-(c+d))}{\sin c}=\frac{\sin(c+d)}{\sin c} \quad \cdots\cdots ③$$

(iv) 在 ΔHBG 中，由正弦定理知，$\frac{\overline{BH}}{\sin(a+b)}=\frac{\overline{BG}}{\sin(c+d)}\Rightarrow\frac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)}$ $\cdots$④

(v) 由①×②×③×④得

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{BG}}=\frac{\sin c}{\sin b}\times\frac{\sin b}{\sin(a+b)}\times\frac{\sin(c+d)}{\sin c}\times\frac{\sin(a+b)}{\sin(c+d)}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$$

Q.E.D.

完成了『問題二』的證明之後，我們試著考慮在五邊形時，是不是也可以有類似的推論，結果我們發現確實是可行的，結果如下。

問題三：

假設平面上有一五邊形 $ABCDE$，又 F、G、H、I 與 J 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{EA}$ 上一點，滿足 F、G、H、I 與 J 五點共線，且 F、G、H、I 與 J 五點不得與五邊形 $ABCDE$ 之五頂點重合，如上頁圖(四)，則

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1$$。

證明：如上頁圖(四)所示，

(i) 在 ΔAFJ 中，由正弦定理知，$\frac{\overline{AF}}{\sin b}=\frac{\overline{AJ}}{\sin a}\Rightarrow\frac{\overline{AF}}{\overline{AJ}}=\frac{\sin b}{\sin a}$ $\cdots\cdots$①

(ii) 在 ΔEIJ 中，由正弦定理知，$\frac{\overline{EI}}{\sin b}=\frac{\overline{EJ}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{EJ}}{\overline{EI}}=\frac{\sin c}{\sin b}$ $\cdots\cdots$②

(iii) 在ΔDIH中，由正弦定理知，

$$\frac{\overline{DI}}{\sin(180°(c+e))}=\frac{\overline{DH}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{DI}}{\overline{DH}}=\frac{\sin(180°(c+e))}{\sin c}=\frac{\sin(c+e)}{\sin c}\quad\cdots\cdots③$$

(iv) 在ΔCGH中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{CG}}{\sin(c+e)}=\dfrac{\overline{CH}}{\sin d}\Rightarrow\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CG}}=\dfrac{\sin d}{\sin(c+e)}\quad\cdots\cdots④$

(v) 在ΔBFG中，由正弦定理知，$\dfrac{\overline{BF}}{\sin d}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin a}\Rightarrow\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BF}}=\dfrac{\sin a}{\sin d}\quad\cdots\cdots⑤$

(vi) 由①×②×③×④×⑤得

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AJ}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{EI}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{DH}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{CG}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{BF}}=\frac{\sin b}{\sin a}\times\frac{\sin c}{\sin b}\times\frac{\sin(c+e)}{\sin c}\times\frac{\sin d}{\sin(c+e)}\times\frac{\sin a}{\sin d}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1\text{。}$$

Q.E.D.

我們將上述的三個問題的結果綜合，並將其推廣到到『凸n邊形』，利用數學歸納法我們果真證明了這樣的『猜想』是正確的，於是有了下面這樣一個結果。

定理一：

假設直角坐標平面上有一個凸n邊形$A_1A_2\cdots A_n$，今依序分別在n個邊或其延長線上各取一點$P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得這n個點在同一條直線L上，且直線L不可與凸n邊形$A_1A_2\cdots A_n$之邊所在直線重合或平行，又對於每一個$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，點P_i不可等於$\overline{A_iA_{i+1}}$之兩端點。

試證明：$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。

證明：

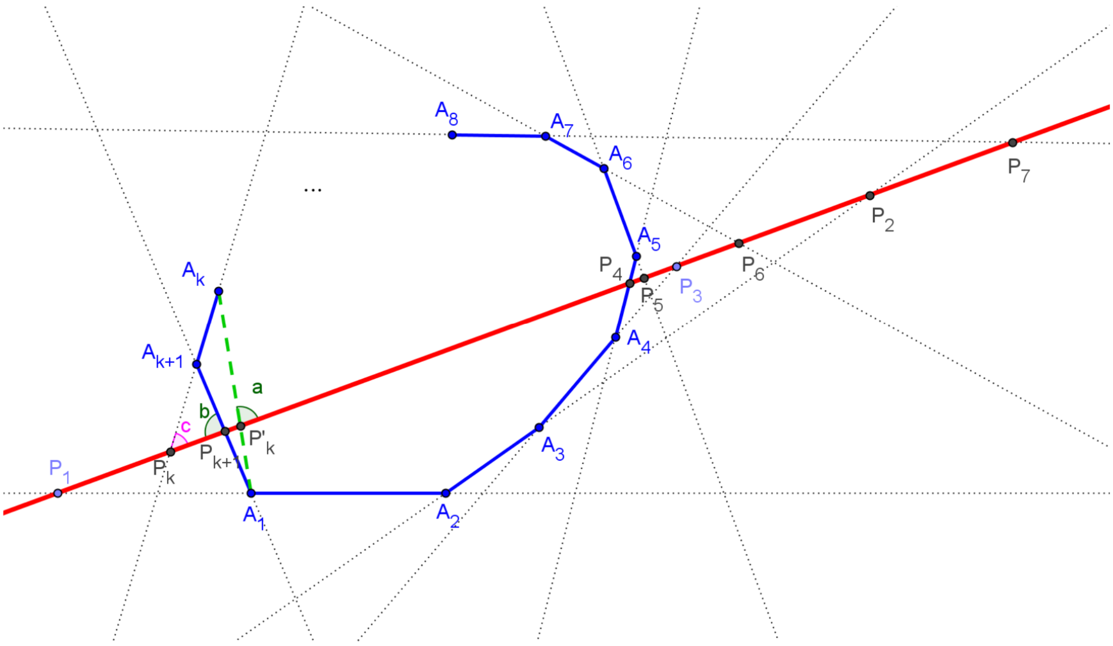
(i) 當 n＝3 時，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$

(ii) 假設 n=k 時成立，亦即

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_1}}=1$$

(iii)　當 n=k+1 時，我們分兩類情形討論如下，

情形一：若存在一線段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 使得直線 L 與該線段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 交於一點（於此，我們視 $A_{n+j}=A_j\ \ ,\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$），在不失一般性之下，我們可以假設 $i=k+1$，且此時直線 L 與線段 $\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$（即線段 $\overline{A_{k+1}A_1}$）交於點 P_{k+1}，如下圖(五)所示，則



圖(五)

先連接 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$，因為 $A_1A_2\cdots A_n$ 為凸 n 邊形且直線 L 不可與凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 之邊所在直線重合或平行，所以直線 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$ 必與直線 L 交於一點，設此交點為 P_k'，如上圖五所示，因此可得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots$$

$$\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_{k}}}\times\frac{\overline{A_{k}P'_{k}}}{\overline{P'_{k}A_{1}}})\times\frac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\overline{A_{k}P'_{k}}}\times\frac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_{1}}}$$

$$=1\times\frac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\overline{A_{k}P'_{k}}}\times\frac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_{1}}}\text{。}$$

至此，只需再證明 $\frac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\overline{A_{k}P'_{k}}}\times\frac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_{1}}}=1$ 即可，我們驗證如下：

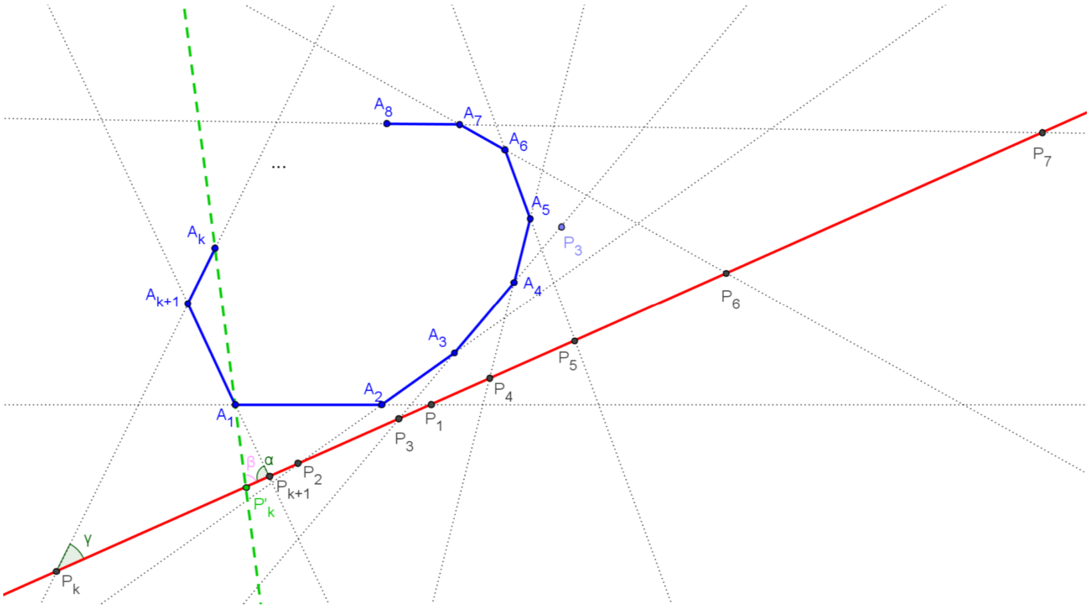
I. 在 $\Delta P'_{k}A_{1}P_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\sin b}=\frac{\overline{P_{k+1}A_{1}}}{\sin a}\Rightarrow\frac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\overline{P_{k+1}A_{1}}}=\frac{\sin b}{\sin a}\cdots\cdots$ ①

II. 在 $\Delta P'_{k}A_{k}P_{k}$ 中，$\frac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\sin(180^\circ-a)}=\frac{\overline{A_{k}P'_{k}}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\overline{A_{k}P'_{k}}}=\frac{\sin(180^\circ-a)}{\sin c}=\frac{\sin a}{\sin c}\cdots\cdots$ ②

III. 在 $\Delta P_{k}A_{k+1}P_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{P_{k}A_{k+1}}}{\sin b}=\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin c}\Rightarrow\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}=\frac{\sin c}{\sin b}\cdots\cdots$ ③

IV. 由①×②×③得 $\frac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\overline{A_{k}P'_{k}}}\times\frac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_{1}}}=\frac{\sin b}{\sin c}\times\frac{\sin a}{\sin b}\times\frac{\sin c}{\sin a}=1$

情形二： 若 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k+1\}$，線段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 與直線 L 均無交點，則因為 $A_1A_2\cdots A_n$ 為凸 n 邊形，所以必存在一直線 $\overleftrightarrow{A_mA_{m+2}}$ 不平行於 L，在不失一般性之下，可以假設 $m=k$，並設直線 L 與直線 $\overleftrightarrow{A_mA_{m+2}}$（即直線 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$）交於一點 P'_k，如下圖(六)所示，則



圖(六)

我們有

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\right)\times$$

$$\left(\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}\right)$$

$$=1\times\left(\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}\right)$$

至此，只需再證明 $\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1$ 即可，我們驗證如下：

I. 在 $\Delta P'_kA_1P_{k+1}$ 中，$\frac{\overline{P'_kA_1}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{P_{k+1}A_1}}{\sin\beta}\Rightarrow\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$……④

II. 在 $\Delta P'_kA_kP_k$ 中，$\frac{\overline{A_kP_k}}{\sin\left(180^\circ-\beta\right)}=\frac{\overline{A_kP'_k}}{\sin\gamma}\Rightarrow\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{A_kP'_k}}=\frac{\sin\left(180^\circ-\beta\right)}{\sin\gamma}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$……⑤

III.　　在 $\Delta P_{k}A_{k+1}P_{k+1}$ 中，$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin\gamma}=\dfrac{\overline{P_{k}A_{k+1}}}{\sin\alpha}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$……⑥

由④×⑤×⑥得 $\dfrac{\overline{P'_{k}A_{1}}}{\overline{A_{k}P'_{k}}}\times\dfrac{\overline{A_{k}P_{k}}}{\overline{P_{k}A_{k+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_{1}}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\times\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\times\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=1$，故此情形，原命題成立。

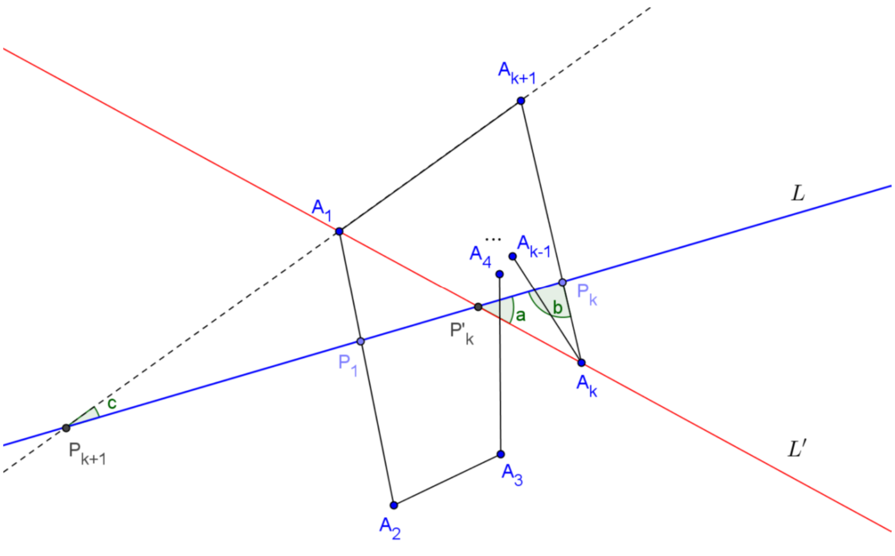
Q.E.D.

我們試著將定理一的結果中的『凸 n 邊形』以『n 條直線』取代，得整理成如下的結果。

定理二：

假設直角坐標平面上有 n 條兩兩不平行的相異直線 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，又此 n 條直線均無『三線共點的情形』，且 L_n 與 L_1 相交於 A_1，L_k 與 L_{k+1} 相交於 A_{k+1}，其中 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，今有另一直線 L，已知直線 L 分別直線 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 各交於一點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，其中對於每一個 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，點 P_i 不可等於 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 之兩端點。

試證明：$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。



圖(七)

證明：用數學歸納法證明如下，

(i) 當 n=3，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\times\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$。

(ii) 假設 $3\le n\le k$ 時，原命題成立。

(iii) 當 n=k+1 時，我們分兩類情形討論之。

情形一： 若存在一直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+2}}$ 不平行於 L（於此，我們視 $A_{n+j}=A_j,\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$），則先連接直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+2}}$，且在不失一般性之下，我們可以假設 $i=k$，亦即連接直線 $\overleftrightarrow{A_kA_{k+2}}$（即連接直線 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$），此時因為 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$ 不平行於 L，故 $\overleftrightarrow{A_kA_1}$ 必與 L 交於一點，令此交點為 P_k'，如上圖(七)所示，於是我們可以如下之推論，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP'_k}}{\overline{P'_kA_1}}\right)\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}$$

$$=1\times\frac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}\ 。$$

至此，只需再證明 $\dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{A_kP'_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1$ 即可，我們驗證如下。如上圖(七)，

I. 在 $\Delta P_kP'_kA_k$ 中，$\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\sin a}=\dfrac{\overline{A_kP'_k}}{\sin b}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{A_kP'_k}}=\dfrac{\sin a}{\sin b}\cdots\cdots①$

II. 在 $\Delta A_{k+1}P_kP_{k+1}$ 中，$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_k}}{\sin c}=\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\sin(180^\circ-b)}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_kA_{k+1}}}=\dfrac{\sin b}{\sin c}\cdots\cdots②$

III. 在 $\Delta A_1P_k'P_{k+1}$ 中，$\dfrac{\overline{A_1P'_k}}{\sin c}=\dfrac{\overline{A_1P_{k+1}}}{\sin a}\Rightarrow\dfrac{\overline{P'_kA_1}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\dfrac{\sin c}{\sin a}\cdots\cdots③$

IV. 由①×②×③得 $\dfrac{\overline{P'_{\text{k}}A_1}}{\overline{A_{\text{k}}P'_{\text{k}}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}=\dfrac{\sin c}{\sin b}\times\dfrac{\sin a}{\sin c}\times\dfrac{\sin b}{\sin a}=1$，

故此情形，原命題成立。

情形二： 若 $\forall i\in\{1,2,\cdots,k+1\}$，$\overleftrightarrow{A_iA_{i+2}}//L$，則試著連接 $\overleftrightarrow{A_{k-1}A_1}$，此時 $\overleftrightarrow{A_{k-1}A_1}$ 必不平行於 L，如下圖(八)所示，則我們有

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{\text{k}-2}P_{\text{k}-2}}}{\overline{P_{\text{k}-2}A_{\text{k}-1}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k}-1}P_{\text{k}-1}}}{\overline{P_{\text{k}-1}A_{\text{k}}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}$$

$$=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{\text{k}-2}P_{\text{k}-2}}}{\overline{P_{\text{k}-2}A_{\text{k}-1}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k}-1}P'_{\text{k}-1}}}{\overline{P'_{\text{k}-1}A_1}}\times\frac{\overline{P'_{\text{k}-1}A_1}}{\overline{A_{\text{k}-1}P'_{\text{k}-1}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k-1}}P_{\text{k-1}}}}{\overline{P_{\text{k-1}}A_{\text{k}}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}\times\frac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}$$

由上述(ii)知，$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{\text{k}-2}P_{\text{k}-2}}}{\overline{P_{\text{k}-2}A_{\text{k}-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k}-1}P'_{\text{k}-1}}}{\overline{P'_{\text{k}-1}A_1}}=1$，所以上式會等於

$1\times\dfrac{\overline{P'_{\text{k}-1}A_1}}{\overline{A_{\text{k}-1}P'_{\text{k}-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k-1}}P_{\text{k-1}}}}{\overline{P_{\text{k-1}}A_{\text{k}}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}$，故只需再證明

$\dfrac{\overline{P'_{\text{k}-1}A_1}}{\overline{A_{\text{k}-1}P'_{\text{k}-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k-1}}P_{\text{k-1}}}}{\overline{P_{\text{k-1}}A_{\text{k}}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}\times\dfrac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}=1$。

IV. 在 $\Delta P'_{\text{k-1}}A_1P_{\text{k+1}}$ 中，$\dfrac{\overline{P'_{\text{k-1}}A_1}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}{\sin\left(180^\circ-\beta\right)}\Rightarrow\dfrac{\overline{P'_{\text{k-1}}A_1}}{\overline{P_{\text{k+1}}A_1}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(180^\circ-\beta\right)}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdots$④

V. 在 $\Delta P'_{\text{k-1}}A_{\text{k-1}}P_{\text{k-1}}$ 中，$\dfrac{\overline{A_{\text{k-1}}P_{\text{k-1}}}}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{A_{\text{k-1}}P'_{\text{k-1}}}}{\sin\gamma}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_{\text{k-1}}P_{\text{k-1}}}}{\overline{A_{\text{k-1}}P'_{\text{k-1}}}}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdots\cdots$⑤

VI. 在 $\Delta P_{\text{k-1}}A_{\text{k}}P_{\text{k}}$ 中，$\dfrac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\sin\gamma}=\dfrac{\overline{P_{\text{k-1}}A_{\text{k}}}}{\sin\delta}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_{\text{k}}P_{\text{k}}}}{\overline{P_{\text{k-1}}A_{\text{k}}}}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\delta}\cdots\cdots$⑥

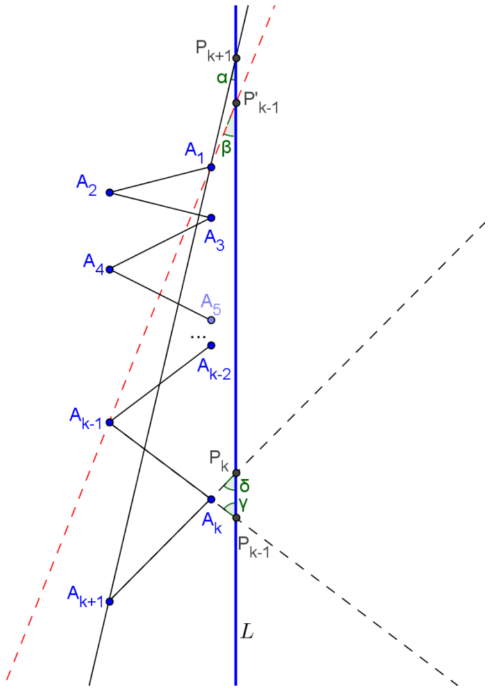
VII. 在 $\Delta P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}$ 中，

$$\frac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\sin\left(180^\circ-\delta\right)}=\frac{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{\overline{A_{\text{k+1}}P_{\text{k+1}}}}{\overline{P_{\text{k}}A_{\text{k+1}}}}=\frac{\sin\left(180^\circ-\delta\right)}{\sin\alpha}=\frac{\sin\delta}{\sin\alpha}\cdots\cdots ⑦$$

由④×⑤×⑥×⑦得

$$\frac{\overline{P'_{k-1}A_1}}{\overline{A_{k-1}P'_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\times\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\times\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}\times\frac{\sin\delta}{\sin\alpha}=1$$，

故此情形，原命題成立。

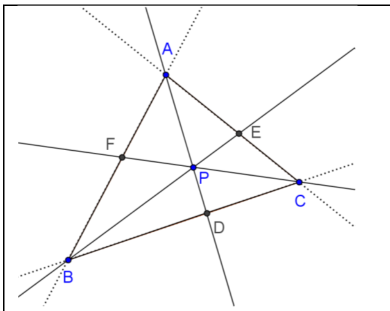


圖(八)

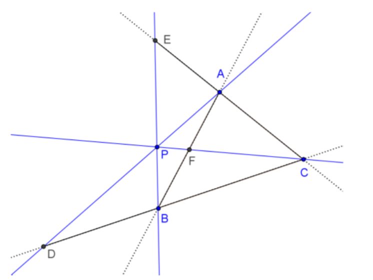
Q.E.D.

得證孟氏定理有『定理一』與『定理二』等相關的推論後，我們開始去思考西瓦定理是否也可以有類似的結果，所以首先讓我們重新檢視一下西瓦定理，再做可能的推論。

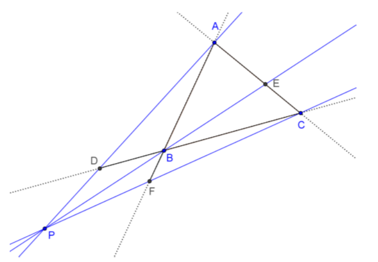
引理二：



圖(九)



圖(十)



圖(十一)

(1) 西瓦定理_形式一

已知平面上有一三角形 ABC，且 D 、E 與 F 分別為 $\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 、與 $\overline{AB}$ 上一點，滿足 $\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、與 $\overline{CF}$ 三線段共交點 P，如上圖(九)，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$ 。

證明：

(i) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\Delta ACF}{\Delta BCF}=\frac{\Delta APF}{\Delta BPF}=\frac{\Delta ACF-\Delta APF}{\Delta BCF-\Delta BPF}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\cdots\cdots ①$$

(ii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\Delta BPD}{\Delta CPD}=\frac{\Delta ABD-\Delta BPD}{\Delta ACD-\Delta CPD}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\cdots\cdots ②$$

(iii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\frac{\Delta CPE}{\Delta APE}=\frac{\Delta BCE-\Delta CPE}{\Delta BAE-\Delta APE}=\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}\cdots\cdots ③$$

(iv) 由①×②×③得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}=1$ ，得證。

Q.E.D.

我們試著將上述(1)式中的交點 P 移到三角形 ABC 的外部，如上頁圖(十)，驗證其正確性。

(2) 西瓦定理_形式二

已知平面上有一三角形 ABC，且 D 、E 與 F 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CA}$ 、與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，滿足 $\overleftrightarrow{AD}$ 、$\overleftrightarrow{BE}$ 、與 $\overleftrightarrow{CF}$ 三線段共交點 P，如上頁圖(十)，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$ 。

證明：

(i) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\Delta ACF}{\Delta BCF}=\frac{\Delta APF}{\Delta BPF}=\frac{\Delta ACF+\Delta APF}{\Delta BCF+\Delta BPF}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\cdots\cdots ①$$

(ii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\Delta BPD}{\Delta CPD}=\frac{\Delta ABD-\Delta BPD}{\Delta ACD-\Delta CPD}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\cdots\cdots ②$$

(iii)　由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\frac{\Delta CPE}{\Delta APE}=\frac{\Delta BCE-\Delta CPE}{\Delta BAE-\Delta APE}=\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}\cdots\cdots ③$$

(iv)　由①×②×③得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}=1$，得證。

Q.E.D.

我們試著再將上述(1)式中的交點 P 移到三角形 ABC 外部的另一處，如上頁圖(十一)，驗證其正確性。

(3) 西瓦定理_形式三

已知平面上有一三角形 ABC，且 D、E 與 F 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、與 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，滿足 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、與 $\overleftrightarrow{CF}$ 三線段共交點 P，如上頁圖(十一)，則

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1\text{。}$$

證明：

(i)　由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\Delta ACF}{\Delta BCF}=\frac{\Delta APF}{\Delta BPF}=\frac{\Delta ACF+\Delta APF}{\Delta BCF+\Delta BPF}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\cdots\cdots ①$$

(ii)　由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD}=\frac{\Delta BPD}{\Delta CPD}=\frac{\Delta ABD+\Delta BPD}{\Delta ACD+\Delta CPD}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\cdots\cdots ②$$

(iii)　由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta BCE}{\Delta BAE}=\frac{\Delta CPE}{\Delta APE}=\frac{\Delta CPE-\Delta BCE}{\Delta APE-\Delta BAE}=\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}\cdots\cdots ③$$

由①×②×③得 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}=1$，得證。　**Q.E.D.**

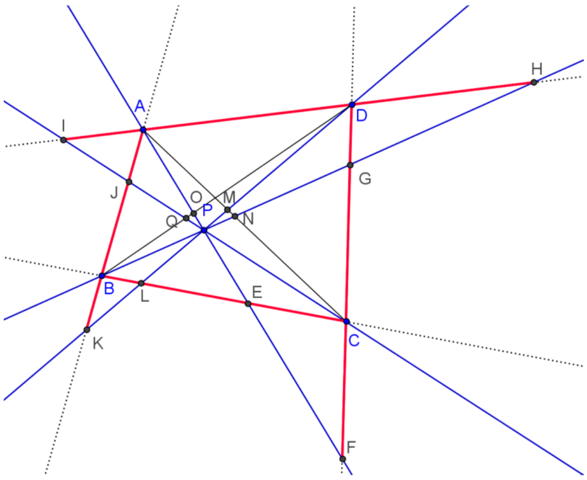
依據上述『引理一』的結果，我們發現三線共點的『點』並不一定要在三角

形的內部，因此，我們在想是否可以將西瓦定理中的『三角形』換成『四邊形』，然後推廣得相對應的結果，於是我們有了下面的結果。

問題五：

假設平面上有一凸四邊形 $ABCD$，又 P 點為平面上一定點，P 點不落在四邊形 $ABCD$ 四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{BD}$ 上，且 $\overleftrightarrow{CP}$ 、$\overleftrightarrow{DP}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別交於 J 與 K，$\overleftrightarrow{DP}$ 、$\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 分別交於 L 與 E，$\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 分別交於 F 與 G，$\overleftrightarrow{BP}$ 、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 分別交於 H 與 I，則

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}\times\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IA}}=1 。$$



圖(十二)

證明：如上圖(十二)所示，

(i) 在 ΔABC 中，$\because \overleftrightarrow{AE}$ 、$\overleftrightarrow{BN}$ 、$\overleftrightarrow{CJ}$ 三線共點 $\therefore \dfrac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}\times\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=1\cdots\cdots$①

(ii) 在 ΔACD 中，$\because \overleftrightarrow{AF}$ 、$\overleftrightarrow{CI}$ 、$\overleftrightarrow{DM}$ 三線共點 $\therefore \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MC}}\times\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\times\dfrac{\overline{DI}}{\overline{IA}}=1\cdots\cdots$②

(iii) 在 ΔBCD 中，$\because \overleftrightarrow{BG}$ 、$\overleftrightarrow{CQ}$ 、$\overleftrightarrow{DL}$ 三線共點 $\therefore \dfrac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DQ}}{\overline{QB}}=1\cdots\cdots$③

(iv) 在 ΔABD 中，$\because \overleftrightarrow{AO}$ 、$\overleftrightarrow{BH}$ 、$\overleftrightarrow{DK}$ 三線共點 $\therefore \dfrac{\overline{AK}}{\overline{KB}}\times\dfrac{\overline{BO}}{\overline{OD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1\cdots\cdots$④

(v) 由①×②×③×④得

$$(\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}\times\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IA}})\times(\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}\times\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}}\times\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}})=1$$

所以只需要證明 $\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}\times\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}}\times\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}=1$ 就可得知

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}\times\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}}\times\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IA}}=1$$

I. 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}=\frac{\Delta BCN}{\Delta ABN}=\frac{\Delta CPN}{\Delta APN}=\frac{\Delta BCN-\Delta CPN}{\Delta ABN-\Delta APN}=\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}\cdots ①$$

II. 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}=\frac{\Delta APM}{\Delta CPM}=\frac{\Delta ADM}{\Delta CDM}=\frac{\Delta APM+\Delta ADM}{\Delta CPM+\Delta CDM}=\frac{\Delta ADP}{\Delta CDP}\cdots\cdots ②$$

III. 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}}=\frac{\Delta CDQ}{\Delta BCQ}=\frac{\Delta DQP}{\Delta BQP}=\frac{\Delta CQD-\Delta DQP}{\Delta BCQ-\Delta BQP}=\frac{\Delta CDP}{\Delta BCP}\cdots\cdots ③$$

IV. 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}=\frac{\Delta BPO}{\Delta DPO}=\frac{\Delta ABO}{\Delta ADO}=\frac{\Delta BPO+\Delta ABO}{\Delta DPO+\Delta ADO}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ADP}\cdots ④$$

V. 由①×②×③×④得 $\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}\times\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}}\times\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}=\frac{\Delta BCP}{\Delta ABP}\times\frac{\Delta ADP}{\Delta CDP}\times\frac{\Delta CDP}{\Delta BCP}\times\frac{\Delta ABP}{\Delta ADP}=1$

Q.E.D.

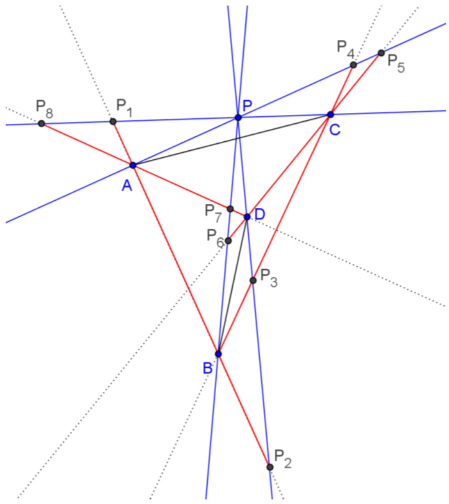
有了上述的結果，我們知道西瓦定理在凸四邊形可以有如上的推廣結果，我們試著考慮西瓦定理在凹四邊形是不是也有類似的推廣，於是我們獲得如下的結論。

問題六：

假設平面上有一凹四邊形 $ABCD$，又 P 點為平面上一定點，P 點不落在四邊形

$ABCD$四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{BD}$上，且$\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$與$\overleftrightarrow{AB}$分別交於P_1與P_2，$\overleftrightarrow{DP}$、$\overleftrightarrow{AP}$與$\overleftrightarrow{BC}$分別交於P_3與P_4，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$與$\overleftrightarrow{CD}$分別交於P_5與P_6，$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$與$\overleftrightarrow{DA}$分別交於P_7與P_8，則

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}\times\frac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}\times\frac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}\times\frac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}=1$$ 。



圖(十三)

證明：如上圖(十三)所示，

(i) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}=\frac{\Delta APP_1}{\Delta BPP_1}=\frac{\Delta ACP_1}{\Delta BCP_1}=\frac{\Delta ACP_1-\Delta APP_1}{\Delta BCP_1-\Delta BPP_1}=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\cdots\cdots①$$

(ii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}=\frac{\Delta APP_2}{\Delta BPP_2}=\frac{\Delta ADP_2}{\Delta BDP_2}=\frac{\Delta APP_2-\Delta ADP_2}{\Delta BPP_2-\Delta BDP_2}=\frac{\Delta ADP}{\Delta BDP}\cdots\cdots②$$

(iii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}=\frac{\Delta BPP_3}{\Delta CPP_3}=\frac{\Delta BDP_3}{\Delta CDP_3}=\frac{\Delta BPP_3-\Delta BDP_3}{\Delta CPP_3-\Delta CDP_3}=\frac{\Delta BDP}{\Delta CDP}\cdots\cdots③$$

(iv) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}=\frac{\Delta BPP_4}{\Delta CPP_4}=\frac{\Delta BAP_4}{\Delta CAP_4}=\frac{\Delta BAP_4-\Delta BPP_4}{\Delta CAP_4-\Delta CPP_4}=\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\cdots\cdots④$$

(v) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}=\frac{\Delta CPP_5}{\Delta DPP_5}=\frac{\Delta CAP_5}{\Delta DAP_5}=\frac{\Delta CAP_5-\Delta CPP_5}{\Delta DAP_5-\Delta DPP_5}=\frac{\Delta ACP}{\Delta ADP}\cdots\cdots ⑤$$

(vi) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}=\frac{\Delta CPP_6}{\Delta DPP_6}=\frac{\Delta CBP_6}{\Delta DBP_6}=\frac{\Delta CPP_6+\Delta CBP_6}{\Delta DPP_6+\Delta DBP_6}=\frac{\Delta BCP}{\Delta BDP}\cdots\cdots ⑥$$

(vii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}=\frac{\Delta DPP_7}{\Delta APP_7}=\frac{\Delta DBP_7}{\Delta ABP_7}=\frac{\Delta DPP_7+\Delta DBP_7}{\Delta APP_7+\Delta ABP_7}=\frac{\Delta BDP}{\Delta ABP}\cdots\cdots ⑦$$

(viii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}=\frac{\Delta DPP_8}{\Delta APP_8}=\frac{\Delta DCP_8}{\Delta ACP_8}=\frac{\Delta DCP_8-\Delta DPP_8}{\Delta ACP_8-\Delta APP_8}=\frac{\Delta CDP}{\Delta ACP}\cdots\cdots ⑧$$

(ix) 由①×②×③×④×⑤×⑥×⑦×⑧得

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}\times\frac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}\times\frac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}\times\frac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}$$

$$=\frac{\Delta ACP}{\Delta BCP}\times\frac{\Delta ADP}{\Delta BDP}\times\frac{\Delta BDP}{\Delta CDP}\times\frac{\Delta ABP}{\Delta ACP}\times\frac{\Delta ACP}{\Delta ADP}\times\frac{\Delta BCP}{\Delta BDP}\times\frac{\Delta BDP}{\Delta ABP}\times\frac{\Delta CDP}{\Delta ACP}=1$$ 。

Q.E.D.

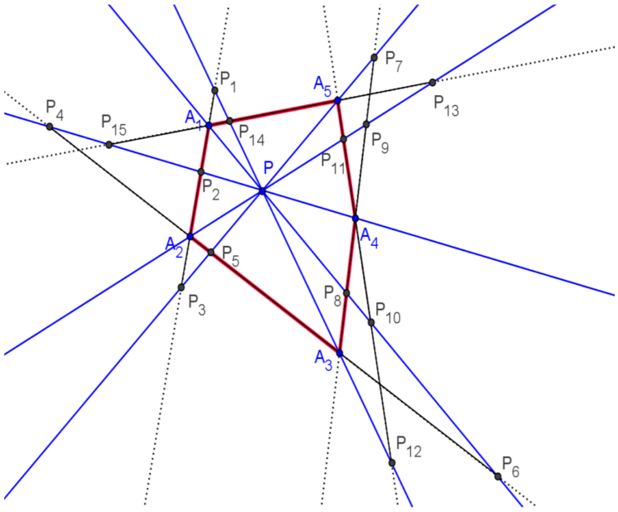
有了『問題六』的結果後，那麼將西瓦定理中的『三角形』換成『五邊形』，也應順理成章是正確的，以下是我們嘗試後獲得的結果。

問題七：

假設平面上有一凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，又 P 點為平面上一定點，P 點不落在五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 五邊所在的直線上，亦不落在其對角線上，且 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 分別交於 P_1 、P_2 與 P_3，$\overleftrightarrow{A_4P}$ 、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 、$\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 分別交於 P_4 、P_5 與 P_6，$\overleftrightarrow{A_5P}$ 、$\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 分別交於 P_7 、P_8 與 P_9，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 分別交於 P_{10} 、P_{11} 與 P_{12}，$\overleftrightarrow{A_2P}$ 、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 分別交於 P_{13} 、P_{14} 與 P_{15}，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}\times$$

$$\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=1$$ 。



圖(十四)

證明：如上圖(十四)所示，

(i) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\frac{\Delta A_1PP_1}{\Delta A_2PP_1}=\frac{\Delta A_1A_3P_1}{\Delta A_2A_3P_1}=\frac{\Delta A_1A_3P_1-\Delta A_1PP_1}{\Delta A_2A_3P_1-\Delta A_2PP_1}=\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_2A_3P}\cdots\cdots①$$

(ii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}=\frac{\Delta A_1PP_2}{\Delta A_2PP_2}=\frac{\Delta A_1A_4P_2}{\Delta A_1A_4P_2}=\frac{\Delta A_1A_4P_2-\Delta A_1PP_2}{\Delta A_1A_4P_2-\Delta A_2PP_2}=\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_2A_4P}\cdots\cdots②$$

(iii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}=\frac{\Delta A_1PP_3}{\Delta A_2PP_3}=\frac{\Delta A_1A_5P_3}{\Delta A_2A_5P_3}=\frac{\Delta A_1A_5P_3-\Delta A_1PP_3}{\Delta A_2A_5P_3-\Delta A_2PP_3}=\frac{\Delta A_1A_5P}{\Delta A_2A_5P}\cdots\cdots③$$

(iv) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}=\frac{\Delta A_2PP_4}{\Delta A_3PP_4}=\frac{\Delta A_2A_4P_4}{\Delta A_3A_4P_4}=\frac{\Delta A_2A_4P_4-\Delta A_2PP_4}{\Delta A_3A_4P_4-\Delta A_3PP_4}=\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_3A_4P}\cdots\cdots④$$

(v) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}} = \frac{\Delta A_2PP_5}{\Delta A_3PP_5} = \frac{\Delta A_2A_5P_5}{\Delta A_3A_5P_5} = \frac{A_2A_5P_5 - \Delta A_2PP_5}{\Delta A_3A_5P_5 - \Delta A_3PP_5} = \frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_3A_5P} \cdots\cdots ⑤$$

(vi) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}} = \frac{\Delta A_2PP_6}{\Delta A_3PP_6} = \frac{\Delta A_2A_1P_6}{\Delta A_3A_1P_6} = \frac{\Delta A_2A_1P_6 - \Delta A_2PP_6}{\Delta A_3A_1P_6 - \Delta A_3PP_6} = \frac{\Delta A_1A_2P}{\Delta A_1A_3P} \cdots\cdots ⑥$$

(vii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}} = \frac{\Delta A_3PP_7}{\Delta A_4PP_7} = \frac{\Delta A_3A_5P_7}{\Delta A_4A_5P_7} = \frac{\Delta A_3A_5P_7 - \Delta A_3PP_7}{\Delta A_4A_5P_7 - \Delta A_4PP_7} = \frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_4A_5P} \cdots\cdots ⑦$$

(viii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}} = \frac{\Delta A_3PP_8}{\Delta A_4PP_8} = \frac{\Delta A_3A_1P_8}{\Delta A_4A_1P_8} = \frac{\Delta A_3A_1P_8 - \Delta A_3PP_8}{\Delta A_4A_1P_8 - \Delta A_4PP_8} = \frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_1A_4P} \cdots\cdots ⑧$$

(ix) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}} = \frac{\Delta A_3PP_9}{\Delta A_4PP_9} = \frac{\Delta A_3A_2P_9}{\Delta A_4A_2P_9} = \frac{\Delta A_3A_2P_9 - \Delta A_3PP_9}{\Delta A_4A_2P_9 - \Delta A_4PP_9} = \frac{\Delta A_2A_3P}{\Delta A_2A_4P} \cdots\cdots ⑨$$

(x) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}} = \frac{\Delta A_4PP_{10}}{\Delta A_5PP_{10}} = \frac{\Delta A_4A_1P_{10}}{\Delta A_5A_1P_{10}} = \frac{\Delta A_4A_1P_{10} - \Delta A_4PP_{10}}{\Delta A_5A_1P_{10} - \Delta A_5PP_{10}} = \frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_1A_5P} \cdots\cdots ⑩$$

(xi) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}} = \frac{\Delta A_4PP_{11}}{\Delta A_5PP_{11}} = \frac{\Delta A_4A_2P_{11}}{\Delta A_5A_2P_{11}} = \frac{\Delta A_4A_2P_{11} - \Delta A_4PP_{11}}{\Delta A_5A_2P_{11} - \Delta A_5PP_{11}} = \frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_2A_5P} \cdots\cdots ⑪$$

(xii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}} = \frac{\Delta A_4PP_{12}}{\Delta A_5PP_{12}} = \frac{\Delta A_4A_3P_{12}}{\Delta A_5A_3P_{12}} = \frac{\Delta A_4PP_{12} - \Delta A_4A_3P_{12}}{\Delta A_5PP_{12} - \Delta A_5A_3P_{12}} = \frac{\Delta A_3A_4P}{\Delta A_3A_5P} \cdots\cdots ⑫$$

(xiii) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}} = \frac{\Delta A_5PP_{13}}{\Delta A_1PP_{13}} = \frac{\Delta A_5A_2P_{13}}{\Delta A_1A_2P_{13}} = \frac{\Delta A_5A_2P_{13} - \Delta A_5PP_{13}}{\Delta A_1A_2P_{13} - \Delta A_1PP_{13}} = \frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_1A_2P} \cdots\cdots ⑬$$

(xiv) 由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}=\frac{\Delta A_5PP_{14}}{\Delta A_1PP_{14}}=\frac{\Delta A_5A_3P_{14}}{\Delta A_1A_3P_{14}}=\frac{\Delta A_5A_3P_{14}-\Delta A_5PP_{14}}{\Delta A_1A_3P_{14}-\Delta A_1PP_{14}}=\frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_1A_3P}\cdots\cdots ⑭$$

(xv)　由三角形面積公式得知，

$$\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=\frac{\Delta A_5PP_{15}}{\Delta A_1PP_{15}}=\frac{\Delta A_5A_4P_{15}}{\Delta A_1A_4P_{15}}=\frac{\Delta A_5A_4P_{15}-\Delta A_5PP_{15}}{\Delta A_1A_4P_{15}-\Delta A_1PP_{15}}=\frac{\Delta A_4A_5P}{\Delta A_1A_4P}\cdots\cdots ⑮$$

由①×②×③×④×⑤×⑥×⑦×⑧×⑨×⑩×⑪×⑫×⑬×⑭×⑮得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}\times$$

$$\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_2A_3P}\times\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_2A_4P}\times\frac{\Delta A_1A_5P}{\Delta A_2A_5P}\times\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_3A_4P}\times\frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_3A_5P}\times\frac{\Delta A_1A_2P}{\Delta A_1A_3P}\times\frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_4A_5P}\times\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_1A_4P}\times\frac{\Delta A_2A_3P}{\Delta A_2A_4P}\times$$
$$\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_1A_5P}\times\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_2A_5P}\times\frac{\Delta A_3A_4P}{\Delta A_3A_5P}\times\frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_1A_2P}\times\frac{\Delta A_3A_5P}{\Delta A_1A_3P}\times\frac{\Delta A_4A_5P}{\Delta A_1A_4P}=1 \text{。}$$

Q.E.D.

說明 1：

事實上，我們亦可以利用『問題六』與『問題七』所用之證明方法來證明『問題五』之結果。

由於『三點共線』的『孟氏定理』與『三線共點』的『西瓦定理』互為『對偶命題』，意思是說將『點』換成『線』，且將『線』換成『點』，我們就可以由其中之一變成另一個，很幸運的是這組『對偶命題』均成立。

針對『孟氏定理』，從問題一、二、三、四至定理一與二的結果，我們發現其結果可以類推到『n邊形』與『n條直線』的情形，於是我們開始去思考，其對偶命題『西瓦定理』是否也可以做類似或他種向度的推廣呢？我們試著將邊數增加，先得到『問題五』、『問題六』與『問題七』的結果，接下來我們嘗試將其推廣到『n邊形』，而有了如下的『定理三』。

定理三：

假設平面上有一凸(或凹)n邊形$A_1A_2\cdots A_n$，又P點為平面上一定點，P點不落在該n邊形$A_1A_2\cdots A_n$ n邊所在的直線上，亦不落在其對角線上，且$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$分別與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$P_1$、$P_2$、…、$P_{n-2}$，$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$分別與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交於$P_{(n-2)+1}$、$P_{(n-2)+2}$、…、$P_{2(n-2)}$，・・・，$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$、$\overleftrightarrow{A_{n-1}P}$分別與$\overleftrightarrow{A_nA_1}$交於$P_{(n-1)(n-2)+1}$、$P_{(n-1)(n-2)+2}$、…、$P_{n(n-2)}$，則

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1\text{，}$$

其中對於$0\le k\le n-1$，$1\le j\le n-2$，滿足$P_{k(n-2)+j}\in\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$，亦即直線$\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$上有$(n-2)$個點$P_{k(n-2)+1},P_{k(n-2)+2},P_{k(n-2)+3},\cdots P_{k(n-2)+(n-2)}$。

證明：

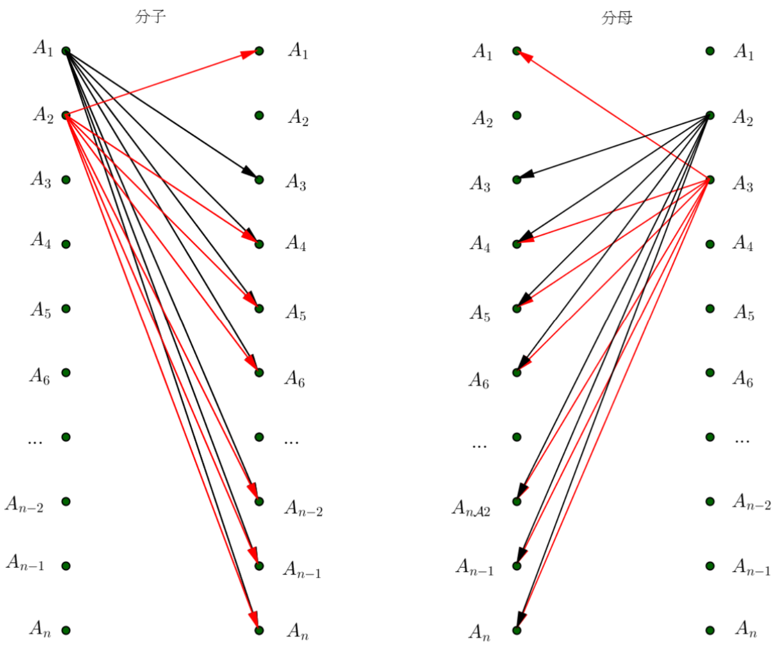
(i) 在以下的論證過程中，我們視$A_{n+j}=A_j$，$\forall j\in\{1,2,\cdots,n-2\}$。

(ii) 從上述問題七中，我們觀察發現得如下之結果：

$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\frac{\Delta A_1A_3P}{\Delta A_2A_3P}$ ……(1)，	$\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}=\frac{\Delta A_2A_4P}{\Delta A_3A_4P}$ ……$((n-2)+1)$，
$\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}=\frac{\Delta A_1A_4P}{\Delta A_2A_4P}$ ……(2)，	$\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}=\frac{\Delta A_2A_5P}{\Delta A_3A_5P}$ ……$((n-2)+2)$，
…，	…，
$\frac{\overline{A_1P_j}}{\overline{P_jA_2}}=\frac{\Delta A_1A_{2+j}P}{\Delta A_2A_{2+j}P}$ ……(j)，	$\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+j}}}{\overline{P_{(n-2)+j}A_3}}=\frac{\Delta A_2A_{3+j}P}{\Delta A_3A_{3+j}P}$ ……$((n-2)+j)$，
…，	…，
$\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}=\frac{\Delta A_1A_nP}{\Delta A_2A_nP}$ ……$(n-2)$；	$\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}=\frac{\Delta A_2A_{n+1}P}{\Delta A_3A_{n+1}P}$ ……$(2(n-2))$；

$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+1}}}{\overline{P_{k(n-2)+1}A_{k+2}}}=\dfrac{\Delta A_{k+1}A_{k+3}P}{\Delta A_{k+2}A_{k+3}P}\cdots(k(n-2)+1)$，	$\dfrac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}=\dfrac{\Delta A_nA_2P}{\Delta A_1A_2P}\cdots((n-1)(n-2)+1)$，
$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+2}}}{\overline{P_{k(n-2)+2}A_{k+2}}}=\dfrac{\Delta A_{k+1}A_{k+4}P}{\Delta A_{k+2}A_{k+4}P}\cdots(k(n-2)+2)$，	$\dfrac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}=\dfrac{\Delta A_nA_3P}{\Delta A_1A_3P}\cdots((n-1)(n-2)+2)$，
…，	…，
$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+j}}}{\overline{P_{k(n-2)+j}A_{k+2}}}=\dfrac{\Delta A_{k+1}A_{(k+2)+j}P}{\Delta A_{k+2}A_{(k+2)+j}P}\cdots(k(n-2)+j)$，	$\dfrac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+j}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+j}A_1}}=\dfrac{\Delta A_nA_{j+1}P}{\Delta A_1A_{j+1}P}\cdots((n-1)(n-2)+j)$，
…，	…，
$\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k(n-2)+(n-2)}}}{\overline{P_{k(n-2)+(n-2)}A_{k+2}}}=\dfrac{\Delta A_{k+1}A_{(k+2)+(n-2)}P}{\Delta A_{k+2}A_{(k+2)+(n-2)}P}\cdots(k(n-2)+(n-2))$；	$\dfrac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+(n-2)}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+(n-2)}A_1}}=\dfrac{\Delta A_nA_{n-1}P}{\Delta A_1A_{n-1}P}\cdots((n-1)(n-2)+(n-2))$；

觀察上述$n(n-2)$個式子，我們發現各個比值的分子與分母的三角形具有如下規則，



(表一)

將上述$n(n-2)$個式子全部相乘，我們將證明

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$

理由如下：

我們希望證明在線段比值換成如上兩頁的三角形面積比值後，$n(n-2)$ 個式子的分子與分母剛好可以兩兩相消。在上列表一中，首先觀察分子，分子左側頂點的 A_2 會對到 $A_4, A_5, A_6, \cdots, A_n, A_1$，再觀察分母，分母右側頂點的 A_2 會對到 $A_3, A_4, A_5, \cdots, A_{n-1}$, A_n，相消之後，分子還剩下 A_2A_1，分母還剩下 A_2A_3，其中分子剩下的 A_2A_1 可再與分母的 A_1A_2 相消，分母剩下的 A_2A_3 可再與分子的 A_3A_2 相消，仿此規律，我們發現分子與分母剛好可以兩兩相消，所以上式乘積為 1，故得證。

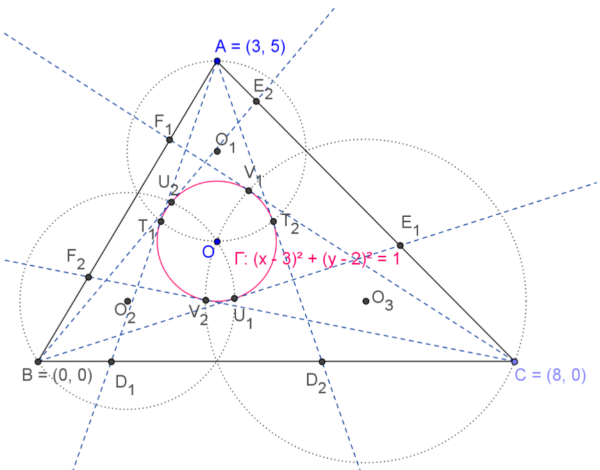
Q.E.D.

在證明上述『定理三』的同時，我們也嘗試西瓦定理另一向度的推測，我們先舉一個例子來測試一下，如下例 1 所示。

例 1.

已知平面上一三角形 ABC，其中 $A(3,5), B(0,0), C(8,0)$，且一圓 $\Gamma: (x-3)^2+(y-2)^2=1$ 位於 ΔABC 內部，其圓心為 O，今過 A 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{AT_1}, \overleftrightarrow{AT_2}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1, D_2，過 B 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{BU_1}, \overleftrightarrow{BU_2}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1, E_2，過 C 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{CV_1}, \overleftrightarrow{CV_2}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1, F_2，試求

$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}} \times \dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}} \times \dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}} \times \dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}} \times \dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}} \times \dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}$ 之值。



圖(十五)

解：如上圖(十五)所示，

Step1.先求$\overline{BD_1}^2$ 、$\overline{BD_2}^2$ 、$\overline{D_1C}^2$ 與 $\overline{D_2C}^2$ 。

設$\overleftrightarrow{AD_1}: y-5=m(x-3) \;\Rightarrow\; \overleftrightarrow{AD_1}: mx-y-3m+5=0$ ，

因為$\overleftrightarrow{AD_1}$ 與圓Γ相切，所以$d\left(O,\overleftrightarrow{AD_1}\right)=1 \Rightarrow \dfrac{|m\times 3-2-3m+5|}{\sqrt{m^2+\left(-1\right)^2}}=1 \Rightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$ 。

(1) 先求D_1點座標。

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{AD_1}: y-5=2\sqrt{2}(x-3) \Rightarrow \overleftrightarrow{AD_1}: 2\sqrt{2}x-y-6\sqrt{2}+5=0 \\ \overleftrightarrow{BC}: y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{AD_1} \text{ 與 } \overleftrightarrow{BC} \text{ 的交點座標為 } D_1\left(\frac{6\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}},0\right) \Rightarrow \begin{cases}\overline{BD_1}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}}-0)^2+(0-0)^2=\dfrac{97-60\sqrt{2}}{8} \\ \overline{D_1C}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}}-8)^2+(0-0)^2=\dfrac{225+100\sqrt{2}}{8}\end{cases} 。$$

(2) 次求D_2點座標。

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{AD_2}: y-5=(-2\sqrt{2})\left(x-3\right) \Rightarrow \overleftrightarrow{AD_2}: 2\sqrt{2}x+y-6\sqrt{2}-5=0 \\ \overleftrightarrow{BC}: y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{AD_2} \text{ 與 } \overleftrightarrow{BC} \text{ 的交點座標為 } D_2\left(\frac{6\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}},0\right) \Rightarrow \begin{cases}\overline{BD_2}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}}-0)^2+(0-0)^2=\dfrac{97+60\sqrt{2}}{8} \\ \overline{D_2C}^2=(\dfrac{6\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}}-8)^2+(0-0)^2=\dfrac{225-100\sqrt{2}}{8}\end{cases} 。$$

Step2.同上述 Step1 之方式，我們可以求得

$$\begin{cases}\overline{CE_1}^2=\dfrac{1536-768\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}} \\ \overline{E_1A}^2=\dfrac{296+132\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\end{cases} ; \begin{cases}\overline{CE_2}^2=\dfrac{1536+768\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}} \\ \overline{E_2A}^2=\dfrac{296-132\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\end{cases} ; \begin{cases}\overline{AF_1}^2=\dfrac{47600-11900\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}} \\ \overline{F_1B}^2=\dfrac{69632+21760\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\end{cases} ;$$

$$\begin{cases}\overline{AF_2}^2=\dfrac{47600+11900\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}} \\ \overline{F_2B}^2=\dfrac{69632-21760\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\end{cases} 。$$

Step3.所以$\left(\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right)^2$

$$=\frac{\left(\dfrac{47600-11900\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\right)}{\left(\dfrac{69632+21760\sqrt{7}}{5688+450\sqrt{7}}\right)}\times\frac{\dfrac{97-60\sqrt{2}}{8}}{\dfrac{225+100\sqrt{2}}{8}}\times\frac{\left(\dfrac{1536-768\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\right)}{\left(\dfrac{296+132\sqrt{3}}{52-14\sqrt{3}}\right)}\times\frac{\left(\dfrac{47600+11900\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\right)}{\left(\dfrac{69632-21760\sqrt{7}}{5688-450\sqrt{7}}\right)}\times\frac{\left(\dfrac{97+60\sqrt{2}}{8}\right)}{\left(\dfrac{225-100\sqrt{2}}{8}\right)}\times\frac{\left(\dfrac{1536+768\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\right)}{\left(\dfrac{296-132\sqrt{3}}{52+14\sqrt{3}}\right)}$$

$$=\frac{\left(11900\left(4-\sqrt{7}\right)\right)}{\left(4352\left(16+5\sqrt{7}\right)\right)}\times\frac{\left(97-60\sqrt{2}\right)}{\left(25\left(9+4\sqrt{2}\right)\right)}\times\frac{\left(768\left(2-\sqrt{3}\right)\right)}{\left(4\left(74+33\sqrt{3}\right)\right)}\times\frac{\left(11900\left(4+\sqrt{7}\right)\right)}{\left(4352\left(16-5\sqrt{7}\right)\right)}\times\frac{\left(97+60\sqrt{2}\right)}{\left(25\left(9-4\sqrt{2}\right)\right)}\times\frac{\left(768\left(2+\sqrt{3}\right)\right)}{\left(4\left(74-33\sqrt{3}\right)\right)}$$

$$=\frac{11900\times11900\times768\times768\times9\times2209\times1}{4352\times4352\times25\times25\times4\times4\times81\times49\times2209}=1\text{，}$$

故得$\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$。

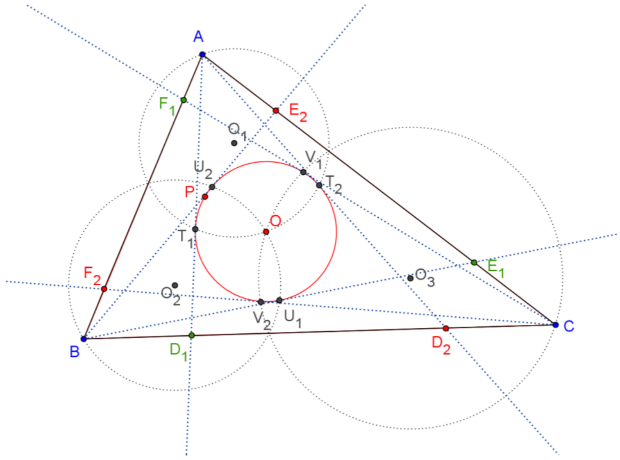
Q.E.D

有了上述『例 1』之結果後，我們將之一般化，並證明得如下『定理四』之結果。

定理四：

給定一三角形ΔABC，且一圓Γ位於ΔABC內部，過A點作圓Γ的兩切線$\overleftrightarrow{AT_1},\overleftrightarrow{AT_2}$分別交$\overleftrightarrow{BC}$於$D_1,D_2$，過$B$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{BU_1},\overleftrightarrow{BU_2}$分別交$\overleftrightarrow{CA}$於$E_1,E_2$，過$C$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{CV_1},\overleftrightarrow{CV_2}$分別交$\overleftrightarrow{AB}$於$F_1,F_2$，則

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1\text{。}$$



圖(十六)

證明：如上圖(十六)所示，

(i)在不失一般性之下，我們可以假設ΔABC三頂點座標為$A(s,t),B(0,0),C(c,0)$，且圓Γ方程式為$\Gamma:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，其中圓心為$O(h,k)$，半徑為$r$，則先考慮切線不是鉛直線的情形，利用點斜式求直線方程式，及圓心到切線距離等於半徑之性質，再利用距離公式計算得

$$(1)\qquad \overline{BD_1}^2=\left(\frac{s(h-s)(k-t)+s\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}-t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)+\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(2)\qquad \overline{D_1C}^2=\left(\frac{(c-s)(h-s)(k-t)+(c-s)\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}+t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)+\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(3)\qquad \overline{BD_2}^2=\left(\frac{s(h-s)(k-t)-s\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}-t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)-\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(4)\qquad \overline{D_2C}^2=\left(\frac{(c-s)(h-s)(k-t)-(c-s)\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}+t\left((h-s)^2-r^2\right)}{(h-s)(k-t)-\sqrt{(h-s)^2r^2+(k-t)^2r^2-r^4}}\right)^2$$

$$(5)\qquad \overline{CE_1}^2=\frac{\left(c^2(c-s)^2+c^2t^2\right)\left(hk+\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+(c-s)hk+(c-s)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(6)\qquad \overline{E_1A}^2=\frac{\left(\left(c-s\right)^2+t^2\right)\left(\left(h^2-r^2\right)t-shk-s\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+\left(c-s\right)hk+\left(c-s\right)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(7)\qquad \overline{CE_2}^2=\frac{\left(c^2\left(c-s\right)^2+c^2t^2\right)\left(hk-\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+\left(c-s\right)hk-\left(c-s\right)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(8)\qquad \overline{E_2A}^2=\frac{\left(\left(c-s\right)^2+t^2\right)\left(\left(h^2-r^2\right)t-shk+s\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t+\left(c-s\right)hk-\left(c-s\right)\sqrt{h^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}$$

$$(9)\qquad \overline{AF_1}^2=\frac{\left(s^2+t^2\right)\left(\left(h-c\right)sk+s\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t-c\left(h-c\right)k-c\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h-c\right)sk+s\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

$$(10)\qquad \overline{F_1B}^2=\frac{\left(c^2s^2+c^2t^2\right)\left(\left(h-c\right)k+\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h-c\right)sk+s\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

$$(11)\qquad \overline{AF_2}^2=\frac{\left(s^2+t^2\right)\left(\left(h-c\right)sk-s\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t-c\left(h-c\right)k+c\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h-c\right)sk-s\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

$$(12)\qquad \overline{F_2B}^2=\frac{\left(c^2s^2+c^2t^2\right)\left(\left(h-c\right)k-\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}\right)^2}{\left(\left(h-c\right)sk-s\sqrt{\left(h-c\right)^2r^2+r^2k^2-r^4}-\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t\right)^2}$$

所以$\left(\dfrac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\dfrac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\dfrac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\dfrac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\dfrac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\dfrac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right)^2$

$$\xrightarrow{\text{經化簡得}}=\left(\frac{\left(\left(s-c\right)^2\left(k^2-r^2\right)-2\left(s-c\right)\left(h-c\right)kt+\left(\left(h-c\right)^2-r^2\right)t^2\right)^2}{\left(\left(h^2-r^2\right)t^2-2tshk+s^2\left(k^2-r^2\right)\right)^2}\right)\times$$

$$\left(\frac{\left(\left(s\left(h-s\right)\left(k-t\right)-t\left(\left(h-s\right)^2-r^2\right)\right)^2-s^2\left(\left(h-s\right)^2r^2+\left(k-t\right)^2r^2-r^4\right)\right)^2}{\left(\left(\left(c-s\right)\left(h-s\right)\left(k-t\right)+t\left(\left(h-s\right)^2-r^2\right)\right)^2-\left(c-s\right)^2\left(\left(h-s\right)^2r^2+\left(k-t\right)^2r^2-r^4\right)\right)^2}\right)\cdots(Eq1)$$

(ii)為了方便，我們將上述(i)中最後一個式子以 Eq1 表示之，展開得$\sqrt{Eq1}$的分子等於

$$
\begin{aligned}
&\left(s^2 k^2 - s^2 r^2 - 2 s c k^2 + 2 s c r^2 + c^2 k^2 - c^2 r^2 - 2 k t s h\right.\\
&\quad + 2 k t s c + 2 k t c h - 2 k t c^2 + t^2 h^2 - 2 t^2 c h + t^2 c^2\\
&\quad \left.- t^2 r^2\right) \left(s^4 k^2 + t^2 h^4 + t^2 r^4 + 4 s^2 h^2 k t - 2 s h^3 k t\right.\\
&\quad - 2 s^3 h t k + 2 s h t^2 r^2 + 2 s h k t r^2 + s^2 h^2 t^2 - 2 t^2 h^2 r^2\\
&\quad - 2 s h^3 t^2 + s^2 h^2 k^2 - 2 s^3 h k^2 - s^2 r^2 h^2 + 2 s^3 r^2 h - s^4 r^2\\
&\quad \left.- s^2 r^2 k^2 - s^2 t^2 r^2 + s^2 r^4\right)
\end{aligned}
$$

再乘開得

$$
\begin{aligned}
&{}^2 t - 4 s^5 k^3 h t + 2 t^2 c^2 s^3 r^2 h + 6 s^2 k^2 t^2 h^4\\
&- 2 s^4 r^2 h^2 t^2 - 2 s^4 k^2 t^2 r^2 + 4 s^5 k^2 r^2 h - 2 s^4 k^2 r^2 h^2\\
&+ 2 s^2 k^2 t^2 r^4 + 2 s c r^6 t^2 - 4 s^3 c k^2 r^4 + 2 s^3 c k^4 r^2\\
&+ 4 s^5 c k^2 r^2 + 4 s^4 c k^4 h - 2 s^3 c k^4 h^2 - 2 s^2 r^2 t^2 h^4\\
&- 4 s^3 r^4 h t^2 + 4 s^2 r^4 t^2 h^2 + 4 s^3 r^2 h^3 t^2 + 4 s^4 c r^4 h\\
&- 2 s^3 c r^4 h^2 + 3 t^4 h^2 r^4 + 4 s^3 k^2 h t^2 r^2 - 2 c^2 k^4 s^3 h\\
&+ c^2 k^4 s^2 h^2 - 2 s^3 c r^4 t^2 - 8 s^4 r^2 h^2 k t - c^2 k^4 s^2 r^2\\
&- 2 c^2 k^2 s^4 r^2 + c^2 k^2 t^2 r^4 + t^4 r^4 s^2 + c^2 k^2 t^2 h^4\\
&- 8 s^2 k^2 t^2 h^2 r^2 + 4 s^3 k^3 h t r^2 - c^2 r^2 t^2 h^4 + 2 c^2 r^4 t^2 h^2\\
&+ 2 c^2 k^2 s^2 r^4 - 4 s^3 r^4 h k t + 6 s^3 c k^2 h^2 t^2 + 4 s^3 r^2 h^3 k t\\
&+ 4 s^5 r^2 h t k + 6 s^2 c k^3 h^3 t + 2 s^4 c k^3 h t + 8 s c k^2 t^2 h^2 r^2\\
&+ 6 s^2 c k^2 h^3 t^2 - 10 s^3 c k^3 h^2 t - 4 t^4 c h^2 s r^2\\
&- 6 s^2 c k^3 h t r^2 - 6 s c k^2 t^2 h^4 - 2 s c k^2 t^2 r^4 - 2 c^2 r^4 s^3 h\\
&+ c^2 r^4 s^2 h^2 + 2 s^2 c k^2 h t^2 r^2 + 8 k t^3 s^2 h^4 - 4 k t^3 s^3 h^3\\
&+ 4 s^3 c k^2 r^2 h^2 - 8 s^4 c k^2 r^2 h + 2 c^2 r^4 s^2 t^2 - 2 k t^3 c^2 r^4\\
&- 2 k t^3 c^2 h^4 - 2 k^3 t c^2 s^4 + 2 k t^3 c h^5 + 2 k^3 t s^5 c\\
&- 4 k t^3 s h^5 + 2 s^3 c k^2 t^2 r^2 - 2 s^3 c r^2 h^2 t^2 - 2 s^2 c r^2 h^3 t^2\\
&- 4 s c r^4 t^2 h^2 + 4 t^4 h^3 s r^2 + 4 t^4 c h^4 s - 2 t^4 c h^3 s^2\\
&- 2 t^4 h^2 s^2 r^2 - 2 c^2 k^2 s h t^2 r^2 - 2 c^2 k^3 s h^3 t + 2 c^2 k^3 s^3 h\\
&- 2 c^2 k^2 t^2 h^2 r^2 + 2 c^2 k^3 s^2 h^2 t + t^2 c^2 s^4 k^2 - 2 t^4 c^2 h^2 r^2\\
&- 6 c^2 k^2 s^2 h^2 t^2 + 2 c^2 k^2 s h^3 t^2 + 6 s^2 c r^4 h k t\\
&+ 2 s^2 c r^4 h t^2 + 2 s c r^2 t^2 h^4 - 2 t^4 c^2 s h^3 + t^4 c^2 s^2 h^2\\
&- 2 t^4 c h r^4 - 2 s^4 c r^2 h t k - 6 s^2 c r^2 h^3 k t\\
&+ 10 s^3 c r^2 h^2 k t + 4 t^4 c h^3 r^2 + 2 c^2 k^3 s h t r^2\\
&+ 2 t^2 c h s^4 r^2 - 2 c^2 r^2 s^3 h t k + 2 c^2 r^2 s h^3 k t\\
&- 2 c^2 r^2 s^2 h^2 k t + 2 c^2 r^2 s h^3 t^2 - 2 c^2 r^4 s h t^2\\
&- 2 c^2 k^2 s^2 t^2 r^2 - 2 c^2 r^2 s^2 h^2 t^2 - 2 c^2 k^2 s^2 r^2 h^2\\
&+ 4 c^2 k^2 s^3 r^2 h - 4 k t^3 s h r^4 + 8 k t^3 s h^3 r^2 - 8 k t^3 s^2 h^2 r^2\\
&- 2 c^2 r^4 s h k t - 10 k t^3 s^2 c h^3 + 6 k t^3 s^3 c h^2 + 2 t^4 c h s^2 r^2\\
&+ 4 k t^3 s^3 h r^2 - 4 k t^3 s c h^2 r^2 + 2 k t^3 s^2 c h r^2\\
&- 6 k^2 t^2 s^4 c h + 2 k t^3 s c h^4 + 2 k t^3 s c r^4 - 2 k t s^5 c r^2\\
&- 2 k^3 t s^3 c r^2 - 2 k t^3 s^3 c r^2 + 2 k t s^3 c r^4 - 4 k t^3 c h^3 r^2\\
&+ t^4 h^6 + 2 k t^3 c h r^4 + 2 k t^3 c^2 s^2 h^2 - t^4 r^6 - 2 t^4 r^4 s h\\
&+ 2 k^2 t^2 c^2 s^3 h + 2 k t c^2 s^4 r^2 + 2 k t^3 c^2 s h^3 + 4 k t^3 c^2 h^2 r\\
&- s^4 r^6 - 2 t^3 c^2 s^3 h k - 2 k t^3 c^2 s h r^2 + 2 t^4 c^2 s h r^2\\
&- t^4 c^2 s^2 r^2 + s^6 r^4 - t^2 c^2 s^4 r^2 + 2 k^3 t c^2 s^2 r^2\\
&+ 2 k t^3 c^2 s^2 r^2 - 2 k t c^2 s^2 r^4
\end{aligned}
$$

再用 Maple 12 將之因式分解得

$$
\begin{aligned}
&(-r + h - s)\,(r + h - s)\,\left(t^2 h^2 - t^2 r^2 - 2 k t s h + s^2 k^2\right.\\
&\quad \left.- s^2 r^2\right)\left(s^2 k^2 - s^2 r^2 - 2 s c k^2 + 2 s c r^2 + c^2 k^2 - c^2 r^2\right.\\
&\quad - 2 k t s h + 2 k t s c + 2 k t c h - 2 k t c^2 + t^2 h^2 - 2 t^2 c h\\
&\quad \left.+ t^2 c^2 - t^2 r^2\right)
\end{aligned}
$$

(iii) 以同樣的方式我們發現 $\sqrt{Eq1}$ 的分母乘開後因式分解後亦等於

$$
\begin{aligned}
&(-r + h - s)\,(r + h - s)\,\left(t^2 h^2 - t^2 r^2 - 2 k t s h + s^2 k^2\right.\\
&\quad \left.- s^2 r^2\right)\left(s^2 k^2 - s^2 r^2 - 2 s c k^2 + 2 s c r^2 + c^2 k^2 - c^2 r^2\right.\\
&\quad - 2 k t s h + 2 k t s c + 2 k t c h - 2 k t c^2 + t^2 h^2 - 2 t^2 c h\\
&\quad \left.+ t^2 c^2 - t^2 r^2\right)
\end{aligned}
$$

由此得

$$\left(\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\right)^2=1\text{ ,}$$

故得證

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1\text{ 。}$$

(iv)至於切線是鉛垂直線的其他情形，則類似於如上(i)、(ii)與(iii)的證明過程，故得證原命題。

Q.E.D.

Remark 1:

(1) 上述的式子 Eq1，果如我們的期待等於 1，因為將分子與分母分別用數學運算軟體 **Maple 12** 展開後，發現分子與分母的展開式全然相同，所以很自然地將分子分母直接相消獲得定值 1。

(2) 在定理四的論證過程中，我們發現三角形內部的圓 Γ 似乎並不一定

要在三角形內部，圓Γ似乎只要在三角形的外接圓內即可，論證的過程不受影響。我們也用了數學軟體 Geogebra 做了一些實驗來支持我們的論證。

(3) 定座標做運算本來就不是一開始的想法，在這一個問題裡，定座標後整個計算過程變得非常複雜，費了許多力氣後，結果雖如預期，因此我們還是希望未來可以找到用『純幾何』的方法來思考解決該問題，因為這樣會簡潔有力一點。

(4) 之所以最後考慮用坐標幾何的方式來解決該問題，主要是因為在例 1 中的計算過程中，我們發現$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}$這個式子分子與分母的各項大部分的情形並不能獨立相消，所以將其單純的轉換成面積比再作相消似乎不再可行了，故方如此為之。

上述定理四的結果已完整的給出證明，所以我們試著再將三角形 ABC 內部的『圓』換成一個『三角形』與一個『四邊形』測試看看，於是有了如下的結果。

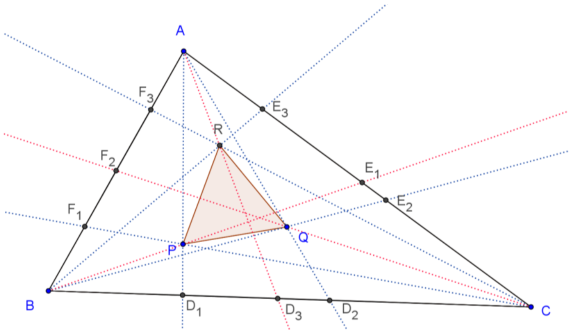
問題八：

(1) 給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個三角形 PQR，並自 A 點出發作出三射線 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D_2,D_3，自 B 點出發作出三射線 $\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E_2,E_3，自 C 點出發作出三射線 $\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F_2,F_3，如下圖(十七)所示，試證：

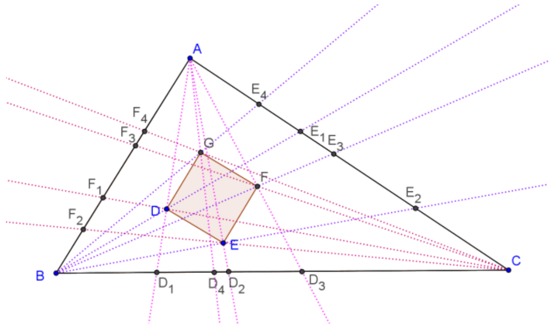
$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}=1$$ 。

(2) 給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個四邊形 $DEFG$，並自 A 點出發作出四射線 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D_2,D_3,D_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E_2,E_3,E_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F_2,F_3,F_4，如下圖(十八)所示，試證：

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}\times\frac{\overline{AF_4}}{\overline{F_4B}}\times\frac{\overline{BD_4}}{\overline{D_4C}}\times\frac{\overline{CE_4}}{\overline{E_4A}}=1$$ 。



圖(十七)



圖(十八)

證明：(1)

(i) 因為 $\overleftrightarrow{AD_1}$ 、$\overleftrightarrow{BE_1}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_1}$ 三線共點，所以由引理二得知，$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}=1$ 。

(ii) 因為 $\overleftrightarrow{AD_2}$、$\overleftrightarrow{BE_2}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_2}$ 三線共點，所以由引理二得知，$\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$ 。

(iii) 因為 $\overleftrightarrow{AD_3}$、$\overleftrightarrow{BE_3}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_3}$ 三線共點，所以由引理二得知，$\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}=1$ 。

(iv) 將上述三式相乘即得

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}=1$$ 。

(2) 對於每一個 $i\in\{1,2,3,4\}$，因為 $\overleftrightarrow{AD_i}$ 、$\overleftrightarrow{BE_i}$ 與 $\overleftrightarrow{CF_i}$ 三線共點，所以由引理二得知，

$\frac{\overline{AF_i}}{\overline{F_iB}}\times\frac{\overline{BD_i}}{\overline{D_iC}}\times\frac{\overline{CE_i}}{\overline{E_iA}}=1$ ，相乘即得

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}\times\frac{\overline{AF_4}}{\overline{F_4B}}\times\frac{\overline{BD_4}}{\overline{D_4C}}\times\frac{\overline{CE_4}}{\overline{E_4A}}=1$$ 。

Q.E.D.

伍、空間中的『孟氏共面定理』與『西瓦共點定理』

完成『孟氏定理』與『西瓦定理』在平面上多邊形中的推論之後，我試著將觸角延伸到立體空間中。

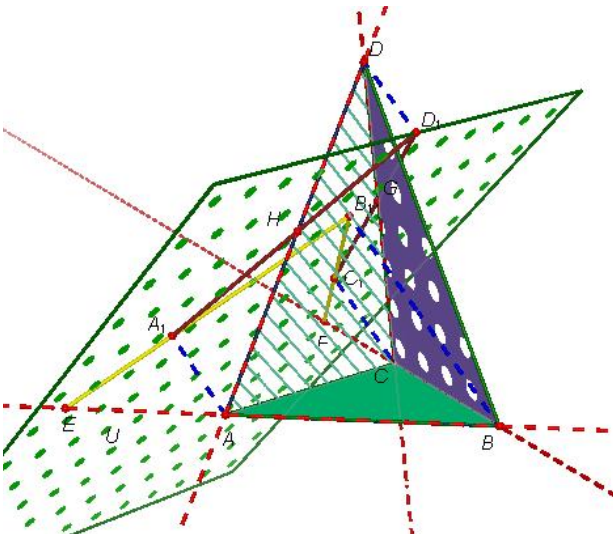
我首先考慮空間中的『孟氏共面定理』，在參考資料[1]中，曾經提到四面體裡的『孟氏共面定理』，我發現其『**充分必要**』條件的描述是錯誤的，故將其些微修正而有如下的『引理三』，並補足其證明。

引理三：(空間中的『孟氏共面定理』)

已知 E、F、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E、F、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又 E、F、G 與 H 四點同時落在平面 U 上，如下圖(十九)所示，則

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$$ 。

證明：



圖(十九)

設 A_1、B_1、C_1 與 D_1 分別是 A、B、C 與 D 在平面 U 上的垂足，則

(i) $\because \Delta AA_1E \sim \Delta BB_1E(AA$相似$)$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\cdots$ ① ;

(ii) $\because \Delta BB_1F \sim \Delta CC_1F(AA$相似$)$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\cdots$ ② ;

(iii) $\because \Delta CC_1G \sim \Delta DD_1G(AA$相似$)$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{DD_1}}\cdots$ ③ ;

(iv) $\because \Delta DD_1H \sim \Delta AA_1H(AA$相似$)$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}\cdots$ ④ ;

由①×②×③×④得，$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\times\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\times\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{DD_1}}\times\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}=1$。 **Q.E.D.**

Remark 2:

(1)在參考資料[1]中，提到『已知E、F、G與H依次為四面體$D-ABC$四稜所在直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{DA}$上四點，則E、F、G與H四點共平面$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。』，這樣的結論顯然有誤，因為當$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$時，$E$、$F$、$G$與$H$四點不必然會共平面，舉例如下：假設四面體$D-ABC$之四頂點坐標分別為$A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$與$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又取$E\left(\frac{3}{2},0,0\right)$、$F\left(\frac{7}{8},\frac{\sqrt{3}}{8},0\right)$、$G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$與$H\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$分別為直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$與$\overleftrightarrow{DA}$上四點，滿足$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\dfrac{3}{1}$、$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\dfrac{1}{1}$與$\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\dfrac{1}{1}$，則$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，且通過E、F與G三點之平面方程式為$\pi_{EFG}:\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)+5(y-0)-2\sqrt{2}(z-0)=0$，顯然$H\notin\pi_{EFG}$，故$E$、$F$、$G$與$H$四點不共平面。

(2)假設四面體$D-ABC$之四頂點坐標分別為$A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$與

$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又取 $E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$、$F\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$、$G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 與 $H\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上之中點，滿足 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{1}$、$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{1}{1}$、$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{1}{1}$ 與 $\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{1}{1}$，

則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，且通過 E、F 與 G 三點之平面方程式為

$\pi_{EFG}:\frac{\sqrt{2}}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{6}}{24}\left(y-0\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(z-0\right)=0$，顯然 $H\in\pi_{EFG}$，故此時

E、F、G 與 H 四點共平面。

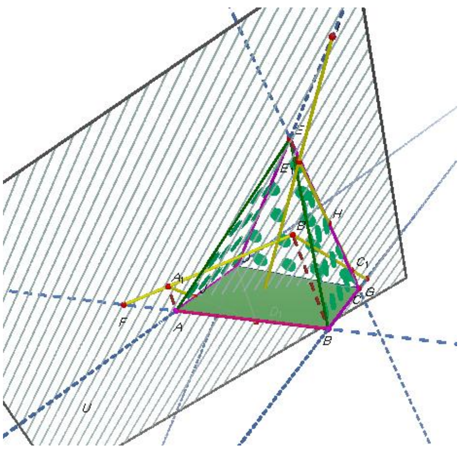
接著我們推廣『引理三』的結果到『四角錐』的情形，於是有了如下之『定理五』。

定理五：

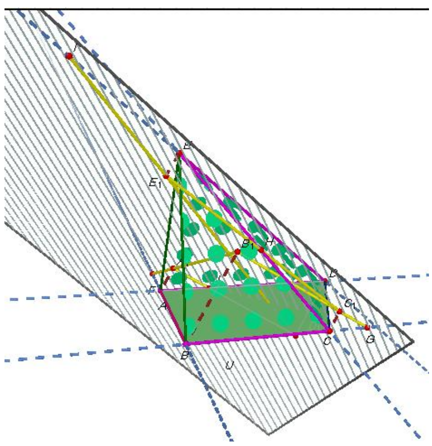
已知 F、G、H、I 與 J 依次為四角錐 $E-ABCD$ 五稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CE}$、$\overleftrightarrow{ED}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上五點，且 F、G、H、I 與 J 五點不與四角錐 $E-ABCD$ 五頂點重合，又 F、G、H、I 與 J 五點同時落在平面 U 上，如下圖(二十)與(二十一)，

則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HE}}\times\frac{\overline{EI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=1$。

證明：



圖(二十)



圖(二十一)

設 A_1、B_1、C_1、D_1 與 E_1 分別是 A、B、C、D 與 E 在平面 U 上的垂足，則

(i) $\because \Delta AA_1F \sim \Delta BB_1F(AA\text{相似})$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\cdots①$；

(ii) $\because \Delta BB_1G \sim \Delta CC_1G(AA\text{相似})$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\cdots②$；

(iii) $\because \Delta CC_1H \sim \Delta EE_1H(AA\text{相似})$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HE}}=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{EE_1}}\cdots③$；

(iv) $\because \Delta EE_1I \sim \Delta DD_1I(AA\text{相似})$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{EI}}{\overline{ID}}=\dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{DD_1}}\cdots④$；

(v) $\because \Delta DD_1J \sim \Delta AA_1J(AA\text{相似})$ $\therefore$ $\dfrac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}\cdots⑤$；

由①×②×③×④×⑤得，

$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HE}}\times\dfrac{\overline{EI}}{\overline{ID}}\times\dfrac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}\times\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}\times\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{EE_1}}\times\dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{DD_1}}\times\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{AA_1}}=1$，得證原命題。

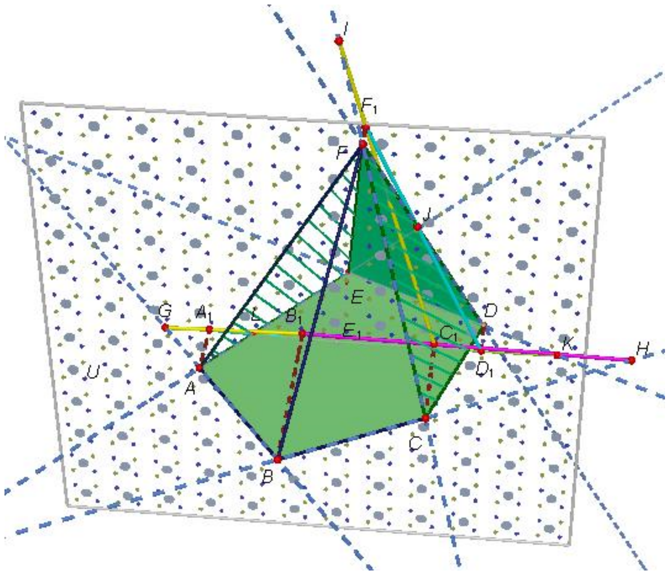
Q.E.D

接著我們推廣『引理三』的結果到『五角錐』的情形，於是有了如下之『定理六』。

定理六：

已知G、H、I、J、K與L依次為五角錐$F-ABCDE$六稜所在直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{FD}$、$\overleftrightarrow{DE}$與$\overleftrightarrow{EA}$上六點，且G、H、I、J、K與L六點不與五角錐$F-ABCDE$六頂點重合，又G、H、I、J、K與L六點同時落在平面U上，如下圖(二十二)，則$\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\dfrac{\overline{CI}}{\overline{IF}}\times\dfrac{\overline{FJ}}{\overline{JD}}\times\dfrac{\overline{DK}}{\overline{KE}}\times\dfrac{\overline{EL}}{\overline{LA}}=1$。

證明：



圖(二十二)

設 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1 與 F_1 分別是 A、B、C、D、E 與 F 在平面 U 上的垂足

(i) $\because \Delta AA_1G \sim \Delta BB_1G(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} \cdots$ ①；

(ii) $\because \Delta BB_1H \sim \Delta CC_1H(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}} = \dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}} \cdots$ ②；

(iii) $\because \Delta CC_1I \sim \Delta FF_1I(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{CI}}{\overline{IF}} = \dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{FF_1}} \cdots$ ③；

(iv) $\because \Delta FF_1J \sim \Delta DD_1J(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{FJ}}{\overline{JD}} = \dfrac{\overline{FF_1}}{\overline{DD_1}} \cdots$ ④；

(v) $\because \Delta DD_1K \sim \Delta EE_1K(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{DK}}{\overline{KE}} = \dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{EE_1}} \cdots$ ⑤；

(vi) $\because \Delta EE_1L \sim \Delta AA_1L(AA\text{相似})\ \therefore\ \dfrac{\overline{EL}}{\overline{LA}} = \dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{AA_1}} \cdots$ ⑥；

由①×②×③×④×⑤×⑥得，

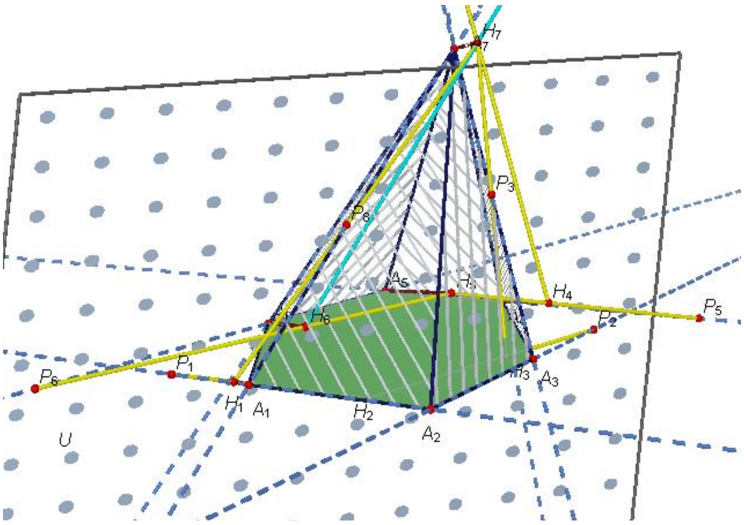
$\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GB}} \times \dfrac{\overline{BH}}{\overline{HC}} \times \dfrac{\overline{CI}}{\overline{IF}} \times \dfrac{\overline{FJ}}{\overline{JD}} \times \dfrac{\overline{DK}}{\overline{KE}} \times \dfrac{\overline{EL}}{\overline{LA}} = \dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} \times \dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}} \times \dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{FF_1}} \times \dfrac{\overline{FF_1}}{\overline{DD_1}} \times \dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{EE_1}} \times \dfrac{\overline{EE_1}}{\overline{AA_1}} = 1$，故得證原命題。 **Q.E.D.**

接著我們推廣『引理三』的結果到『六角錐』的情形，於是有了如下之『定理七』。

定理七：

已知P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7與P_8依次為六角錐$A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$八稜所在直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_7A_4}$、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$與$\overleftrightarrow{A_7A_1}$上八點，且$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$、$P_6$、$P_7$與$P_8$八點不與六角錐$A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$七頂點重合，又$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$、$P_6$、$P_7$與$P_8$八點同時落在平面$U$上，如下頁圖(二十三)，則$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}\times\dfrac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}\times\dfrac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}\times\dfrac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}=1$。

證明：對於每一個$i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，令H_i為A_i在平面U上的垂足，則由相似三角形性質得知，



圖(二十三)

$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\dfrac{\overline{A_1H_1}}{\overline{A_2H_2}},\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}=\dfrac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_3H_3}},\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}=\dfrac{\overline{A_3H_3}}{\overline{A_7H_7}},\dfrac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}=\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_4H_4}},\dfrac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}=\dfrac{\overline{A_4H_4}}{\overline{A_5H_5}},\dfrac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}=\dfrac{\overline{A_5H_5}}{\overline{A_6H_6}},\dfrac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}=\dfrac{\overline{A_6H_6}}{\overline{A_7H_7}},\dfrac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}=\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_1H_1}}$

，故$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}\times\dfrac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}\times\dfrac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}\times\dfrac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}$

$=\dfrac{\overline{A_1H_1}}{\overline{A_2H_2}}\times\dfrac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_3H_3}}\times\dfrac{\overline{A_3H_3}}{\overline{A_7H_7}}\times\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_4H_4}}\times\dfrac{\overline{A_4H_4}}{\overline{A_5H_5}}\times\dfrac{\overline{A_5H_5}}{\overline{A_6H_6}}\times\dfrac{\overline{A_6H_6}}{\overline{A_7H_7}}\times\dfrac{\overline{A_7H_7}}{\overline{A_1H_1}}=1$，得證原命題。

Q.E.D.

由引理三、定理五、定理六與定理七之結果，我很快的可以有如下『定理八』的推論。

定理八：

假設空間中一多面體$\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$，從$n$個頂點中任取$m$個點$A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}, \cdots, A_{k_{m-1}}, A_{k_m}$（可以重複選取），使得$\forall i \in \{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$，$\overline{A_{k_i}A_{k_{i+1}}}$均是$\Gamma$的稜(此處視$A_{k_{m+1}} = A_{k_1}$)，又$\forall j \in \{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$，$P_j$為直線$\overleftrightarrow{A_{k_j}A_{k_{j+1}}}$上異於$A_{k_j}$與$A_{k_{j+1}}$的點，且此$m$個點$P_1,P_2,\cdots,P_m$共平面$U$，其中平面$U$僅與直線$\overleftrightarrow{A_{k_j}A_{k_{j+1}}}$交於一點$P_j$，則

$$\frac{\overline{A_{k_1}P_1}}{\overline{P_1A_{k_2}}}\times\frac{\overline{A_{k_2}P_2}}{\overline{P_2A_{k_3}}}\times\frac{\overline{A_{k_3}P_3}}{\overline{P_3A_{k_4}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_{m-1}}P_{m-1}}}{\overline{P_{m-1}A_{k_m}}}\times\frac{\overline{A_{k_m}P_m}}{\overline{P_mA_{k_1}}}=1\text{ 。}$$

證明：

對於每一個$i \in \{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$，令$H_i$為$A_{k_i}$在平面$U$上的垂足，則

$\because \Delta P_iA_{k_i}H_i \sim \Delta P_iA_{k_{i+1}}H_{i+1}$ $(AA$ 相似$)$，$\therefore \dfrac{\overline{A_{k_i}P_i}}{\overline{P_iA_{k_{i+1}}}} = \dfrac{\overline{A_{k_i}H_i}}{\overline{A_{k_{i+1}}H_{i+1}}}$，所以

$$\frac{\overline{A_{k_1}P_1}}{\overline{P_1A_{k_2}}}\times\frac{\overline{A_{k_2}P_2}}{\overline{P_2A_{k_3}}}\times\frac{\overline{A_{k_3}P_3}}{\overline{P_3A_{k_4}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_{m-1}}P_{m-1}}}{\overline{P_{m-1}A_{k_m}}}\times\frac{\overline{A_{k_m}P_m}}{\overline{P_mA_{k_1}}}$$

$$=\frac{\overline{A_{k_1}H_1}}{\overline{A_{k_2}H_2}}\times\frac{\overline{A_{k_2}H_2}}{\overline{A_{k_3}H_3}}\times\frac{\overline{A_{k_3}H_3}}{\overline{A_{k_4}H_4}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_{m-1}}H_{m-1}}}{\overline{A_{k_m}H_m}}\times\frac{\overline{A_{k_m}H_m}}{\overline{A_{k_1}H_1}}=1$$，得證原命題。 **Q.E.D.**

另外一個觀點，『定理八』其實可以看成如下『定理九』的形式。

定理九：

假設空間中有n個點$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n$，且$\forall j \in \{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，$P_j$為直線$\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$上異於$A_j$與$A_{j+1}$的點(此處視$A_{n+1} = A_1$)，又此$n$個點$P_1,P_2,\cdots,P_n$共平面$U$，

則$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$ 。

證明：對於每一個$i \in \{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，令$H_i$為$A_i$在平面$U$上的垂足，則

$\because \Delta P_i A_i H_i \sim \Delta P_i A_{i+1} H_{i+1}$ (AA 相似)，$\therefore \dfrac{\overline{A_i P_i}}{\overline{P_i A_{i+1}}} = \dfrac{\overline{A_i H_i}}{\overline{A_{i+1} H_{i+1}}}$ ，所以

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}} \times \frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}$$

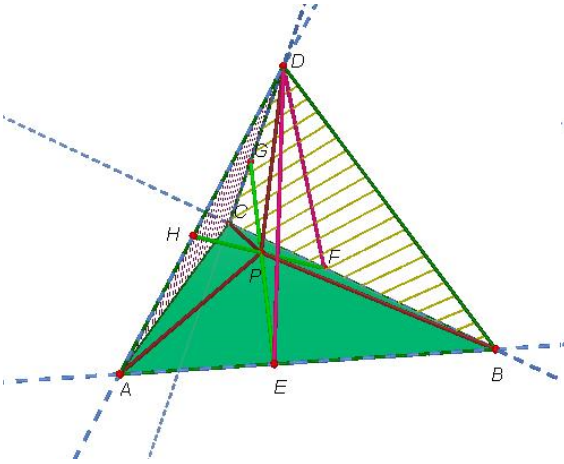
$$= \frac{\overline{A_1H_1}}{\overline{A_2H_2}} \times \frac{\overline{A_2H_2}}{\overline{A_3H_3}} \times \frac{\overline{A_3H_3}}{\overline{A_4H_4}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{n-1}H_{n-1}}}{\overline{A_nH_n}} \times \frac{\overline{A_nH_n}}{\overline{A_1H_1}} = 1$$ ，得證原命題。 **Q.E.D.**

我接著考慮空間中的『西瓦共點定理』，在參考資料[1]中，曾經提到四面體裡的『西瓦共點定理』，我發現其『**充分必要**』條件的描述是錯誤的，故將其些微修正而有如下的『引理四』，並補足其證明。

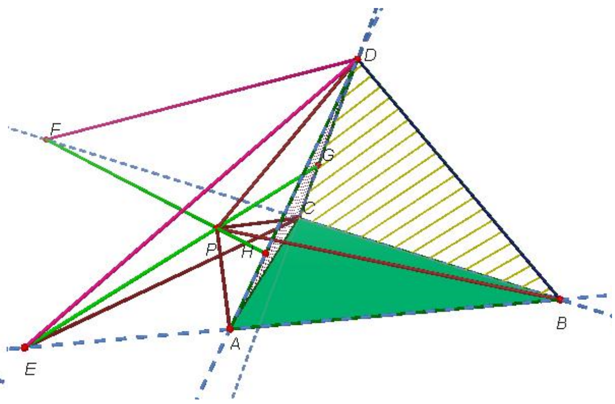
引理四：(空間中的『西瓦共點定理』)

已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 共點，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \times \dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \times \dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}} \times \dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}} = 1$ 。

證明：(1) 空間中的『西瓦共點定理』_形式一



圖(二十四)



圖(二十五)

(i) 如上圖(二十四)所示，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\text{三角錐}D-ACE}{\text{三角錐}D-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ACE}{\text{三角錐}P-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ADE}{\text{三角錐}P-BDE}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}D-ACE)-(\text{三角錐}P-ACE)-(\text{三角錐}P-ADE)}{(\text{三角錐}D-BCE)-(\text{三角錐}P-BCE)-(\text{三角錐}P-BDE)}=\frac{\text{三角錐P}-ACD}{\text{三角錐P}-BCD}\cdots\cdots①$$

(ii) $$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\text{三角錐}D-ABF}{\text{三角錐}D-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-ABF}{\text{三角錐}P-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-BDF}{\text{三角錐}P-CDF}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}D-ABF)-(\text{三角錐}P-ABF)-(\text{三角錐}P-BDF)}{(\text{三角錐}D-ACF)-(\text{三角錐}P-ACF)-(\text{三角錐}P-CDF)}=\frac{\text{三角錐P}-ABD}{\text{三角錐P}-ACD}\cdots\cdots②$$

(iii) $$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{\text{三角錐A}-BCG}{\text{三角錐A}-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-BCG}{\text{三角錐}P-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-ACG}{\text{三角錐}P-ADG}$$
$$=\frac{(\text{三角錐A}-BCG)-(\text{三角錐}P-BCG)-(\text{三角錐}P-ACG)}{(\text{三角錐A}-BDG)-(\text{三角錐}P-BDG)-(\text{三角錐}P-ADG)}=\frac{\text{三角錐P}-ABC}{\text{三角錐P}-ABD}\cdots\cdots③$$

(iv) $$\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐B}-CDH}{\text{三角錐B}-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-CDH}{\text{三角錐}P-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-BDH}{\text{三角錐}P-ABH}$$
$$=\frac{(\text{三角錐B}-CDH)-(\text{三角錐}P-CDH)-(\text{三角錐}P-BDH)}{(\text{三角錐B}-ACH)-(\text{三角錐}P-ACH)-(\text{三角錐}P-ABH)}=\frac{\text{三角錐P}-BCD}{\text{三角錐P}-ABC}\cdots\cdots④$$

(v) 由①×②×③×④得，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐P}-ACD}{\text{三角錐P}-BCD}\times\frac{\text{三角錐P}-ABD}{\text{三角錐P}-ACD}\times\frac{\text{三角錐P}-ABC}{\text{三角錐P}-ABD}\times\frac{\text{三角錐P}-BCD}{\text{三角錐P}-ABC}=1$$，故

在此情況之下，原命題成立。

(2) 空間中的『西瓦共點定理』_形式二

我們試著將上述(1)式中的交點 P 移到四面體 $D-ABC$ 的外部，如上頁圖(二十五)，驗證其正確性。

(vi) $$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\text{三角錐}D-ACE}{\text{三角錐}D-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ACE}{\text{三角錐}P-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ADE}{\text{三角錐}P-BDE}$$
$$=\frac{(\text{三角錐}D-ACE)-(\text{三角錐}P-ACE)-(\text{三角錐}P-ADE)}{(\text{三角錐}D-BCE)-(\text{三角錐}P-BCE)-(\text{三角錐}P-BDE)}=\frac{\text{三角錐P}-ACD}{\text{三角錐P}-BCD}\cdots\cdots⑤$$

(vii) $$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\text{三角錐}D-ABF}{\text{三角錐}D-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-ABF}{\text{三角錐}P-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-BDF}{\text{三角錐}P-CDF}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}D-ABF)-(\text{三角錐}P-ABF)-(\text{三角錐}P-BDF)}{(\text{三角錐}D-ACF)-(\text{三角錐}P-ACF)-(\text{三角錐}P-CDF)}=\frac{\text{三角錐P}-ABD}{\text{三角錐P}-ACD}\cdots\cdots⑥$$

(viii) $$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{\text{三角錐A}-BCG}{\text{三角錐A}-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-BCG}{\text{三角錐}P-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-ACG}{\text{三角錐}P-ADG}$$

$$=\frac{(\text{三角錐A}-BCG)-(\text{三角錐}P-BCG)+(\text{三角錐}P-ACG)}{(\text{三角錐A}-BDG)-(\text{三角錐}P-BDG)+(\text{三角錐}P-ADG)}=\frac{\text{三角錐P}-ABC}{\text{三角錐P}-ABD}\cdots\cdots⑦$$

(ix) $$\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐B}-CDH}{\text{三角錐B}-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-CDH}{\text{三角錐}P-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-BDH}{\text{三角錐}P-ABH}$$

$$=\frac{(\text{三角錐B}-CDH)+(\text{三角錐}P-CDH)-(\text{三角錐}P-BDH)}{(\text{三角錐B}-ACH)+(\text{三角錐}P-ACH)-(\text{三角錐}P-ABH)}=\frac{\text{三角錐P}-BCD}{\text{三角錐P}-ABC}\cdots\cdots⑧$$

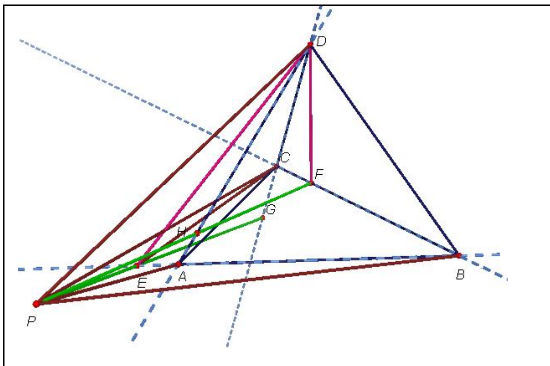
(x) 由⑤×⑥×⑦×⑧得，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐P}-ACD}{\text{三角錐P}-BCD}\times\frac{\text{三角錐P}-ABD}{\text{三角錐P}-ACD}\times\frac{\text{三角錐P}-ABC}{\text{三角錐P}-ABD}\times\frac{\text{三角錐P}-BCD}{\text{三角錐P}-ABC}=1$$，

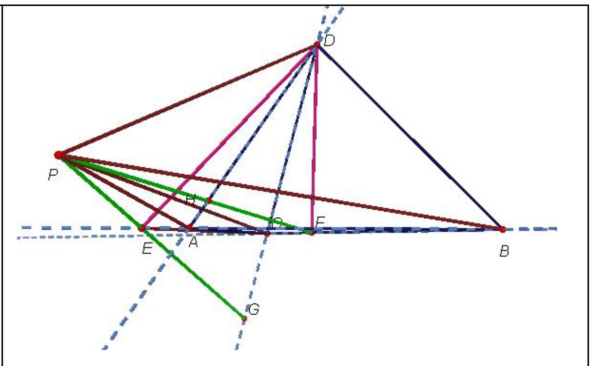
故在此情況之下，原命題成立。

(3) 空間中的『西瓦共點定理』_形式三

我們試著再將上述(1)式中的交點 P 移到四面體 $D-ABC$ 的外部的另一處，如下圖(二十六)與(二十七)所示，驗證其正確性。



圖(二十六)



圖(二十七)

(xi) $$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\text{三角錐}D-ACE}{\text{三角錐}D-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ACE}{\text{三角錐}P-BCE}=\frac{\text{三角錐}P-ADE}{\text{三角錐}P-BDE}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}D-ACE)-(\text{三角錐}P-ACE)+(\text{三角錐}P-ADE)}{(\text{三角錐}D-BCE)-(\text{三角錐}P-BCE)+(\text{三角錐}P-BDE)}=\frac{\text{三角錐P}-ACD}{\text{三角錐P}-BCD}\cdots\cdots①$$

(xii) $$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\text{三角錐}D-ABF}{\text{三角錐}D-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-ABF}{\text{三角錐}P-ACF}=\frac{\text{三角錐}P-BDF}{\text{三角錐}P-CDF}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}P-ABF)+(\text{三角錐}P-BDF)-(\text{三角錐}D-ABF)}{(\text{三角錐}P-ACF)+(\text{三角錐}P-CDF)-(\text{三角錐}D-ACF)}=\frac{\text{三角錐}P-ABD}{\text{三角錐}P-ACD}\cdots\cdots②$$

(xiii) $$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{\text{三角錐}A-BCG}{\text{三角錐}A-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-BCG}{\text{三角錐}P-BDG}=\frac{\text{三角錐}P-ACG}{\text{三角錐}P-ADG}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}P-BCG)-(\text{三角錐}A-BCG)-(\text{三角錐}P-ACG)}{(\text{三角錐}P-BDG)-(\text{三角錐}A-BDG)-(\text{三角錐}P-ADG)}=\frac{\text{三角錐}P-ABC}{\text{三角錐}P-ABD}\cdots\cdots③$$

(xiv) $$\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐}B-CDH}{\text{三角錐}B-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-CDH}{\text{三角錐}P-ACH}=\frac{\text{三角錐}P-BDH}{\text{三角錐}P-ABH}$$

$$=\frac{(\text{三角錐}B-CDH)+(\text{三角錐}P-CDH)+(\text{三角錐}P-BDH)}{(\text{三角錐}B-ACH)+(\text{三角錐}P-ACH)+(\text{三角錐}P-ABH)}=\frac{\text{三角錐}P-BCD}{\text{三角錐}P-ABC}\cdots\cdots④$$

(xv) 由①×②×③×④得，

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\text{三角錐}P-ACD}{\text{三角錐}P-BCD}\times\frac{\text{三角錐}P-ABD}{\text{三角錐}P-ACD}\times\frac{\text{三角錐}P-ABC}{\text{三角錐}P-ABD}\times\frac{\text{三角錐}P-BCD}{\text{三角錐}P-ABC}=1$$

，故在此情況之下，原命題成立。

Q.E.D.

Remark 3:

(1)在參考資料[1]中，提到『已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，則四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 共點 $\Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。』，這樣的結論顯然有誤，因為當 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 時，四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 不必然會共點，舉例如下：假設四面體 $D-ABC$ 之四頂點坐標分別為 $A(0,0,0)$ 、$B(1,0,0)$ 、$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 與 $D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ，又取 $E\left(\frac{3}{2},0,0\right)$ 、$F\left(\frac{7}{8},\frac{\sqrt{3}}{8},0\right)$ 、$G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 與 $H\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，滿足 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{3}{1}$ 、$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{1}{3}$ 、$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{1}{1}$ 與 $\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{1}{1}$ ，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，又經計算得四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 之方程式分別為 $\pi_{CDE}:\sqrt{3}x+2y+\sqrt{2}z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 、$\pi_{ADF}:\sqrt{3}x-7y+\sqrt{2}z=0$ 、$\pi_{ABG}:y-\sqrt{2}z=0$ 與 $\pi_{BCH}:\sqrt{3}x+y+2\sqrt{2}z=\sqrt{3}$ ，且

ADF 、ABG 與 BCH 三平面之交點為 $P\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{6}}{18}\right)$，顯然 $P\notin\pi_{CDE}$，故四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 不共點。

(2)假設四面體 $D-ABC$ 之四頂點坐標分別為 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$與 $D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，又取 $E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$、$F\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$、$G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$與 $H\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$分別為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，滿足 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{1}$ 、$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{1}{1}$ 、$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{1}{1}$ 與 $\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{1}{1}$，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 成立，又經計算得四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 之方程式分別為 $\pi_{CDE}:x=\frac{1}{2}$ 、$\pi_{ADF}:x-\sqrt{3}y=0$ 、$\pi_{ABG}:y-\sqrt{2}z=0$ 與 $\pi_{BCH}:\sqrt{3}x+y+2\sqrt{2}z=\sqrt{3}$，且 CDE 、ADF 與 ABG 三平面之交點為 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{12}\right)$，顯然 $P\in\pi_{BCH}$，故四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 共點。

我試著將引理四中的『四面體』換成『四角錐』，於是發現了下述『問題九』之結果。

問題九：

空間中四角錐 $E-ABCD$ 的五頂點分別為

$A(0,0,0)B(4,0,0)C(5,3,0)D(0,2,0)E(2,1,4)$

，又給定一點 $P(3,1,3)$，若直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別與三平面 E_{CEP} 、E_{DEP} 與 E_{CDP} 交於 P_1,P_2 與 P_3（其中 P_1,P_2 與 P_3 均異於 A 與 B），直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 分別與三平面 E_{AEP} 、E_{DEP} 與 E_{ADP} 交於 P_4,P_5 與 P_6（其中 P_4,P_5 與 P_6 均異於 B 與 C），直線 $\overleftrightarrow{CE}$ 分別與三平面 E_{ADP} 、E_{BDP} 與 E_{ABP} 交於 P_7,P_8 與 P_9（其中 P_7,P_8 與 P_9 均異於 C 與 E），直線 $\overleftrightarrow{ED}$ 分別與三平面 E_{ACP} 、E_{BCP} 與 E_{ABP} 交於 P_{10},P_{11} 與 P_{12}（其中 P_{10},P_{11} 與 P_{12} 均異於 E 與 D），直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 分別與三平面 E_{BEP} 、E_{CEP} 與 E_{BCP} 交於 P_{13},P_{14} 與 P_{15}（其中 P_{13},P_{14} 與 P_{15} 均異於 D 與 A），試證明：

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_3B}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{BP_5}}{\overline{P_5C}}\times\frac{\overline{BP_6}}{\overline{P_6C}}\times\frac{\overline{CP_7}}{\overline{P_7E}}\times\frac{\overline{CP_8}}{\overline{P_8E}}\times\frac{\overline{CP_9}}{\overline{P_9E}}\times\frac{\overline{EP_{10}}}{\overline{P_{10}D}}\times\frac{\overline{EP_{11}}}{\overline{P_{11}D}}\times\frac{\overline{EP_{12}}}{\overline{P_{12}D}}\times\frac{\overline{DP_{13}}}{\overline{P_{13}A}}\times\frac{\overline{DP_{14}}}{\overline{P_{14}A}}\times\frac{\overline{DP_{15}}}{\overline{P_{15}A}}=1$$
。

證明：

如下圖 27-1 所示，

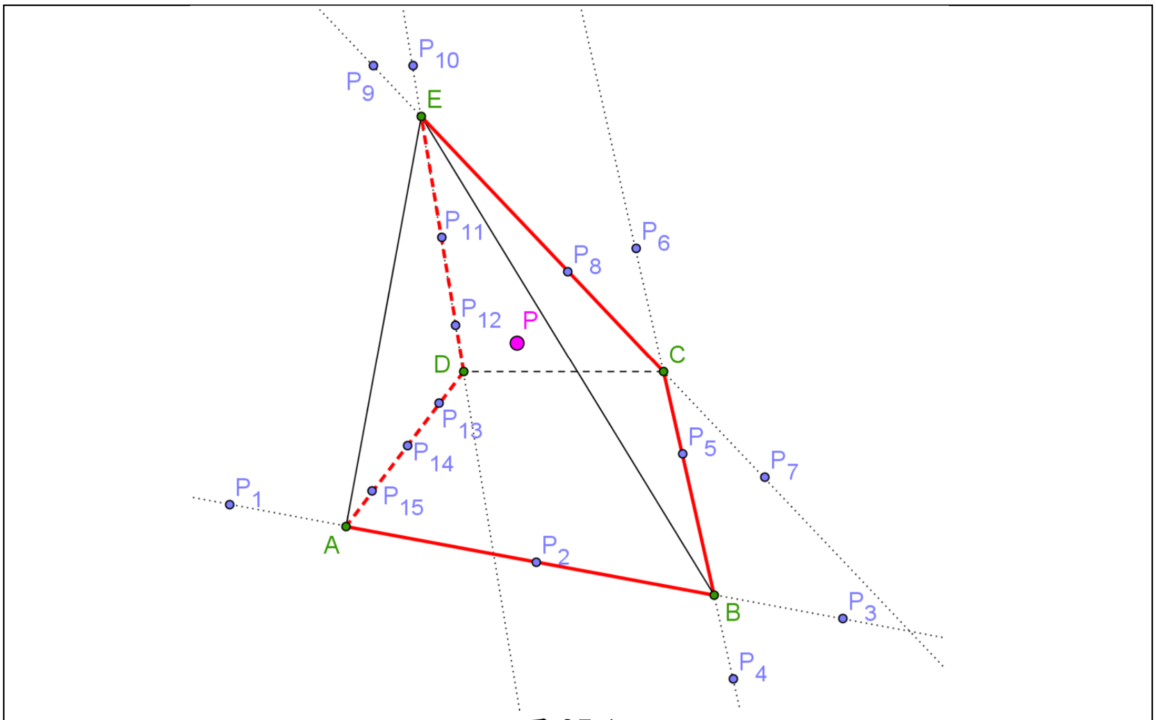


圖 27-1

(i) 四角錐 $E-ABCD$ 八條稜線中的五條稜線所在的直線方程式如下：$\overleftrightarrow{AB}:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$；

$\overleftrightarrow{BC}:\begin{cases}x=4+t\\y=3t\\z=0\end{cases},t\in\mathbb{R}$；$\overleftrightarrow{CE}:\begin{cases}x=5+3t\\y=3+2t\\z=-4t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$；$\overleftrightarrow{ED}:\begin{cases}x=2t\\y=2-t\\z=4t\end{cases},t\in\mathbb{R}$；$\overleftrightarrow{DA}:\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$

(ii) 過點 P 且過四角錐 $E-ABCD$ 五頂點中的任兩個頂點之十個平面如下：

$E_{ABP}:3y-z=0$；$E_{ACP}:9x-15y-4z=0$；$E_{ADP}:x-z=0$；

$E_{AEP}:-x+6y-z=0$；$E_{BCP}:9x-3y+4z-36=0$；

$E_{BDP}:3x+6y-z-12=0$；$E_{BEP}:-x+2y-z+4=0$；

$E_{CDP}:-3x+15y+8z-30=0$；$E_{CEP}:2x+y+2z-13=0$；

$E_{DEP}:x+6y+z-12=0$

(iii) 上述(i)中的五條稜線與(ii)中的十個平面之十五個交點如下：

E_{CEP}與$\overleftrightarrow{AB}$交於$P_1 \Rightarrow P_1\left(\frac{13}{2},0,0\right)$；$E_{DEP}$與$\overleftrightarrow{AB}$交於$P_2 \Rightarrow P_2\left(12,0,0\right)$；

E_{CDP}與$\overleftrightarrow{AB}$交於$P_3 \Rightarrow P_3\left(-10,0,0\right)$；$E_{AEP}$與$\overleftrightarrow{BC}$交於$P_4 \Rightarrow P_4\left(\dfrac{72}{17},\dfrac{12}{17},0\right)$；

E_{DEP}與$\overleftrightarrow{BC}$交於$P_5 \Rightarrow P_5\left(\dfrac{84}{19},\dfrac{24}{19},0\right)$；$E_{ADP}$與$\overleftrightarrow{BC}$交於$P_6 \Rightarrow P_6\left(0,-12,0\right)$；

E_{ADP}與$\overleftrightarrow{CE}$交於$P_7 \Rightarrow P_7\left(\frac{20}{7},\frac{11}{7},\frac{20}{7}\right)$；$E_{BDP}$與$\overleftrightarrow{CE}$交於$P_8 \Rightarrow P_8\left(\frac{62}{25},\frac{33}{25},\frac{84}{25}\right)$；

E_{ABP}與$\overleftrightarrow{CE}$交於$P_9 \Rightarrow P_9\left(\frac{23}{10},\frac{12}{10},\frac{36}{10}\right)$；$E_{ACP}$與$\overleftrightarrow{ED}$交於$P_{10} \Rightarrow P_{10}\left(\frac{60}{17},\frac{4}{17},\frac{120}{17}\right)$；

E_{BCP}與$\overleftrightarrow{ED}$交於$P_{11} \Rightarrow P_{11}\left(\frac{84}{37},\frac{32}{37},\frac{168}{37}\right)$；$E_{ABP}$與$\overleftrightarrow{ED}$交於$P_{12} \Rightarrow P_{12}\left(\frac{12}{7},\frac{8}{7},\frac{24}{7}\right)$；

E_{BEP}與$\overleftrightarrow{DA}$交於$P_{13} \Rightarrow P_{13}\left(0,-2,0\right)$；$E_{CEP}$與$\overleftrightarrow{DA}$交於$P_{14} \Rightarrow P_{14}\left(0,13,0\right)$；

E_{BCP}與$\overleftrightarrow{DA}$交於$P_{15} \Rightarrow P_{15}\left(0,-12,0\right)=P_6$。

(iv) 計算得 $\overline{AP_1}=\frac{13}{2}$；$\overline{AP_2}=12$；$\overline{AP_3}=10$；$\overline{P_1B}=\frac{5}{2}$；$\overline{P_2B}=8$；$\overline{P_3B}=14$；$\overline{BP_4}=\frac{4\sqrt{10}}{17}$；

$\overline{BP_5}=\frac{8\sqrt{10}}{19}$；$\overline{BP_6}=4\sqrt{10}$；$\overline{P_4C}=\frac{13\sqrt{10}}{17}$；$\overline{P_5C}=\frac{11\sqrt{10}}{19}$；$\overline{P_6C}=5\sqrt{10}$；$\overline{CP_7}=\frac{5\sqrt{29}}{7}$；

$\overline{CP_8}=\frac{21\sqrt{29}}{25}$；$\overline{CP_9}=\frac{9\sqrt{29}}{10}$；$\overline{P_7E}=\frac{2\sqrt{29}}{7}$；$\overline{P_8E}=\frac{4\sqrt{29}}{25}$；$\overline{P_9E}=\frac{\sqrt{29}}{10}$；$\overline{EP_{10}}=\frac{13\sqrt{21}}{17}$；

$\overline{EP_{11}}=\frac{5\sqrt{21}}{37}$；$\overline{EP_{12}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$；$\overline{P_{10}D}=\frac{30\sqrt{21}}{17}$；$\overline{P_{11}D}=\frac{42\sqrt{21}}{37}$；$\overline{P_{12}D}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$；$\overline{DP_{13}}=4$；

$\overline{DP_{14}}=11$；$\overline{DP_{15}}=14$；$\overline{P_{13}A}=2$；$\overline{P_{14}A}=13$；$\overline{P_{15}A}=12$。

(v) 故

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_3B}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{BP_5}}{\overline{P_5C}}\times\frac{\overline{BP_6}}{\overline{P_6C}}\times\frac{\overline{CP_7}}{\overline{P_7E}}\times\frac{\overline{CP_8}}{\overline{P_8E}}\times\frac{\overline{CP_9}}{\overline{P_9E}}\times\frac{\overline{EP_{10}}}{\overline{P_{10}D}}\times\frac{\overline{EP_{11}}}{\overline{P_{11}D}}\times\frac{\overline{EP_{12}}}{\overline{P_{12}D}}\times\frac{\overline{DP_{13}}}{\overline{P_{13}A}}\times\frac{\overline{DP_{14}}}{\overline{P_{14}A}}\times\frac{\overline{DP_{15}}}{\overline{P_{15}A}}$$

$$=\frac{\dfrac{13}{2}\times12\times10\times\dfrac{4\sqrt{10}}{17}\times\dfrac{8\sqrt{10}}{19}\times4\sqrt{10}\times\dfrac{5\sqrt{29}}{7}\times\dfrac{21\sqrt{29}}{25}\times\dfrac{9\sqrt{29}}{10}\times\dfrac{13\sqrt{21}}{17}\times\dfrac{5\sqrt{21}}{37}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times4\times11\times14}{\dfrac{5}{2}\times8\times14\times\dfrac{13\sqrt{10}}{17}\times\dfrac{11\sqrt{10}}{19}\times5\sqrt{10}\times\dfrac{2\sqrt{29}}{7}\times\dfrac{4\sqrt{29}}{25}\times\dfrac{\sqrt{29}}{10}\times\dfrac{30\sqrt{21}}{17}\times\dfrac{42\sqrt{21}}{37}\times\dfrac{6\sqrt{21}}{7}\times2\times13\times12}$$

$=1$。 **Q.E.D.**

Remark 4:

(1)『問題九』之結果其實是空間中『西瓦共點定理』在四角錐的形式，我發現每

條被選中的稜線上會有 $3(=C_2^3=C_2^{5-2})$ 個交點（例如：$\overleftrightarrow{AB}$ 上有 P_1,P_2 與 P_3 三個交點），按照這樣的規則，如果是『n 個頂點多面體 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$』，每條被選中的稜線上應該要有 C_2^{n-2} 個交點，譬如說，第 i 條被選中的稜線 $\overleftrightarrow{A_{k_i}A_{k_{i+1}}}$ 上應該要有 $P_{(i-1)C_2^{n-2}+1},P_{(i-1)C_2^{n-2}+2},\cdots,P_{(i-1)C_2^{n-2}+C_2^{n-2}}$ 共 C_2^{n-2} 個交點，此時我猜測『西瓦共點定理』的形式

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{A_{k_i}P_{(i-1)C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{(i-1)C_2^{n-2}+1}A_{k_{i+1}}}}\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{(i-1)C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{(i-1)C_2^{n-2}+2}A_{k_{i+1}}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{(i-1)C_2^{n-2}+C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{(i-1)C_2^{n-2}+C_2^{n-2}}A_{k_{i+1}}}}\right)=1$$

，其中 m 表示所選循環路徑包含的稜線數，此猜測尚待證明之。

(2)『問題九』中所計算得的 30 個線段長，並無法獨立相消。

全國科展後，我又順利的找到空間中『n 個頂點多面體』的『西瓦共點定理』之形式，並且給予嚴謹的證明，如此一來，我們便得更完整的掌握『孟氏定理』與『西瓦定理』在平面上多邊形與空間中多面體的一般形式。

針對『Remark 4』中所提出的猜測，經過一番努力，終於完成該猜測的證明，詳細結果如下之『Remark 5』、『引理五』、『定理十』、『定理十一』與『定理十二』所述。

Remark 5: **（空間中四角錐的西瓦共點定理—以四角錐為例）**

試著將『問題九』中的四角錐 $E-ABCD$ 換成 $A_5-A_1A_2A_3A_4$，則『問題九』所考慮的循環路徑即 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_1}$，並且會有如下之結果，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}$$

$$\times\frac{\overline{A_4P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=1$$ ，

我試著將循環路徑改變，看是不是也會有類似的結果，嘗試了幾個不一樣的循環

路徑，發現結論是肯定的，詳述如下：

(i) 為了方便起見，我們定義直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$(其中$i<j$)的序位數為

$r_{ij}:=\left[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+(n-(i-1))+(j-i-1)\right]\times C_2^{n-2}$，其中 n 表是多面體 $A_1A_2\cdots A_n$ 的頂點數。

此時直線$\overleftrightarrow{A_iA_j}$上的$C_2^{n-2}$個交點應為$P_{r_{ij}+1},P_{r_{ij}+2},\cdots,P_{r_{ij}+C_2^{n-2}}$，化簡$r_{ij}$得

$$r_{ij}=\left\{\frac{(i-1)\times\left[(n-1)+(n-(i-1))\right]}{2}+(j-i-1)\right\}\times C_2^{n-2}$$

$$=\left\{\frac{(i-1)\times(2n-i)}{2}+(j-i-1)\right\}\times C_2^{n-2}$$

$$=\left\{\frac{2ni-i^2-2n+i+2j-2i-2}{2}\right\}\times C_2^{n-2}$$

$$=\left\{\frac{2ni-i^2-2n-i+2j-2}{2}\right\}\times C_2^{n-2}$$

$$=\left\{ni-n+j-1-\frac{(i^2+i)}{2}\right\}\times C_2^{n-2}$$

$$=\left\{n(i-1)+(j-1)-\frac{i(i+1)}{2}\right\}\times C_2^{n-2}$$

(ii) 承續『問題九』，空間中四角錐$A_5-A_1A_2A_3A_4$的五頂點分別為$A_1(0,0,0)$, $A_2(4,0,0),A_3(5,3,0),A_4(0,2,0),A_5(2,1,4)$，又給定一點$P(3,1,3)$滿足

① $P\notin E_{A_1A_3A_5}$，其中$E_{A_1A_3A_5}$為A_1,A_3,A_5三點所構成之平面

② $P\notin E_{A_2A_4A_5}$，其中$E_{A_2A_4A_5}$為A_2,A_4,A_5三點所構成之平面

(iii) 設$\overleftrightarrow{A_1A_2}$與三平面$E_{A_3A_4P}$、$E_{A_3A_5P}$、$E_{A_4A_5P}$分別交於$P_1$、$P_2$、$P_3$三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與三平面$E_{A_2A_4P}$、$E_{A_2A_5P}$、$E_{A_4A_5P}$分別交於$P_4$、$P_5$、$P_6$三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_4}$與三平面$E_{A_2A_3P}$、$E_{A_2A_5P}$、$E_{A_3A_5P}$分別交於$P_7$、$P_8$、$P_9$三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_5}$與三平面$E_{A_2A_3P}$、$E_{A_2A_4P}$、$E_{A_3A_4P}$分別交於$P_{10}$、$P_{11}$、$P_{12}$三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與三平面$E_{A_4A_5P}$、$E_{A_4A_1P}$、$E_{A_5A_1P}$分別交於$P_{13}$、$P_{14}$、$P_{15}$三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 與三平面 $E_{A_3A_5P}$、$E_{A_3A_1P}$、$E_{A_5A_1P}$ 分別交於 P_{16} 、P_{17} 、P_{18} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 與三平面 $E_{A_3A_4P}$、$E_{A_3A_1P}$、$E_{A_4A_1P}$ 分別交於 P_{19} 、P_{20} 、P_{21} 三點，

$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與三平面 $E_{A_5A_1P}$、$E_{A_5A_2P}$、$E_{A_1A_2P}$ 分別交於 P_{22} 、P_{23} 、P_{24} 三點，

$\overleftrightarrow{A_3A_5}$ 與三平面 $E_{A_4A_1P}$、$E_{A_4A_2P}$、$E_{A_1A_2P}$ 分別交於 P_{25} 、P_{26} 、P_{27} 三點，

$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與三平面 $E_{A_1A_2P}$、$E_{A_1A_3P}$、$E_{A_2A_3P}$ 分別交於 P_{28} 、P_{29} 、P_{30} 三點，

共有 C_2^5=10 條直線(其中 8 條為四角錐之稜線)與 30 個交點(其中每條直線上有 3 個交點，但是這 30 個交點不一定全相異，如問題九中的 P_{15}=P_6 兩點重合)

(iv) 四角錐 $A_5-A_1A_2A_3A_4$ 五個頂點兩兩連線得十條直線之直線方程式如下：

$$\overleftrightarrow{A_1A_2}:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases};\quad \overleftrightarrow{A_1A_3}:\begin{cases}x=5t\\y=3t\\z=0\end{cases},t\in\mathbb{R};\quad \overleftrightarrow{A_1A_4}:\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases};\quad \overleftrightarrow{A_1A_5}:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4t\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

$$\overleftrightarrow{A_2A_3}:\begin{cases}x=4+t\\y=3t\\z=0\end{cases},t\in\mathbb{R};\quad \overleftrightarrow{A_2A_4}:\begin{cases}x=4-4t\\y=2t\\z=0\end{cases},t\in\mathbb{R};\quad \overleftrightarrow{A_2A_5}:\begin{cases}x=4-2t\\y=t\\z=4t\end{cases},t\in\mathbb{R};$$

$$\overleftrightarrow{A_3A_4}:\begin{cases}x=5+5t\\y=3+t\\z=0\end{cases},t\in\mathbb{R};\quad \overleftrightarrow{A_3A_5}:\begin{cases}x=5+3t\\y=3+2t\\z=-4t\end{cases},t\in\mathbb{R};\quad \overleftrightarrow{A_4A_5}:\begin{cases}x=2t\\y=2-t\\z=4t\end{cases},t\in\mathbb{R}。$$

(v) 過點 P 且過四角錐 $A_5-A_1A_2A_3A_4$ 五頂點中的任兩個頂點之十個平面如下：

$E_{A_1A_2P}:3y-z=0$ ；$E_{A_1A_3P}:9x-15y-4z=0$ ；$E_{A_1A_4P}:x-z=0$ ；

$E_{A_1A_5P}:x-6y+z=0$ ；$E_{A_2A_3P}:9x-3y+4z-36=0$ ；

$E_{A_2A_4P}:3x+6y-z-12=0$ ；$E_{A_2A_5P}:x-2y+z-4=0$ ；

$E_{A_3A_4P}:3x-15y-8z+30=0$ ；$E_{A_3A_5P}:2x+y+2z-13=0$ ；

$E_{A_4A_5P}:x+6y+z-12=0$ 。

(vi) 上述(iv)中的十條直線與(v)中的十個平面之三十個交點如下：

$E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$P_1\Rightarrow P_1(-10,0,0)$ ；$E_{A_3A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$P_2\Rightarrow P_2\left(\dfrac{13}{2},0,0\right)$ ；

$E_{A_4A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於$P_3\Rightarrow P_3(12,0,0)$ ；$E_{A_2A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_3}$交於$P_4\Rightarrow P_4\left(\dfrac{20}{11},\dfrac{12}{11},0\right)$ ；

$E_{A_2A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_3}$交於$P_5 \Rightarrow P_5\left(-20,-12,0\right)$；$E_{A_4A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_3}$交於$P_6 \Rightarrow P_6\left(\frac{60}{23},\frac{36}{23},0\right)$；

$E_{A_2A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_4}$交於$P_7 \Rightarrow P_7\left(0,-12,0\right)$；$E_{A_2A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_4}$交於$P_8 \Rightarrow P_8\left(0,-2,0\right)$；

$E_{A_3A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_4}$交於$P_9 \Rightarrow P_9\left(0,13,0\right)$；$E_{A_2A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_5}$交於$P_{10} \Rightarrow P_{10}\left(\frac{72}{31},\frac{36}{31},\frac{144}{31}\right)$；

$E_{A_2A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_5}$交於$P_{11} \Rightarrow P_{11}\left(3,\frac{3}{2},6\right)$；$E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_5}$交於$P_{12} \Rightarrow P_{12}\left(\frac{60}{41},\frac{30}{41},\frac{120}{41}\right)$；

$E_{A_4A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交於$P_{13} \Rightarrow P_{13}\left(\frac{84}{19},\frac{24}{19},0\right)$；$E_{A_4A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交於$P_{14} \Rightarrow P_{14}\left(0,-12,0\right)$；

$E_{A_5A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$交於$P_{15} \Rightarrow P_{15}\left(\frac{72}{17},\frac{12}{17},0\right)$；$E_{A_3A_5P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4}$交於$P_{16} \Rightarrow P_{16}\left(9,-\frac{5}{2},0\right)$；

$E_{A_3A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4}$交於$P_{17} \Rightarrow P_{17}\left(\frac{20}{11},\frac{12}{11},0\right)$；$E_{A_5A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4}$交於$P_{18} \Rightarrow P_{18}\left(3,\frac{1}{2},0\right)$；

$E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$交於$P_{19} \Rightarrow P_{19}\left(\frac{128}{53},\frac{42}{53},\frac{168}{53}\right)$；$E_{A_3A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$交於$P_{20} \Rightarrow P_{20}\left(\frac{124}{49},\frac{36}{49},\frac{144}{49}\right)$；

$E_{A_4A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$交於$P_{21} \Rightarrow P_{21}\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$；$E_{A_5A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$交於$P_{22} \Rightarrow P_{22}\left(-60,-10,0\right)$；

$E_{A_5A_2P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$交於$P_{23} \Rightarrow P_{23}\left(\frac{40}{3},\frac{14}{3},0\right)$；$E_{A_1A_2P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$交於$P_{24} \Rightarrow P_{24}\left(-10,0,0\right)$；

$E_{A_4A_1P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_5}$交於$P_{25} \Rightarrow P_{25}\left(\frac{20}{7},\frac{11}{7},\frac{20}{7}\right)$；$E_{A_4A_2P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_5}$交於$P_{26} \Rightarrow P_{26}\left(\frac{62}{25},\frac{33}{25},\frac{84}{25}\right)$；

$E_{A_1A_2P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_5}$交於$P_{27} \Rightarrow P_{27}\left(\frac{23}{10},\frac{12}{10},\frac{36}{10}\right)$；$E_{A_1A_2P}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$交於$P_{28} \Rightarrow P_{28}\left(\frac{12}{7},\frac{8}{7},\frac{24}{7}\right)$；

$E_{A_1A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$交於$P_{29} \Rightarrow P_{29}\left(\frac{60}{17},\frac{4}{17},\frac{120}{17}\right)$；$E_{A_2A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_4A_5}$交於$P_{30} \Rightarrow P_{30}\left(\frac{84}{37},\frac{32}{37},\frac{168}{37}\right)$。

(vii) 若選取的循環路徑為$\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_1}$，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{28}}}{\overline{P_{28}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{29}}}{\overline{P_{29}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{30}}}{\overline{P_{30}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1$$

(如問題九)。

(viii)若選取的循環路徑為$\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_1}$，則

計算得$\overline{A_1P_1}=10$；$\overline{A_1P_2}=\frac{13}{2}$；$\overline{A_1P_3}=12$；$\overline{P_1A_2}=14$；$\overline{P_2A_2}=\frac{5}{2}$；$\overline{P_3A_2}=8$；

$\overline{A_2P_{13}}=\dfrac{8\sqrt{10}}{19}$ ；$\overline{A_2P_{14}}=4\sqrt{10}$ ；$\overline{A_2P_{15}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{17}$ ；$\overline{P_{13}A_3}=\dfrac{11\sqrt{10}}{19}$ ；$\overline{P_{14}A_3}=5\sqrt{10}$ ；$\overline{P_{15}A_3}=\dfrac{13\sqrt{10}}{17}$ ；

$\overline{A_3P_{25}}=\dfrac{5\sqrt{29}}{7}$ ；$\overline{A_3P_{26}}=\dfrac{21\sqrt{29}}{25}$ ；$\overline{A_3P_{27}}=\dfrac{9\sqrt{29}}{10}$ ；$\overline{P_{25}A_5}=\dfrac{2\sqrt{29}}{7}$ ；$\overline{P_{26}A_5}=\dfrac{4\sqrt{29}}{25}$ ；$\overline{P_{27}A_5}=\dfrac{\sqrt{29}}{10}$ ；

$\overline{A_5P_{10}}=\dfrac{5\sqrt{21}}{31}$ ；$\overline{A_5P_{11}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ ；$\overline{A_5P_{12}}=\dfrac{11\sqrt{21}}{41}$ ；$\overline{P_{10}A_1}=\dfrac{36\sqrt{21}}{31}$ ；$\overline{P_{11}A_1}=\dfrac{3\sqrt{21}}{2}$ ；$\overline{P_{12}A_1}=\dfrac{30\sqrt{21}}{41}$ ；

故

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}$$

$$=\frac{10\times\frac{13}{2}\times12\times\frac{8\sqrt{10}}{19}\times4\sqrt{10}\times\frac{4\sqrt{10}}{17}\times\frac{5\sqrt{29}}{7}\times\frac{21\sqrt{29}}{25}\times\frac{9\sqrt{29}}{10}\times\frac{5\sqrt{21}}{31}\times\frac{\sqrt{21}}{2}\times\frac{11\sqrt{21}}{41}}{14\times\frac{5}{2}\times8\times\frac{11\sqrt{10}}{19}\times5\sqrt{10}\times\frac{13\sqrt{10}}{17}\times\frac{2\sqrt{29}}{7}\times\frac{4\sqrt{29}}{25}\times\frac{\sqrt{29}}{10}\times\frac{36\sqrt{21}}{31}\times\frac{3\sqrt{21}}{2}\times\frac{30\sqrt{21}}{41}}=1\text{。}$$

(ix) 若選取的循環路徑為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_1}$ ，則

計算得 $\overline{A_1P_1}=10$ ；$\overline{A_1P_2}=\dfrac{13}{2}$ ；$\overline{A_1P_3}=12$ ；$\overline{P_1A_2}=14$ ；$\overline{P_2A_2}=\dfrac{5}{2}$ ；$\overline{P_3A_2}=8$ ；

$\overline{A_2P_{19}}=\dfrac{42\sqrt{21}}{53}$ ；$\overline{A_2P_{20}}=\dfrac{36\sqrt{21}}{49}$ ；$\overline{A_2P_{21}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ ；$\overline{P_{19}A_5}=\dfrac{11\sqrt{21}}{53}$ ；$\overline{P_{20}A_5}=\dfrac{13\sqrt{21}}{49}$ ；$\overline{P_{21}A_5}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ ；

$\overline{A_5P_{10}}=\dfrac{5\sqrt{21}}{31}$ ；$\overline{A_5P_{11}}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ ；$\overline{A_5P_{12}}=\dfrac{11\sqrt{21}}{41}$ ；$\overline{P_{10}A_1}=\dfrac{36\sqrt{21}}{31}$ ；$\overline{P_{11}A_1}=\dfrac{3\sqrt{21}}{2}$ ；$\overline{P_{12}A_1}=\dfrac{30\sqrt{21}}{41}$ ；

故

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}$$

$$=\frac{10\times\frac{13}{2}\times12\times\frac{42\sqrt{21}}{53}\times\frac{36\sqrt{21}}{49}\times\frac{2\sqrt{21}}{3}\times\frac{5\sqrt{21}}{31}\times\frac{\sqrt{21}}{2}\times\frac{11\sqrt{21}}{41}}{14\times\frac{5}{2}\times8\times\frac{11\sqrt{21}}{53}\times\frac{13\sqrt{21}}{49}\times\frac{\sqrt{21}}{3}\times\frac{36\sqrt{21}}{31}\times\frac{3\sqrt{21}}{2}\times\frac{30\sqrt{21}}{41}}=1\text{。}$$

(x) 若選取的循環路徑為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_1}$ ，則

計算得 $\overline{A_1P_1}=10$ ；$\overline{A_1P_2}=\dfrac{13}{2}$ ；$\overline{A_1P_3}=12$ ；$\overline{P_1A_2}=14$ ；$\overline{P_2A_2}=\dfrac{5}{2}$ ；$\overline{P_3A_2}=8$ ；

$\overline{A_2P_{13}}=\dfrac{8\sqrt{10}}{19}$ ；$\overline{A_2P_{14}}=4\sqrt{10}$ ；$\overline{A_2P_{15}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{17}$ ；$\overline{P_{13}A_3}=\dfrac{11\sqrt{10}}{19}$ ；$\overline{P_{14}A_3}=5\sqrt{10}$ ；$\overline{P_{15}A_3}=\dfrac{13\sqrt{10}}{17}$ ；

$\overline{A_3P_{22}}=13\sqrt{26}$ ；$\overline{A_3P_{23}}=\dfrac{5\sqrt{26}}{3}$ ；$\overline{A_3P_{24}}=3\sqrt{26}$ ；$\overline{P_{22}A_4}=12\sqrt{26}$ ；$\overline{P_{23}A_4}=\dfrac{8\sqrt{26}}{3}$ ；$\overline{P_{24}A_4}=2\sqrt{26}$ ；

$\overline{A_4P_7}=14$ ；$\overline{A_4P_8}=4$ ；$\overline{A_4P_9}=11$ ；$\overline{P_7A_1}=12$ ；$\overline{P_8A_1}=2$ ；$\overline{P_9A_1}=13$ ；

故

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}$$

$$=\frac{10\times\frac{13}{2}\times12\times\frac{8\sqrt{10}}{19}\times4\sqrt{10}\times\frac{4\sqrt{10}}{17}\times13\sqrt{26}\times\frac{5\sqrt{26}}{3}\times3\sqrt{26}\times14\times4\times11}{14\times\frac{5}{2}\times8\times\frac{11\sqrt{10}}{19}\times5\sqrt{10}\times\frac{13\sqrt{10}}{17}\times12\sqrt{26}\times\frac{8\sqrt{26}}{3}\times2\sqrt{26}\times12\times2\times13}=1\text{。}$$

(xi) 若選取的循環路徑為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_1}$，則

計算得 $\overline{A_1P_1}=10$；$\overline{A_1P_2}=\frac{13}{2}$；$\overline{A_1P_3}=12$；$\overline{P_1A_2}=14$；$\overline{P_2A_2}=\frac{5}{2}$；$\overline{P_3A_2}=8$；

$\overline{A_2P_{13}}=\frac{8\sqrt{10}}{19}$；$\overline{A_2P_{14}}=4\sqrt{10}$；$\overline{A_2P_{15}}=\frac{4\sqrt{10}}{17}$；$\overline{P_{13}A_3}=\frac{11\sqrt{10}}{19}$；$\overline{P_{14}A_3}=5\sqrt{10}$；$\overline{P_{15}A_3}=\frac{13\sqrt{10}}{17}$；

$\overline{A_3P_{22}}=13\sqrt{26}$；$\overline{A_3P_{23}}=\frac{5\sqrt{26}}{3}$；$\overline{A_3P_{24}}=3\sqrt{26}$；$\overline{P_{22}A_4}=12\sqrt{26}$；$\overline{P_{23}A_4}=\frac{8\sqrt{26}}{3}$；$\overline{P_{24}A_4}=2\sqrt{26}$；

$\overline{A_4P_{28}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$；$\overline{A_4P_{29}}=\frac{30\sqrt{21}}{17}$；$\overline{A_4P_{30}}=\frac{42\sqrt{21}}{37}$；$\overline{P_{28}A_5}=\frac{\sqrt{21}}{7}$；$\overline{P_{29}A_5}=\frac{13\sqrt{21}}{17}$；$\overline{P_{30}A_5}=\frac{5\sqrt{21}}{37}$；

$\overline{A_5P_{10}}=\frac{5\sqrt{21}}{31}$；$\overline{A_5P_{11}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$；$\overline{A_5P_{12}}=\frac{11\sqrt{21}}{41}$；$\overline{P_{10}A_1}=\frac{36\sqrt{21}}{31}$；$\overline{P_{11}A_1}=\frac{3\sqrt{21}}{2}$；$\overline{P_{12}A_1}=\frac{30\sqrt{21}}{41}$。

故

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{28}}}{\overline{P_{28}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{29}}}{\overline{P_{29}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{30}}}{\overline{P_{30}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}$$

$$=\frac{10\times\frac{13}{2}\times12\times\frac{8\sqrt{10}}{19}\times4\sqrt{10}\times\frac{4\sqrt{10}}{17}\times13\sqrt{26}\times\frac{5\sqrt{26}}{3}\times3\sqrt{26}\times\frac{6\sqrt{21}}{7}\times\frac{30\sqrt{21}}{17}\times\frac{42\sqrt{21}}{37}\times\frac{5\sqrt{21}}{31}\times\frac{\sqrt{21}}{2}\times\frac{11\sqrt{21}}{41}}{14\times\frac{5}{2}\times8\times\frac{11\sqrt{10}}{19}\times5\sqrt{10}\times\frac{13\sqrt{10}}{17}\times12\sqrt{26}\times\frac{8\sqrt{26}}{3}\times2\sqrt{26}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{13\sqrt{21}}{17}\times\frac{5\sqrt{21}}{37}\times\frac{36\sqrt{21}}{31}\times\frac{3\sqrt{21}}{2}\times\frac{30\sqrt{21}}{41}}=1$$

。

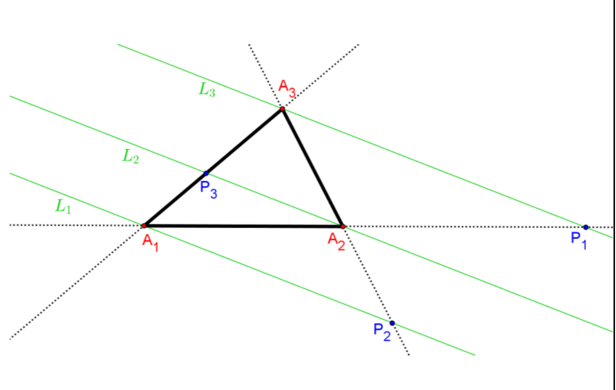
在證明 **Remark 5** 中第(ix)項結果前，先驗證**『平面上西瓦定理的極端情形』**，如下引理五。

引理五：(平面上西瓦定理的極端情形)

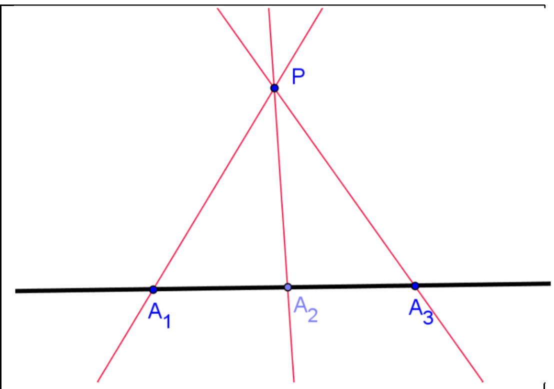
(1) 已知平面上一個三角形 $\Delta A_1A_2A_3$，過 A_1、A_2 與 A_3 分別作直線 L_1、L_2 與 L_3 使得 $L_1 // L_2 // L_3$，且 L_1 與直線 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 交於異於線段 $\overline{A_2A_3}$ 兩端點之一點 P_2，L_2 與直線 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 交於異於線段 $\overline{A_3A_1}$ 兩端點之一點 P_3，L_3 與直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 交於異於線段 $\overline{A_1A_2}$ 兩端點之一點 P_1，則 $\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_1}}=1$。

(2) 假設平面上相異三點 A_1、A_2 與 A_3 共線，P 為不落在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 上之一定點，滿足 $\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 分別與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$、$\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 相交於 $P_1(=A_1)$、$P_2(=A_2)$ 與 $P_3(=A_3)$ 三點，則 $\dfrac{\overline{A_2P_1}}{\overline{P_1A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_2}}{\overline{P_2A_1}}\times\dfrac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}=1$。

證明：



圖（二十八之一）



圖（二十八之二）

(1) 如上頁圖(二十八之一)，$\because L_1 // L_2 // L_3$,

$$\therefore \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_1}}=\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_3P_3}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_1A_3}}\times\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2P_2}}=\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_3P_3}}\times\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2P_2}}=\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_3P_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{A_1P_3}}=1,$$

得證原命題。

（附註：該定理其實可視為平面上西瓦定理的極端情形，過三角形三頂點的三平行線 L_1、L_2 與 L_3 看似不共交點，但我們其實可以將其交點視為在無窮遠處。）

(2) 如上頁圖(二十八之二)，

$$\frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{P_1A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{P_2A_1}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}=\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_1A_3}}\times\frac{\overline{A_3A_2}}{\overline{A_2A_1}}\times\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_3A_2}}=1$$

，原命題明顯成立。

Q.E.D.

接下來，我將利用引理一、引理二與引理五證明 **Remark 5** 中第(ix)項結果是正確的，其結果如下之『定理十』。

定理十：(空間中四角錐的西瓦共點定理之一)

已知空間中一四角錐 $A_5-A_1A_2A_3A_4$，P 點為空間中之定點使得，

$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與三平面 $E_{A_3A_4P}$、$E_{A_3A_5P}$、$E_{A_4A_5P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_2}$ 兩端點之 P_1 、P_2 、P_3 三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與三平面 $E_{A_2A_4P}$、$E_{A_2A_5P}$、$E_{A_4A_5P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_3}$ 兩端點之 P_4 、P_5 、P_6 三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與三平面 $E_{A_2A_3P}$、$E_{A_2A_5P}$、$E_{A_3A_5P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_4}$ 兩端點之 P_7 、P_8 、P_9 三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_5}$ 與三平面 $E_{A_2A_3P}$、$E_{A_2A_4P}$、$E_{A_3A_4P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_5}$ 兩端點之 P_{10} 、P_{11} 、P_{12} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與三平面 $E_{A_4A_5P}$、$E_{A_4A_1P}$、$E_{A_5A_1P}$ 分別交於異於 $\overline{A_2A_3}$ 兩端點之 P_{13} 、P_{14} 、P_{15} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 與三平面 $E_{A_3A_5P}$、$E_{A_3A_1P}$、$E_{A_5A_1P}$ 分別交於異於 $\overline{A_2A_4}$ 兩端點之 P_{16} 、P_{17} 、P_{18} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 與三平面 $E_{A_3A_4P}$、$E_{A_3A_1P}$、$E_{A_4A_1P}$ 分別交於異於 $\overline{A_2A_5}$ 兩端點之 P_{19} 、P_{20} 、P_{21} 三點，

$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與三平面 $E_{A_5A_1P}$、$E_{A_5A_2P}$、$E_{A_1A_2P}$ 分別交於異於 $\overline{A_3A_4}$ 兩端點之 P_{22} 、P_{23} 、P_{24} 三點，

$\overleftrightarrow{A_3A_5}$ 與三平面 $E_{A_4A_1P}$、$E_{A_4A_2P}$、$E_{A_1A_2P}$ 分別交於異於 $\overline{A_3A_5}$ 兩端點之 P_{25} 、P_{26} 、P_{27} 三點，

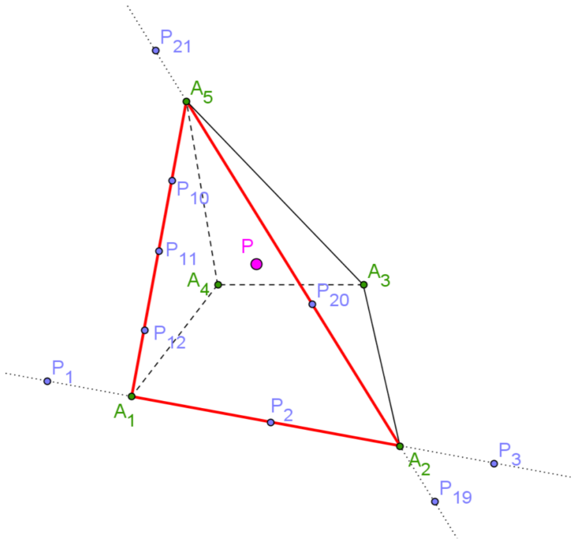
$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與三平面 $E_{A_1A_2P}$、$E_{A_1A_3P}$、$E_{A_2A_3P}$ 分別交於異於 $\overline{A_4A_5}$ 兩端點之 P_{28} 、P_{29} 、P_{30} 三點，

(註：上述的點 P_j's 與 **Remark 5** 中的一致)，考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_1}$，

如圖(二十九)，試證明：

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}} \times \frac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}} \times \frac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}} \times \frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} \times \frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}} \times \frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}} = 1 \cdots\cdots (*)$$ 。

證明：



圖（二十九）

(i) 很明顯地，由命題的假設推知，P 點不會落在多面體的頂點、稜線與面上，否則直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$（$1\le i<j\le n$）與平面 $E_{A_kA_lP}$（$1\le k<l\le n, k\notin\{i,j\}, l\notin\{i,j\}$）的交點 P_j's 會與多面體的頂點重合，與命題假設不合。

(ii) 首先證明 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 與 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 不可能同時成立。(以反證法證明之)

假設 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 與 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 同時成立，

$\Rightarrow \overleftrightarrow{A_3P}\,//\,E_{A_1A_2A_5}$ 且 $\overleftrightarrow{A_4P}\,//\,E_{A_1A_2A_5}$

$\Rightarrow$ 過 A_3, A_4 與 P 三點之平面 $E_{A_3A_4P}$ 會平行於平面 $E_{A_1A_2A_5}$

$\Rightarrow E_{A_3A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$

$\Rightarrow E_{A_3A_4P}\cap\overleftrightarrow{A_1A_2}=E_{A_3A_4P}\cap\overleftrightarrow{A_2A_5}=E_{A_3A_4P}\cap\overleftrightarrow{A_5A_1}=\phi$，此與命題假設矛盾，因為

$E_{A_3A_4P}\cap\overleftrightarrow{A_1A_2}=P_1$，$E_{A_3A_4P}\cap\overleftrightarrow{A_2A_5}=P_{19}$，$E_{A_3A_4P}\cap\overleftrightarrow{A_5A_1}=P_{12}$

$\Rightarrow$ 故得證 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 與 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 不可能同時成立

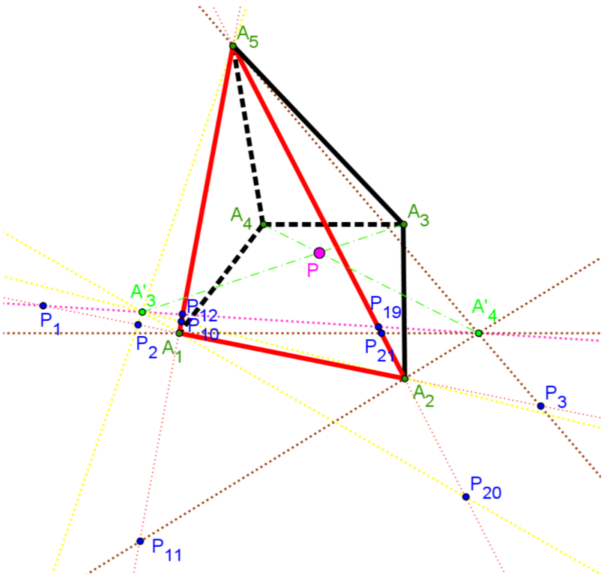
$\Rightarrow$ 亦即 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}\ne\phi$ 或 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}\ne\phi$。

(iii) 承(ii)，分三種情形討論如下：

(1) 當 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}\ne\phi$ 且 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}\ne\phi$ 時，

接下來，將欲求證之式子(*)的線段比值分兩大類處理如下。

第一類：利用引理一（孟氏定理）處理等式(*)中一部份的線段比值。



圖(三十)

如上圖(三十)，假設$\overleftrightarrow{A_3P}$與通過$A_1,A_2$與$A_5$三點之平面$E_{A_1A_2A_5}$相交於$A_3'$點，且$\overleftrightarrow{A_4P}$與通過$A_1,A_2$與$A_5$ 三點之平面$E_{A_1A_2A_5}$相交於A_4'點，則A_3,A_4,P,A_3'與A_4'五點共平面$E_{A_3A_4P}$，且

$(E_{A_3'A_4'P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=(E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=P_1$，

$(E_{A_3'A_4'P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$)=(E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$)=P_{19}$，

$(E_{A_3'A_4'P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$)=(E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$)=P_{12}$，

推知平面$E_{A_3A_4P}$與平面$E_{A_1A_2A_5}$的交線為$\overleftrightarrow{A_3'A_4'}$，且直線$\overleftrightarrow{A_3'A_4'}$分別與$\Delta A_1A_2A_5$之三邊所在的直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$交於$P_1$、$P_{19}$與$P_{12}$三點，故由引理一（孟氏定理）知$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1\cdots\cdots①$。

第二類：利用引理二(西瓦定理)處理等式(*)中另一部份的線段比值。

假設$\overleftrightarrow{A_3P}$與通過$A_1,A_2$與$A_5$三點之平面$E_{A_1A_2A_5}$相交於$A_3'$點，且$\overleftrightarrow{A_4P}$與通過$A_1,A_2$與$A_5$ 三點之平面$E_{A_1A_2A_5}$相交於A_4'點，則

(a) 先考慮A_3'

$(E_{A_5A_3'P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=(E_{A_5A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=P_2$，

$(E_{A_1A_3'P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$)=(E_{A_1A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$)=P_{20}$，

$(E_{A_2A_3'P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$)=(E_{A_2A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$)=P_{10}$，

亦即 $\overleftrightarrow{A_5A_3'},\overleftrightarrow{A_1A_3'}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3'}$ 共交點 A_3' 且分別與 $\Delta A_1A_2A_5$ 之三邊所在的直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 交於 P_2 、P_{20} 與 P_{10} 三點，故由引理二（西瓦定理）知 $\dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}=1\cdots\cdots$②。

(b) 次考慮 A_4'

$(E_{A_5A_4'P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=(E_{A_5A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=P_3$，

$(E_{A_1A_4'P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$)=(E_{A_1A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$)=P_{21}$，

$(E_{A_2A_4'P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$)=(E_{A_2A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$)=P_{11}$，

亦即 $\overleftrightarrow{A_5A_4'},\overleftrightarrow{A_1A_4'}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4'}$ 共交點 A_4' 且分別與 $\Delta A_1A_2A_5$ 之三邊所在的直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 交於 P_3 、P_{21} 與 P_{11} 三點，故由引理二（西瓦定理）知 $\dfrac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}=1\cdots\cdots$③。

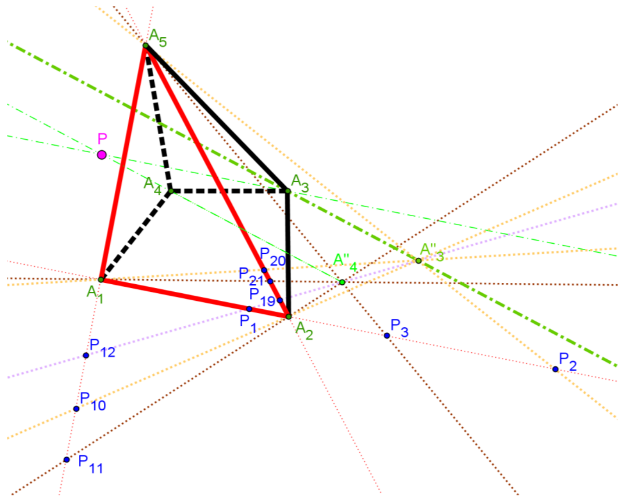
由①×②×③即得 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\dfrac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}}\times\dfrac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}}\times\dfrac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\dfrac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\dfrac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1$，

故得證原命題。

(2) 當 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 且 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}\neq\phi$ 時，

接下來，將欲求證之式子(*)的線段比值分兩大類處理如下。

第一類：利用引理一（孟氏定理）處理等式(*)中一部份的線段比值。



圖（三十一）

(a) 如上頁圖(三十一)，設$\overleftrightarrow{A_4P}$與通過$A_1, A_2$與$A_5$ 三點之平面$E_{A_1A_2A_5}$相交於A_4''點，連接$\overleftrightarrow{A_4A_4''}$。

(b) 過A_3作平行$\overleftrightarrow{A_4A_4''}$之直線$L_1$，因為$\overleftrightarrow{A_4A_4''}$與平面$E_{A_1A_2A_5}$交於一點$A_4''$，所以$L_1$與平面$E_{A_1A_2A_5}$亦必交於另一點，令此點為$A_3''$。

(c) $\because A_4, A_4''$與P三點共線，$\therefore A_4'' \in E_{A_3A_4P}$，

又$\because \overleftrightarrow{A_3A_3''} // \overleftrightarrow{A_4A_4''}$，$\therefore A_3'' \in E_{A_3A_4P}$，

亦即A_3, A_4, P, A_3''與A_4''五點共平面$E_{A_3A_4P}$。

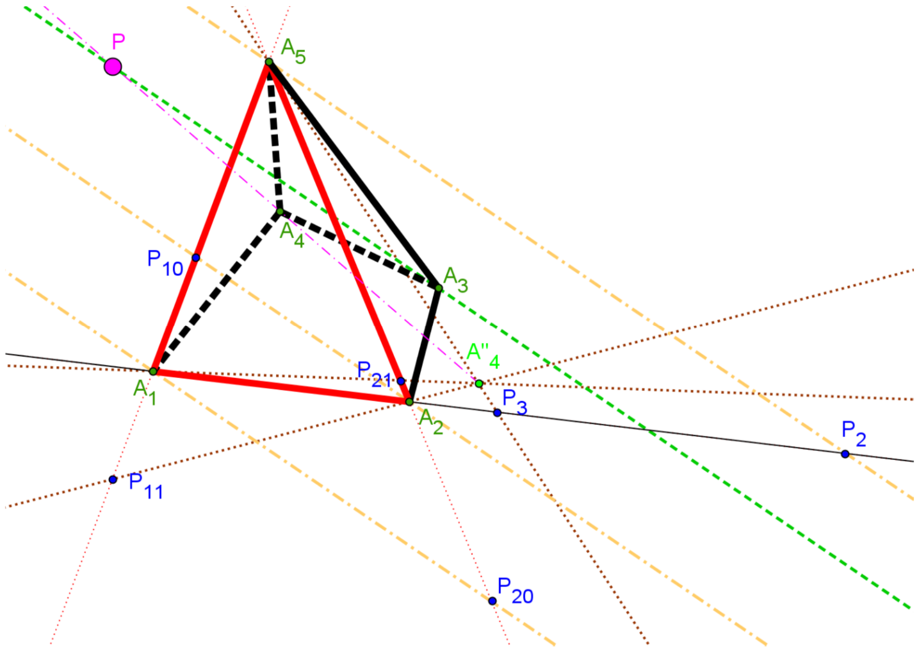
(d) $(E_{A_3''A_4''P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$) = (E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$) = P_1$，

$(E_{A_3''A_4''P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$) = (E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$) = P_{19}$，

$(E_{A_3''A_4''P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$) = (E_{A_3A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$) = P_{12}$，

亦即平面$E_{A_3A_4P}$與平面$E_{A_1A_2A_3}$的交線為$\overleftrightarrow{A_3''A_4''}$，且直線$A_3''A_4''$分別與$\Delta A_1A_2A_5$之三邊所在的直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 交於P_1、P_{19}與P_{12}三點，故由引理一（孟氏定理）知$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}} \times \dfrac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}} = 1 \cdots\cdots ④$。

第二類：利用引理二（西瓦定理）處理等式(*)中另一部份的線段比值。



圖(三十二)

(A) 先考慮 A_3　(參考上圖(三十二))

(a) $\because \overleftrightarrow{A_3P} \cap E_{A_1A_2A_5} = \phi, \therefore \overleftrightarrow{A_3P} // E_{A_1A_2A_5}$ 。

(b) 由已知知平面$E_{A_5A_3P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 相交於一點 P_2，所以 $E_{A_5A_3P}$ 不平行 $E_{A_1A_2A_5}$ 。

$\Rightarrow E_{A_5A_3P}$ 與 $E_{A_1A_2A_5}$ 交於一直線 L_1，

$\Rightarrow$ 直線 L_1 與直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 交於點 P_2，且 L_1 過點 A_5，

$\Rightarrow L_1$ 即直線 $\overleftrightarrow{A_5P_2}$ ，

又因為 $\overleftrightarrow{A_3P} // E_{A_1A_2A_5}$ 且 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 在平面 $E_{A_5A_3P}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{A_3P} // L_1$ 。

(c) 同理，

由已知知平面$E_{A_1A_3P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 相交於一點 P_{20}，所以 $E_{A_1A_3P}$ 不平行 $E_{A_1A_2A_5}$ 。

$\Rightarrow E_{A_1A_3P}$ 與 $E_{A_1A_2A_5}$ 交於一直線 L_2，

$\Rightarrow$ 直線 L_2 與直線 $\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 交於點 P_{20} ，且 L_2 過點 A_1，

$\Rightarrow L_2$ 即直線 $\overleftrightarrow{A_1P_{20}}$ ，

又因為 $\overleftrightarrow{A_3P} // E_{A_1A_2A_5}$ 且 $\overleftrightarrow{A_3P}$ 在平面 $E_{A_1A_3P}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{A_3P} // L_2$ 。

(d) 同理，

由已知知平面$E_{A_2A_3P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$相交於一點$P_{10}$，所以$E_{A_2A_3P}$不平行$E_{A_1A_2A_5}$。

$\Rightarrow E_{A_2A_3P}$與$E_{A_1A_2A_5}$交於一直線L_3，

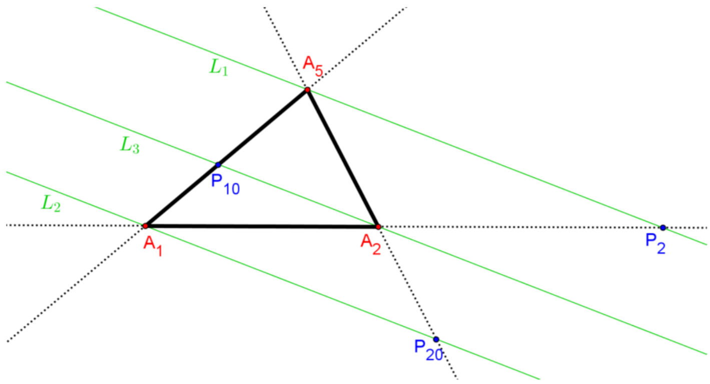
$\Rightarrow$直線L_3與直線$\overleftrightarrow{A_5A_1}$交於點$P_{10}$，且$L_3$過點$A_2$，

$\Rightarrow L_3$即直線$\overleftrightarrow{A_2P_{10}}$，

又因為$\overleftrightarrow{A_3P} // E_{A_1A_2A_5}$且$\overleftrightarrow{A_3P}$在平面$E_{A_2A_3P}$上，所以$\overleftrightarrow{A_3P} // L_3$。

(e) 由上述(b),(c)與(d)知，$\overleftrightarrow{A_3P} // L_1 // L_2 // L_3 \Rightarrow L_1 // L_2 // L_3$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{A_5P_2} // \overleftrightarrow{A_1P_{20}} // \overleftrightarrow{A_2P_{10}}$，(如下圖(三十三))



圖（三十三）

利用引理五(平面上西瓦定理的極端情形)知，

$$\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}} \times \frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} = 1 \cdots\cdots ⑤。$$

(B) 次考慮A_4''

$(E_{A_5A_4''P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$) = (E_{A_5A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$) = P_3$，

$(E_{A_1A_4''P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$) = (E_{A_1A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_5}$之交點$) = P_{21}$，

$(E_{A_2A_4''P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$) = (E_{A_2A_4P}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$之交點$) = P_{11}$，

亦即$\overleftrightarrow{A_5A_4''}, \overleftrightarrow{A_1A_4''}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4''}$共交點$A_4''$且分別與$\Delta A_1A_2A_5$之三邊所在的直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$與$\overleftrightarrow{A_5A_1}$交於$P_3$、$P_{21}$與$P_{11}$三點，故由引理二（西瓦定理）知$\dfrac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}} \times \dfrac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}} = 1 \cdots\cdots ⑥$。

由④×⑤×⑥即得 $\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1$，

故得證原命題。

(3) 當 $\overleftrightarrow{A_3P}\cap E_{A_1A_2A_5}\neq\phi$ 與 $\overleftrightarrow{A_4P}\cap E_{A_1A_2A_5}=\phi$ 時，

同上述(iii)之(2)的論證方式可得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1,$$

故得證原命題。

Q.E.D.

我試著改變上述『定理十』的循環路徑，發現不一樣的循環路徑，只要最後可以回到起始點，則結論依然成立，詳述如下之『定理十一』。

定理十一：（空間中四角錐的西瓦共點定理之二）

承上述定理十，

(1)若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_1}$，試證明：

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{28}}}{\overline{P_{28}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{29}}}{\overline{P_{29}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{30}}}{\overline{P_{30}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1\ 。$$

（此即『問題九』之一般化情形之證明。）

(2) 若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_1}$，試證明：

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1\ 。$$

(3) 若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_1}$，試證明：

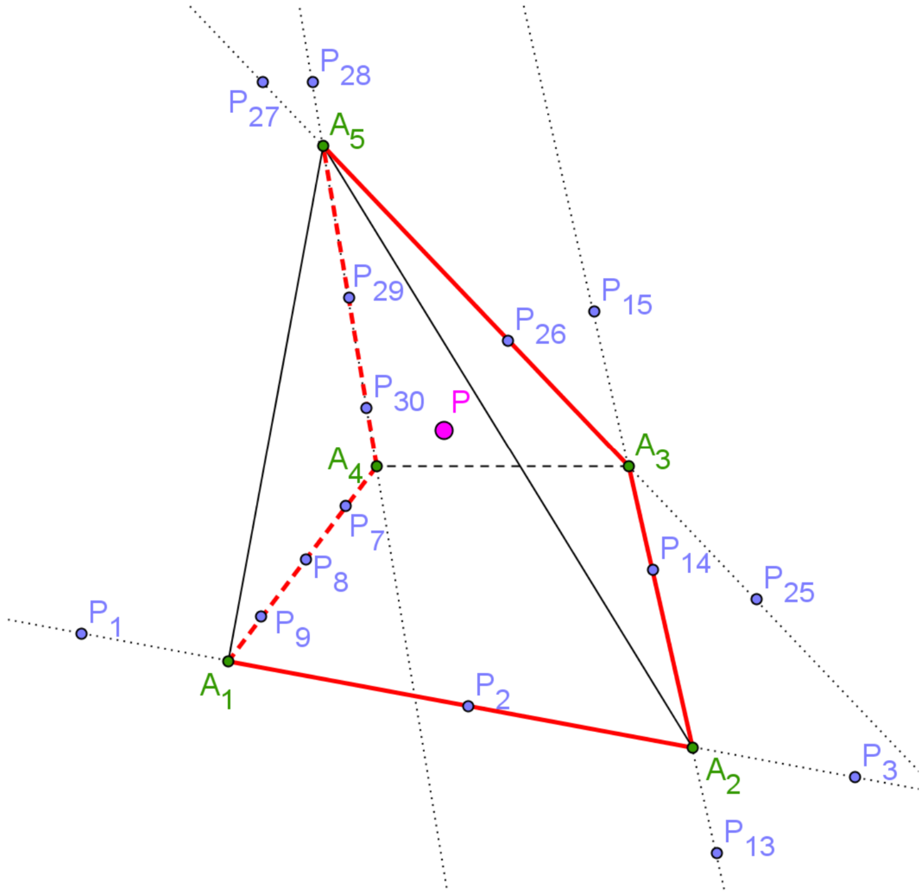
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1\ 。$$

(4) 若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_1}$，試證明：

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{28}}}{\overline{P_{28}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{29}}}{\overline{P_{29}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{30}}}{\overline{P_{30}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1$$ 。

證明：

(1)如下圖（三十四），



圖(三十四)

(i) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_1}$，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{16}}}{\overline{P_{16}A_4}}\times\frac{\overline{A_2P_{17}}}{\overline{P_{17}A_4}}\times\frac{\overline{A_2P_{18}}}{\overline{P_{18}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1\cdots\cdots①$$

(ii) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_2}$，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{16}}}{\overline{P_{16}A_2}}\times\frac{\overline{A_4P_{17}}}{\overline{P_{17}A_2}}\times\frac{\overline{A_4P_{18}}}{\overline{P_{18}A_2}}=1\cdots\cdots②$$

(iii) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_3A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_4}\to\overleftrightarrow{A_4A_3}$，利用『定理十』之結果知，

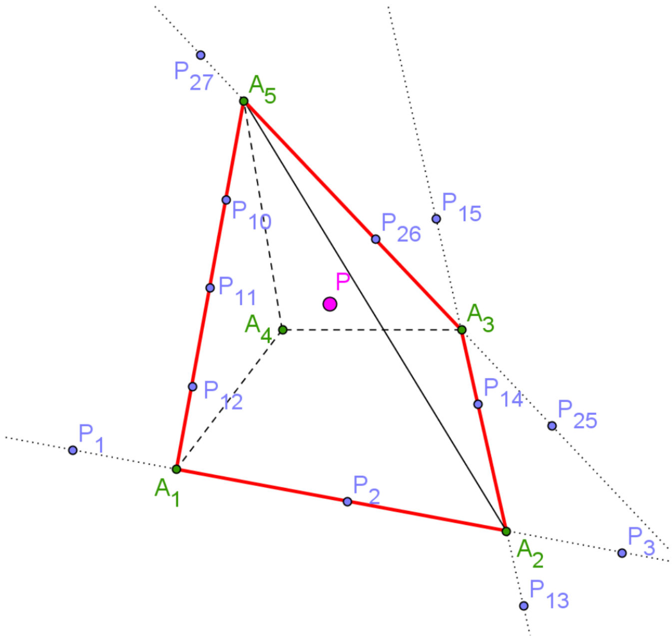
$$\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{28}}}{\overline{P_{28}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{29}}}{\overline{P_{29}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{30}}}{\overline{P_{30}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{22}}}{\overline{P_{22}A_3}}\times\frac{\overline{A_4P_{23}}}{\overline{P_{23}A_3}}\times\frac{\overline{A_4P_{24}}}{\overline{P_{24}A_3}}=1\cdots\cdots③$$

(iv) 由①×②×③即得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{28}}}{\overline{P_{28}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{29}}}{\overline{P_{29}A_4}}\times\frac{\overline{A_5P_{30}}}{\overline{P_{30}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1$$ ，

得證原題。

(2) 如下圖（三十五），



圖（三十五）

(i) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_1}$，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}}\times\frac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1\cdots\cdots①$$

(ii) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_5}\to\overleftrightarrow{A_5A_2}$，利用『定理十』之結果知，

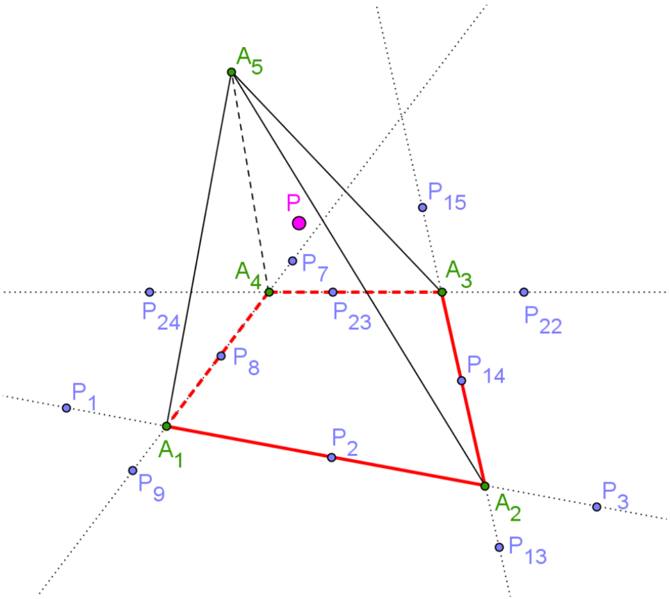
$$\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{19}}}{\overline{P_{19}A_2}}\times\frac{\overline{A_5P_{20}}}{\overline{P_{20}A_2}}\times\frac{\overline{A_5P_{21}}}{\overline{P_{21}A_2}}=1\cdots\cdots②$$

(iii) 由①×②即得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}}\times\frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1$$ ， ，

得證原題。

(3) 如下圖（三十六），



圖(三十六)

(i) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_1}$，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{16}}}{\overline{P_{16}A_4}}\times\frac{\overline{A_2P_{17}}}{\overline{P_{17}A_4}}\times\frac{\overline{A_2P_{18}}}{\overline{P_{18}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1\cdots\cdots①$$

(ii) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_2}$，利用『定理十』之結果知，

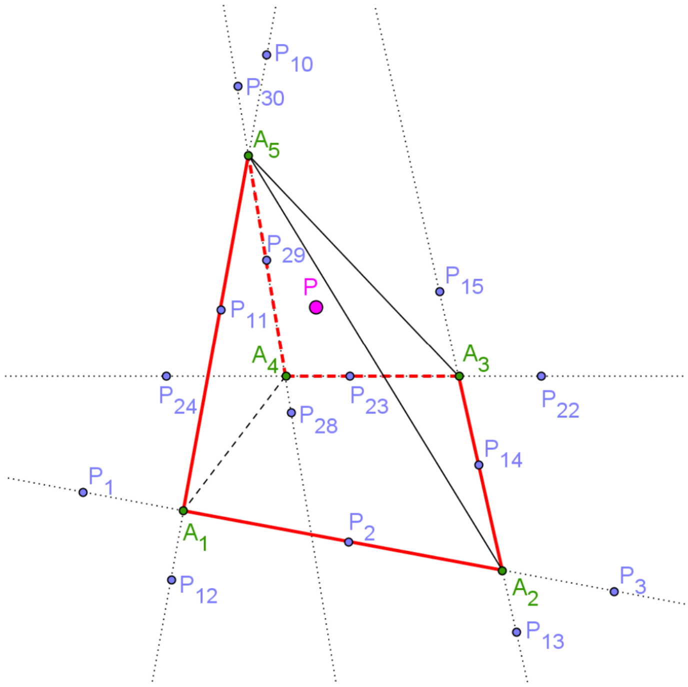
$$\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{16}}}{\overline{P_{16}A_2}}\times\frac{\overline{A_4P_{17}}}{\overline{P_{17}A_2}}\times\frac{\overline{A_4P_{18}}}{\overline{P_{18}A_2}}=1\cdots\cdots②$$

(iii) 由①×②即得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}=1，，$$

得證原題。

(4) 如下圖（三十七），



圖(三十七)

(i) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_1}$ ，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_4}}{\overline{P_4A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_5}}{\overline{P_5A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_6}}{\overline{P_6A_1}}=1\cdots\cdots①$$

(ii) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_3A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_1} \to \overleftrightarrow{A_1A_3}$ ，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}}\times\frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}}\times\frac{\overline{A_1P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_1P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_1P_6}}{\overline{P_6A_3}}=1\cdots\cdots②$$

(iii) 考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_4A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_1} \to \overleftrightarrow{A_1A_4}$ ，利用『定理十』之結果知，

$$\frac{\overline{A_4P_{28}}}{\overline{P_{28}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{29}}}{\overline{P_{29}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{30}}}{\overline{P_{30}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}\times\frac{\overline{A_1P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_1P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_1P_9}}{\overline{P_9A_4}}=1\cdots\cdots③$$

(iv) 由①×②×③即得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{28}}}{\overline{P_{28}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{29}}}{\overline{P_{29}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{30}}}{\overline{P_{30}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}}=1$$ ，

得證原題。

Q.E.D.

定義一：

已知空間中一 n 頂點多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ ，選取 Γ 中 m 個頂點

$A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}, \cdots, A_{k_{m-1}}, A_{k_m}$（頂點可允許重複選取）構成一通過多面體的 m-1 條不重複稜線（頂點可允許重複經過）的循環路徑 $\overleftrightarrow{A_{k_1}A_{k_2}} \to \overleftrightarrow{A_{k_2}A_{k_3}} \to \overleftrightarrow{A_{k_3}A_{k_4}} \to \cdots \to \overleftrightarrow{A_{k_{m-1}}A_{k_m}}$。為了方便起見，將起始點與終點重合（亦即 $A_{k_m} = A_{k_1}$）的循環路徑稱為『閉循環路徑』。

仿照上述『定理十』與『定理十一』之證明，可以推得空間中 n 頂點多面體的『西瓦共點定理』，詳述如下『定理十二』。

定理十二：（空間中 n 頂點多面體的西瓦共點定理）

已知空間中一 n 頂點多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$，$P$ 為空間中一定點滿足下列條件：

(α) 給定 $1 \le i < j \le n$，對於 $1 \le k < l \le n, k \notin \{i, j\}, l \notin \{i, j\}$，過 A_k、A_l 與 P 三點之平面 $E_{A_kA_lP}$ 分別與直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 相交於異於線段 $\overline{A_iA_j}$ 兩端點的一點，所以直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 上共有 C_2^{n-2} 個交點（不必然全部相異），即 $P_{r_{ij}+1}, P_{r_{ij}+2}, P_{r_{ij}+3}, \cdots, P_{r_{ij}+C_2^{n-2}}$，其中 r_{ij} 為直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 之序位數（詳見 Remark 5 中所述）。

(β) 多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 中任三頂點不共線，亦即過 Γ 的任三個頂點 A_i、A_j 與 A_k 均可以決定唯一的平面 $E_{A_iA_jA_k}$。

若取定一閉循環路徑通過多面體的 m 條不重複稜線（頂點可允許重複經過）如下，

$\overleftrightarrow{A_{k_1}A_{k_2}} \to \overleftrightarrow{A_{k_2}A_{k_3}} \to \overleftrightarrow{A_{k_3}A_{k_4}} \to \cdots \to \overleftrightarrow{A_{k_{m-1}}A_{k_m}} \to \overleftrightarrow{A_{k_m}A_{k_1}}$，則

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+1}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+1}A_{k_{i+1}}}} \times \frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+2}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+2}A_{k_{i+1}}}} \times \cdots \times \frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+C_2^{n-2}}A_{k_{i+1}}}}\right) = 1 \text{（視 } A_{k_{m+1}} = A_{k_1}\text{），}$$

亦即 $$\prod_{i=1}^{m}\prod_{t=1}^{C_2^{n-2}} \frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+t}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+t}A_{k_{i+1}}}} = 1 \cdots\cdots (☆)。$$

證明：

(I) 先證明閉循環路徑為三角形的情形，證法類似『定理十』，詳述如下：

首先，n 頂點多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ 必存在不共線的三頂點，在不一般性之下，假設 A_1 、A_2 與 A_3 三點不共線，先考慮閉循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_1}$，則

(i) 設過 A_1 、A_2 與 A_3 三點之平面為 $E_{A_1A_2A_3}$ 。

(ii) 先驗證至多有一個 $i \in \{4,5,\cdots,n\}$ 使得 $\overleftrightarrow{A_iP} \cap E_{A_1A_2A_3} = \phi$ 。（以反證法證明之）

假設存在 $i_1, i_2 \in \{4,5,\cdots,n\}, i_1 < i_2$ 使得 $\overleftrightarrow{A_{i_1}P} \cap E_{A_1A_2A_3} = \phi$ 與 $\overleftrightarrow{A_{i_2}P} \cap E_{A_1A_2A_3} = \phi$ 同時成立，

$\Rightarrow \overleftrightarrow{A_{i_1}P} // E_{A_1A_2A_3}$ 且 $\overleftrightarrow{A_{i_2}P} // E_{A_1A_2A_3}$

$\Rightarrow$ 過 A_{i_1}, A_{i_2} 與 P 三點之平面 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$ 會平行於平面 $E_{A_1A_2A_3}$

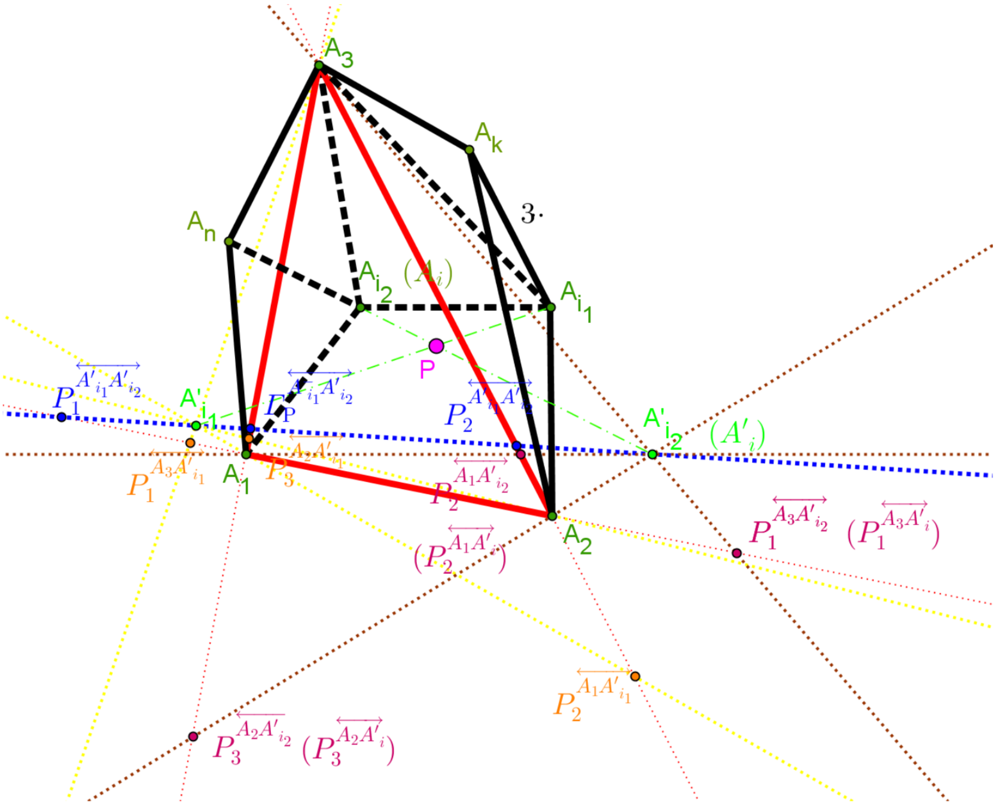
$\Rightarrow E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap E_{A_1A_2A_3} = \phi$

$\Rightarrow E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap \overleftrightarrow{A_1A_2} = E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap \overleftrightarrow{A_2A_3} = E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap \overleftrightarrow{A_3A_1} = \phi$ ，此與命題假設矛盾，因為 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap \overleftrightarrow{A_1A_2} = \{\text{一點}\}, E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap \overleftrightarrow{A_2A_3} = \{\text{一點}\}, E_{A_{i_1}A_{i_2}P} \cap \overleftrightarrow{A_3A_1} = \{\text{一點}\}$

故得證至多有一個 $i \in \{4,5,\cdots,n\}$ 使得 $\overleftrightarrow{A_iP} \cap E_{A_1A_2A_3} = \phi$ 。

(iii) 承(ii)，分兩種情形討論如下：

(1) 當 $\forall i \in \{4,5,\cdots,n\}$ ，$\overleftrightarrow{A_iP} \cap E_{A_1A_2A_3} \neq \phi$ 時，如下圖（三十八），



圖(三十八)

接下來，將欲求證之式子(☆)的線段比值分兩大類處理如下。

第一類：利用引理一（孟氏定理）處理等式(☆)中一部份的線段比值。

對於每一個 $i\in\{4,5,\cdots,n\}$，設 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 與通過 A_1,A_2 與 A_3 三點之平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 相交於 A_i' 點。

取定 $i_1,i_2\in\{4,5,\cdots,n\},i_1<i_2$，仿定理十的證明過程(iii)之(1)的第一類知，

$A_{i_1},A_{i_2},P,A_{i_1}'$ 與 A_{i_2}' 五點共平面 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$，且

$(E_{A_{i_1}'A_{i_2}'P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=(E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)\xrightarrow{\text{定義成}}P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$，

$(E_{A_{i_1}'A_{i_2}'P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$之交點$)=(E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$之交點$)\xrightarrow{\text{定義成}}P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$，

$(E_{A_{i_1}'A_{i_2}'P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_1}$之交點$)=(E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_1}$之交點$)\xrightarrow{\text{定義成}}P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$，

推知平面 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$ 與平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 的交線為 $\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}$，且直線 $\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}$ 會分別與 $\Delta A_1A_2A_3$ 三邊所在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 相交於 $P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$、$P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$ 與 $P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$ 三點，其中 $P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$ 即為平面 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 之交點，$P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$ 即為平面 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 之交點，$P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}$ 即為平面 $E_{A_{i_1}A_{i_2}P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 之交點，故由引理一（孟氏定理）知 $\dfrac{\overline{A_1P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}}}{\overline{P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}}}{\overline{P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}}}{\overline{P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_1}'A_{i_2}'}}A_1}}=1\cdots\cdots①$

，共有 C_2^{n-3} 個形如①式的等式。

第二類：利用引理二（西瓦定理）處理等式(☆)中另一部份的線段比值。

取定 $i\in\{4,5,\cdots,n\}$，承上第一類所述，已知 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 與通過 A_1,A_2 與 A_3 三點之平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 相交於 A_i' 點，

仿定理十的證明過程(iii)之(1)的第二類知，

$$(E_{A_3A_i'P}\text{與}\overleftrightarrow{A_1A_2}\text{之交點})=(E_{A_3A_iP}\text{與}\overleftrightarrow{A_1A_2}\text{之交點})\xrightarrow{\text{定義成}}P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i'}}\text{，}$$

$$(E_{A_1A_i'P}\text{與}\overleftrightarrow{A_2A_3}\text{之交點})=(E_{A_1A_iP}\text{與}\overleftrightarrow{A_2A_3}\text{之交點})\xrightarrow{\text{定義成}}P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i'}}\text{，}$$

$$(E_{A_2A_i'P}\text{與}\overleftrightarrow{A_3A_1}\text{之交點})=(E_{A_2A_iP}\text{與}\overleftrightarrow{A_3A_1}\text{之交點})\xrightarrow{\text{定義成}}P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i'}}\text{，}$$

亦即 $\overleftrightarrow{A_3A_i'}$、$\overleftrightarrow{A_1A_i'}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_i'}$ 共交點 A_i' 且分別與 $\Delta A_1A_2A_3$ 三邊所在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 相交於 $P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i'}}$、$P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i'}}$ 與 $P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i'}}$，其中 $P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i'}}$ 即為平面 $E_{A_3A_iP}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 之交點，$P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i'}}$ 即為平面 $E_{A_1A_iP}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 之交點，$P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i'}}$ 即為平面 $E_{A_2A_iP}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 之交點，故由引理二（西瓦定理）知

$$\frac{\overline{A_1P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i'}}}}{\overline{P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i'}}A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i'}}}}{\overline{P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i'}}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i'}}}}{\overline{P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i'}}A_1}}=1\cdots\cdots②$$

，共有 $(n-3)$ 個形如②式的等式。

將第一類 C_2^{n-3} 個形如①式的等式與第二類 $(n-3)$ 個形如②式的等式

共 C_2^{n-2} 個子等式全部相乘即得等式 (Δ) 如下，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{C_2^{n-2}}A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{C_2^{n-2}+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{C_2^{n-2}+2}A_3}}\times\cdots$$

$$\times\frac{\overline{A_2P_{2C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{2C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_{2C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_3P_{3C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{3C_2^{n-2}}A_1}}=1，$$

故此時原命題成立。

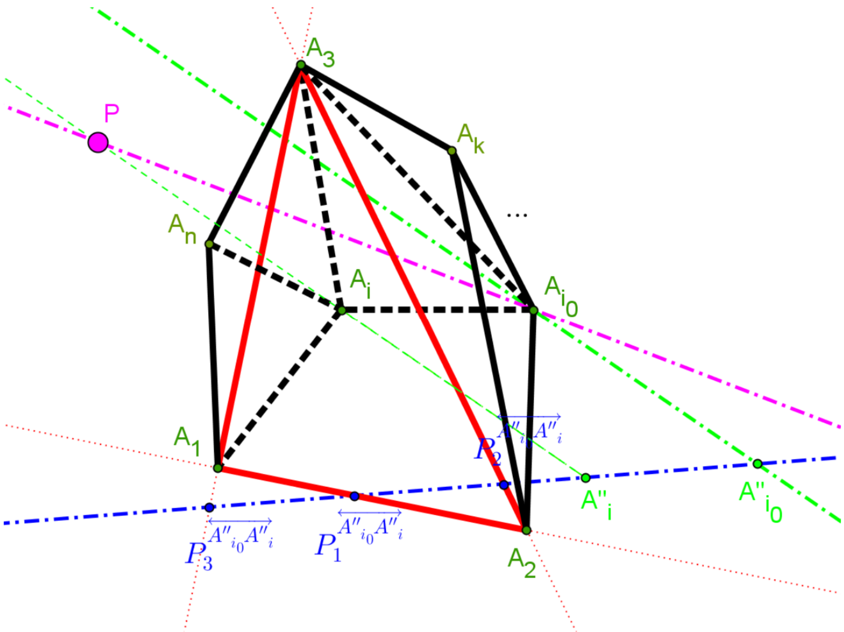
(2) 當只存在一個 $i_0\in\{4,5,\cdots,n\}$ 使得 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P}\cap E_{A_1A_2A_3}=\phi$，且

$\forall i\in\{4,5,\cdots,n\}\setminus\{i_0\}$，

$\overleftrightarrow{A_iP}\cap E_{A_1A_2A_3}\neq\phi$ 時，

接下來，將欲求證之式子$(☆)$的線段比值分兩大類處理如下。

第一類：利用引理一（孟氏定理）處理等式$(☆)$中一部份的線段比值。



圖(三十九)

取定 i_0 與 $i\in\{4,5,\cdots,n\},i\neq i_0$，

(a) 如上圖(三十九),設 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 與通過 A_1, A_2 與 A_3 三點之平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 相交於 A_i'' 點,連接 $\overleftrightarrow{A_iA_i''}$。

(b) 過 A_{i_0} 作平行 $\overleftrightarrow{A_iA_i''}$ 之直線 L_1,因為 $\overleftrightarrow{A_iA_i''}$ 與平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 交於一點 A_i'',所以 L_1 與平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 亦必交於另一點,令此點為 A_{i_0}''。

(c) $\because A_i, A_i''$ 與 P 三點共線,$\therefore A_i'' \in E_{A_{i_0}A_iP}$

又 $\because \overleftrightarrow{A_{i_0}A_{i_0}''} \,//\, \overleftrightarrow{A_iA_i''}$,$\therefore A_{i_0}'' \in E_{A_{i_0}A_iP}$,

亦即 $A_{i_0}, A_i, P, A_{i_0}''$ 與 A_i'' 五點共平面 $E_{A_{i_0}A_iP}$。

(d) $(E_{A_{i_0}''A_i''P}\text{與}\overleftrightarrow{A_1A_2}\text{之交點}) = (E_{A_{i_0}A_iP}\text{與}\overleftrightarrow{A_1A_2}\text{之交點}) \xrightarrow{\text{定義成}} P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}$,

$(E_{A_{i_0}''A_i''P}\text{與}\overleftrightarrow{A_2A_3}\text{之交點}) = (E_{A_{i_0}A_iP}\text{與}\overleftrightarrow{A_2A_3}\text{之交點}) \xrightarrow{\text{定義成}} P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}$,

$(E_{A_{i_0}''A_i''P}\text{與}\overleftrightarrow{A_3A_1}\text{之交點}) = (E_{A_{i_0}A_iP}\text{與}\overleftrightarrow{A_3A_1}\text{之交點}) \xrightarrow{\text{定義成}} P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}$,

亦即平面 $E_{A_{i_0}A_iP}$ 與平面 $E_{A_1A_2A_3}$ 的交線為 $\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}$,且直線 $\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}$ 分別與 $\Delta A_1A_2A_3$ 之三邊所在的直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 交於 $P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}$、$P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}$ 與 $P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}$ 三點,故由引理一(孟氏定理)知

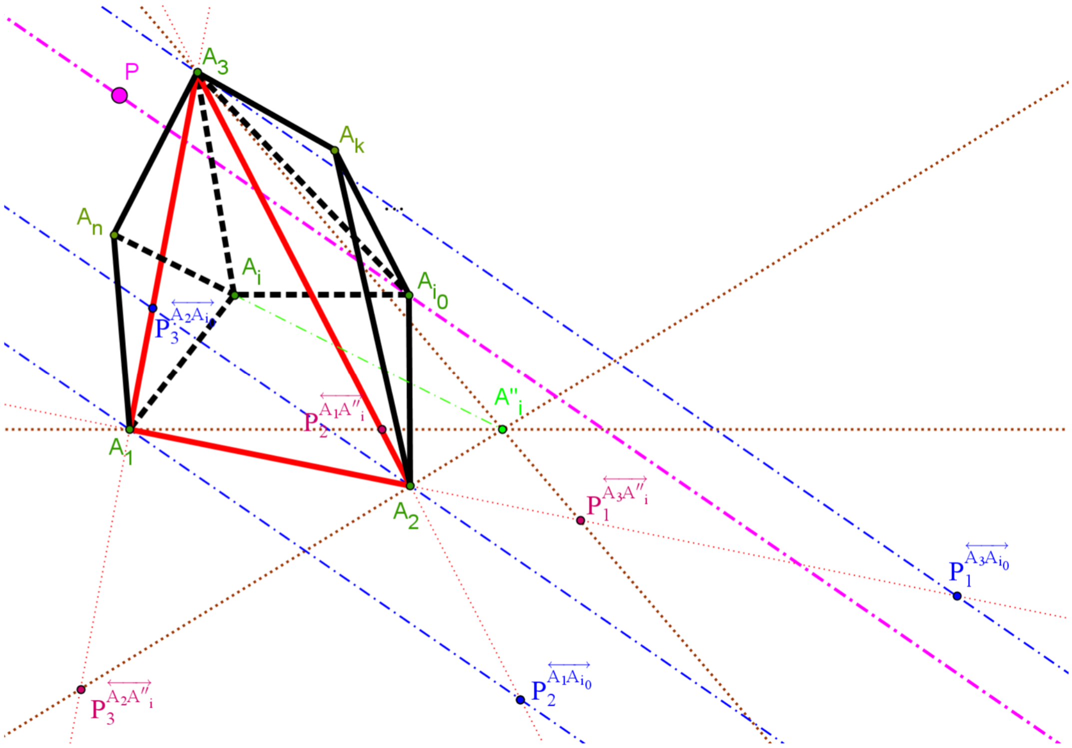
$$\frac{\overline{A_1P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}}}{\overline{P_1^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}}}{\overline{P_2^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}}}{\overline{P_3^{\overleftrightarrow{A_{i_0}''A_i''}}A_1}} = 1 \cdots\cdots ③,$$

共有 $(n-4)$ 個形如③式的等式。

(e) 另外取定 $i_1, i_2 \in \{4,5,\cdots,n\} \setminus \{i_0\}, i_1 < i_2$,仿上述(iii)之(1)的第一類可得 C_2^{n-4} 個形如①式的等式。

(f) 共有 $(n-4)+C_2^{n-4} = \dfrac{2(n-4)}{2} + \dfrac{(n-4)(n-5)}{2} = \dfrac{(n-3)(n-4)}{2} = C_2^{n-3}$ 個等式。

第二類：利用引理二（西瓦定理）處理等式$(☆)$中另一部份的線段比值。



圖(四十)

取定i_0與$i \in \{4,5,\cdots,n\}, i \neq i_0$，

(A) 先考慮A_{i_0}

(a) $\because \overleftrightarrow{A_{i_0}P} \cap E_{A_1A_2A_3} = \phi, \therefore \overleftrightarrow{A_{i_0}P} // E_{A_1A_2A_3}$。

(b) 如上圖（四十），由已知知平面$E_{A_3A_{i_0}P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$相交於一點$P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_{i_0}}}$，

所以$E_{A_3A_{i_0}P}$不平行$E_{A_1A_2A_3}$。

$\Rightarrow E_{A_3A_{i_0}P}$與$E_{A_1A_2A_3}$交於一直線$L_1$，

$\Rightarrow$直線L_1與直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$交於點$P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_{i_0}}}$，且$L_1$過點$A_3$，

$\Rightarrow L_1$即直線$\overleftrightarrow{A_3P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_{i_0}}}}$，

又因為$\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // E_{A_1A_2A_3}$且$\overleftrightarrow{A_{i_0}P}$在平面$E_{A_3A_{i_0}P}$上，所以$\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // L_1$。

(c) 同理，由已知知平面$E_{A_1A_{i_0}P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$相交於一點$P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_{i_0}}}$，所以$E_{A_1A_{i_0}P}$

不平行$E_{A_1A_2A_3}$。

$\Rightarrow E_{A_1A_{i_0}P}$ 與 $E_{A_1A_2A_3}$ 交於一直線 L_2，

$\Rightarrow$ 直線 L_2 與直線 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 交於點 $P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_{i_0}}}$，且 L_2 過點 A_1，

$\Rightarrow L_2$ 即直線 $\overleftrightarrow{A_1P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_{i_0}}}}$，

又因為 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // E_{A_1A_2A_3}$ 且 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P}$ 在平面 $E_{A_1A_{i_0}P}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // L_2$。

(d) 同理，由已知知平面$E_{A_2A_{i_0}P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 相交於一點 $P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_{i_0}}}$，所以 $E_{A_2A_{i_0}P}$ 不平行 $E_{A_1A_2A_3}$。

$\Rightarrow E_{A_2A_{i_0}P}$ 與 $E_{A_1A_2A_3}$ 交於一直線 L_3，

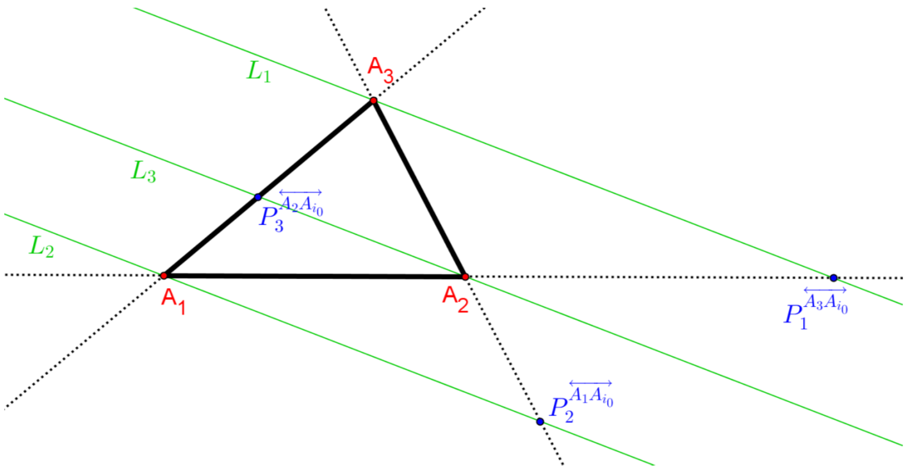
$\Rightarrow$ 直線 L_3 與直線 $\overleftrightarrow{A_3A_1}$ 交於點 $P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_{i_0}}}$，且 L_3 過點 A_2，

$\Rightarrow L_3$ 即直線 $\overleftrightarrow{A_2P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_{i_0}}}}$，

又因為 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // E_{A_1A_2A_3}$ 且 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P}$ 在平面 $E_{A_2A_{i_0}P}$ 上，所以 $\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // L_3$。

(e) 由上述(b),(c)與(d)知，$\overleftrightarrow{A_{i_0}P} // L_1 // L_2 // L_3 \Rightarrow L_1 // L_2 // L_3$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{A_3P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_{i_0}}}} // \overleftrightarrow{A_1P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_{i_0}}}} // \overleftrightarrow{A_2P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_{i_0}}}}$，(如下圖(四十一))



圖(四十一)

利用引理五(平面上西瓦定理的極端情形)知，

$$\frac{\overline{A_1P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_{i_0}}}}}{\overline{P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_{i_0}}}A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_{i_0}}}}}{\overline{P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_{i_0}}}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_{i_0}}}}}{\overline{P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_{i_0}}}A_1}} = 1 \cdots\cdots ④ 。$$

(B) 次考慮 A_i'' ($i \in \{4,5,\cdots,n\} \setminus \{i_0\}$)

取定$i\in\{4,5,\cdots,n\}\setminus\{i_0\}$，$\because \overleftrightarrow{A_iP}\cap E_{A_1A_2A_3}\neq\phi$，$\therefore$承上述(iii)之(2)的第一類中(a)知$\overleftrightarrow{A_iP}$與通過$A_1,A_2$與$A_3$三點之平面$E_{A_1A_2A_3}$相交於$A_i''$點，則

$(E_{A_3A_i''P}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)=(E_{A_3A_iP}$與$\overleftrightarrow{A_1A_2}$之交點$)\xrightarrow{\text{定義成}}P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i''}}$，

$(E_{A_1A_i''P}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$之交點$)=(E_{A_1A_iP}$與$\overleftrightarrow{A_2A_3}$之交點$)\xrightarrow{\text{定義成}}P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i''}}$，

$(E_{A_2A_i''P}$與$\overleftrightarrow{A_3A_1}$之交點$)=(E_{A_2A_iP}$與$\overleftrightarrow{A_3A_1}$之交點$)\xrightarrow{\text{定義成}}P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i''}}$，

，亦即$\overleftrightarrow{A_3A_i''},\overleftrightarrow{A_1A_i''}$與$\overleftrightarrow{A_2A_i''}$共交點$A_i''$且分別與$\Delta A_1A_2A_3$之三邊所在的直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{A_3A_1}$交於$P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i''}}$、$P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i''}}$與$P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i''}}$三點，故由引理二（西瓦定理）知$\dfrac{\overline{A_1P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i''}}}}{\overline{P_1^{\overleftrightarrow{A_3A_i''}}A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i''}}}}{\overline{P_2^{\overleftrightarrow{A_1A_i''}}A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i''}}}}{\overline{P_3^{\overleftrightarrow{A_2A_i''}}A_1}}=1\cdots\cdots⑤$。

(C) 第二類中形如④式與形如⑤式的等式加總共有$(n-3)$個。

將第一類C_2^{n-3}個等式與第二類$(n-3)$個等式共C_2^{n-2}個子等式全部相乘即得等式(Δ) 如下，

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{C_2^{n-2}}A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_{C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{C_2^{n-2}+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{C_2^{n-2}+2}A_3}}\times\cdots$$
$$\times\frac{\overline{A_2P_{2C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}}A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_{2C_2^{n-2}+1}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_3P_{2C_2^{n-2}+2}}}{\overline{P_{2C_2^{n-2}+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_3P_{3C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{3C_2^{n-2}}A_1}}=1,$$

故此時原命題成立。

(iv) $C_2^{n-3}+(n-3)=\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}+\dfrac{2(n-3)}{2}=\dfrac{(n-3)(n-2)}{2}=C_2^{n-2}$，此說明了$\Delta A_1A_2A_3$三邊所在直線$\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$與$\overleftrightarrow{A_3A_1}$上各有$C_2^{n-2}$個交點，此與前提條件一致。

(v) 由上述(i),(ii),(iii)與(iv)知，當閉循環路徑為一個三角形時，即$\overleftrightarrow{A_1A_2}\to\overleftrightarrow{A_2A_3}\to\overleftrightarrow{A_3A_1}$，原命題成立。

(II) 對於非三角形的閉循環路徑Ω，仿定理十一之證明知，我們均可將Ω拆成數個三角形閉循環路徑的合成，然後針對每一個三角形閉循環路徑，利用上述**(I)**中之結論，可得一形如上述**(I)**中的等式(Δ)之等式，將所得之所有等式相乘消去重複路徑的比值乘積後，即得

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+1}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+1}A_{k_{i+1}}}}\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+2}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+2}A_{k_{i+1}}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+C_2^{n-2}}A_{k_{i+1}}}}\right)=1$$

，故得證原命題。

Q.E.D.

陸、研究成果

1. 假設平面上有一凸或凹四邊形 $ABCD$，又 E、F、G 與 H 分別為 $\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{DC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點，滿足 E、F、G 與 H 四點共線，且 E、F、G 與 H 四點不得與四邊形 $ABCD$ 之四頂點重合，則 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=1$。

2. 假設平面上有一五邊形 $ABCDE$，又 F、G、H、I 與 J 分別為 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{EA}$ 上一點，滿足 F、G、H、I 與 J 五點共線，則

$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\frac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1$。

3. 設直角坐標平面上有一個凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，今依序分別在 n 個邊或其延長線上各取一點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，使得這 n 個點在同一條直線 L 上，則

$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。

4. 假設直角坐標平面上有 n 條兩兩不平行的直線 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，又此 n 條直線均無『三線共點的情形』，且 L_n 與 L_1 相交於 A_1，L_k 與 L_{k+1} 相交於 A_1，其中 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，今有另一直線 L，已知直線 L 分別直線 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 各交於一點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，則

$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\frac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\frac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$。

5. 假設平面上有一凸或凹四邊形 $ABCD$，又 P 點為平面上一定點，P 點不落在四邊形 $ABCD$ 四邊所在的直線上，亦不落在其兩對角線 $\overleftrightarrow{AC}$ 與 $\overleftrightarrow{BD}$ 上，且 $\overleftrightarrow{CP}$、$\overleftrightarrow{DP}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 分別交於 P_1 與 P_2，$\overleftrightarrow{DP}$、$\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 分別交於 P_3 與 P_4，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 分別交於 P_5 與 P_6，$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 分別交於 P_7 與 P_8，則

$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}}\times\frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}\times\frac{\overline{BP_3}}{\overline{P_3C}}\times\frac{\overline{BP_4}}{\overline{P_4C}}\times\frac{\overline{CP_5}}{\overline{P_5D}}\times\frac{\overline{CP_6}}{\overline{P_6D}}\times\frac{\overline{DP_7}}{\overline{P_7A}}\times\frac{\overline{DP_8}}{\overline{P_8A}}=1$。

6. 假設平面上有一凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，又 P 點為平面上一定點，P 點不落在五

邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 五邊所在的直線上，亦不落在其對角線上，且 $\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 分別交於 P_1、P_2 與 P_3，$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 分別交於 P_4、P_5 與 P_6，$\overleftrightarrow{A_5P}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 分別交於 P_7、P_8 與 P_9，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 分別交於 P_{10}、P_{11} 與 P_{12}，$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ 分別交於 P_{13}、P_{14} 與 P_{15}，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_4}}{\overline{P_4A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_5}}{\overline{P_5A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_6}}{\overline{P_6A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_7}}{\overline{P_7A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_8}}{\overline{P_8A_4}}\times\frac{\overline{A_3P_9}}{\overline{P_9A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_{10}}}{\overline{P_{10}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{11}}}{\overline{P_{11}A_5}}\times\frac{\overline{A_4P_{12}}}{\overline{P_{12}A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_{13}}}{\overline{P_{13}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{14}}}{\overline{P_{14}A_1}}\times\frac{\overline{A_5P_{15}}}{\overline{P_{15}A_1}}=1$$ 。

7. 假設平面上有一凸(或凹)n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，又 P 點為平面上一定點，$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 分別交於 P_1、P_2、…、P_{n-2}，$\overleftrightarrow{A_4P}$、$\overleftrightarrow{A_5P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$、$\overleftrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 分別交於 $P_{(n-2)+1}$、$P_{(n-2)+2}$、…、$P_{2(n-2)}$，…，$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、…、$\overleftrightarrow{A_nP}$、$\overleftrightarrow{A_{n-1}P}$ 與 $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ 分別交於 $P_{(n-1)(n-2)+1}$、$P_{(n-1)(n-2)+2}$、…、$P_{n(n-2)}$，則

$$\left(\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_1P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_2}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-2)+1}A_3}}\times\frac{\overline{A_2P_{(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-2)+2}A_3}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_2P_{2(n-2)}}}{\overline{P_{2(n-2)}A_3}}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+1}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+1}A_1}}\times\frac{\overline{A_nP_{(n-1)(n-2)+2}}}{\overline{P_{(n-1)(n-2)+2}A_1}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_nP_{n(n-2)}}}{\overline{P_{n(n-2)}A_1}}\right)=1$$，

其中對於 $0\le k\le n-1$，$1\le j\le n-2$，滿足 $P_{k(n-2)+j}\in\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$，亦即直線 $\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$ 上有 $(n-2)$ 個點 $P_{k(n-2)+1},P_{k(n-2)+2},P_{k(n-2)+3},\cdots P_{k(n-2)+(n-2)}$, 。

8. 給定一三角形 ΔABC，且一圓 Γ 位於 ΔABC 內部，過 A 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{AT_1},\overleftrightarrow{AT_2}$ 分別交 $\overline{BC}$ 於 D_1,D_2，過 B 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{BU_1},\overleftrightarrow{BU_2}$ 分別交 $\overline{CA}$ 於 E_1,E_2，過 C 點作圓 Γ 的兩切線 $\overleftrightarrow{CV_1},\overleftrightarrow{CV_2}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 F_1,F_2，則

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}=1$$ 。

9. (1)給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個三角形 PQR，並自 A 點出發作出三射線 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AR}$ 分別交 $\overline{BC}$ 於

D_1,D_2,D_3，自 B 點出發作出三射線 $\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E_2,E_3，自 C 點出發作出三射線 $\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CR}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F_2,F_3，則

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}=1$$ 。

(2)給定一個三角形 ABC，接著我們試著將『定理四』中三角形 ABC 內部的『圓』換成一個四邊形 $DEFG$，並自 A 點出發作出四射線 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D_1,D_2,D_3,D_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 E_1,E_2,E_3,E_4，自 B 點出發作出四射線 $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}$ 分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 F_1,F_2,F_3,F_4，則

$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{F_1B}}\times\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1C}}\times\frac{\overline{CE_1}}{\overline{E_1A}}\times\frac{\overline{AF_2}}{\overline{F_2B}}\times\frac{\overline{BD_2}}{\overline{D_2C}}\times\frac{\overline{CE_2}}{\overline{E_2A}}\times\frac{\overline{AF_3}}{\overline{F_3B}}\times\frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3C}}\times\frac{\overline{CE_3}}{\overline{E_3A}}\times\frac{\overline{AF_4}}{\overline{F_4B}}\times\frac{\overline{BD_4}}{\overline{D_4C}}\times\frac{\overline{CE_4}}{\overline{E_4A}}=1$$ 。

10. (孟氏共面定理)

已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又 E 、F 、G 與 H 四點同時落在平面 U 上，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 。

11. 已知 F 、G 、H 、I 與 J 依次為四角錐 $E-ABCD$ 五稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CE}$ 、$\overleftrightarrow{ED}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上五點，且 F 、G 、H 、I 與 J 五點不與四角錐 $E-ABCD$ 五頂點重合，又 F 、G 、H 、I 與 J 五點同時落在平面 U 上，則

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\frac{\overline{CH}}{\overline{HE}}\times\frac{\overline{EI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DJ}}{\overline{JA}}=1$$ 。

12. 已知 G 、H 、I 、J 、K 與 L 依次為五角錐 $F-ABCDE$ 五稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CF}$ 、$\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{EA}$ 上六點，且 G 、H 、I 、J 、K 與 L 六點不與五角錐 $F-ABCDE$ 六頂點重合，又 G 、H 、I 、J 、K 與 L 六點同時落在平面 U 上，則 $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}\times\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}\times\frac{\overline{CI}}{\overline{IF}}\times\frac{\overline{FJ}}{\overline{JD}}\times\frac{\overline{DK}}{\overline{KE}}\times\frac{\overline{EL}}{\overline{LA}}=1$ 。

13. 已知 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 、P_6 、P_7 與 P_8 依次為六角錐 $A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 八

稜所在直線 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$ 、$\overleftrightarrow{A_7A_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_5A_6}$ 、$\overleftrightarrow{A_6A_7}$ 與 $\overleftrightarrow{A_7A_1}$ 上八點，且 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 、P_6 、P_7 與 P_8 八點不與六角錐 $A_7-A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 七頂點重合，又 P_1 、P_2 、P_3 、P_4 、P_5 、P_6 、P_7 與 P_8 八點同時落在平面 U 上，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_7}}\times\frac{\overline{A_7P_4}}{\overline{P_4A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_5}}{\overline{P_5A_5}}\times\frac{\overline{A_5P_6}}{\overline{P_6A_6}}\times\frac{\overline{A_6P_7}}{\overline{P_7A_7}}\times\frac{\overline{A_7P_8}}{\overline{P_8A_1}}=1\text{。}$$

14. 假設空間中一多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ ，從 n 個頂點中任取 m 個點 $A_{k_1},A_{k_2},A_{k_3},\cdots,A_{k_{m-1}},A_{k_m}$ （可以重複選取），使得 $\forall i\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$ ，$\overline{A_{k_i}A_{k_{i+1}}}$ 均是 Γ 的稜(此處視 $A_{k_{m+1}}=A_{k_1}$)，又 $\forall j\in\{1,2,3,\cdots,m-1,m\}$ ，P_j 為直線 $\overleftrightarrow{A_{k_j}A_{k_{j+1}}}$ 上異於 A_{k_j} 與 $A_{k_{j+1}}$ 的點，且此 m 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 共平面 U ，則

$$\frac{\overline{A_{k_1}P_1}}{\overline{P_1A_{k_2}}}\times\frac{\overline{A_{k_2}P_2}}{\overline{P_2A_{k_3}}}\times\frac{\overline{A_{k_3}P_3}}{\overline{P_3A_{k_4}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_{m-1}}P_{m-1}}}{\overline{P_{m-1}A_{k_m}}}\times\frac{\overline{A_{k_m}P_m}}{\overline{P_mA_{k_1}}}=1\text{。}$$

15. 假設空間中有 n 個點 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n$ ，且 $\forall j\in\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$ ，P_j 為直線 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 上異於 A_j 與 A_{j+1} 的點(此處視 $A_{n+1}=A_1$)，又此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共平面 U ，則 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$ 。

16. (西瓦共點定理)

已知 E 、F 、G 與 H 依次為四面體 $D-ABC$ 四稜所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 與 $\overleftrightarrow{DA}$ 上四點，且 E 、F 、G 與 H 四點不與四面體 $D-ABC$ 四頂點重合，又四平面 CDE 、ADF 、ABG 與 BCH 共點，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ 。

17. **（空間中四角錐的西瓦共點定理之一）**

已知空間中一四角錐 $A_5-A_1A_2A_3A_4$ ，P 點為空間中之定點使得，

$\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 與三平面 $E_{A_3A_4P}$、$E_{A_3A_5P}$、$E_{A_4A_5P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_2}$ 兩端點之 P_1、P_2、P_3 三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與三平面 $E_{A_2A_4P}$、$E_{A_2A_5P}$、$E_{A_4A_5P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_3}$ 兩端點之 P_4、P_5、P_6 三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與三平面 $E_{A_2A_3P}$、$E_{A_2A_5P}$、$E_{A_3A_5P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_4}$ 兩端點之 P_7、P_8、P_9 三點，

$\overleftrightarrow{A_1A_5}$ 與三平面 $E_{A_2A_3P}$、$E_{A_2A_4P}$、$E_{A_3A_4P}$ 分別交於異於 $\overline{A_1A_5}$ 兩端點之 P_{10}、P_{11}、P_{12} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 與三平面 $E_{A_4A_5P}$、$E_{A_4A_1P}$、$E_{A_5A_1P}$ 分別交於異於 $\overline{A_2A_3}$ 兩端點之 P_{13}、P_{14}、P_{15} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 與三平面 $E_{A_3A_5P}$、$E_{A_3A_1P}$、$E_{A_5A_1P}$ 分別交於異於 $\overline{A_2A_4}$ 兩端點之 P_{16}、P_{17}、P_{18} 三點，

$\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 與三平面 $E_{A_3A_4P}$、$E_{A_3A_1P}$、$E_{A_4A_1P}$ 分別交於異於 $\overline{A_2A_5}$ 兩端點之 P_{19}、P_{20}、P_{21} 三點，

$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 與三平面 $E_{A_5A_1P}$、$E_{A_5A_2P}$、$E_{A_1A_2P}$ 分別交於異於 $\overline{A_3A_4}$ 兩端點之 P_{22}、P_{23}、P_{24} 三點，

$\overleftrightarrow{A_3A_5}$ 與三平面 $E_{A_4A_1P}$、$E_{A_4A_2P}$、$E_{A_1A_2P}$ 分別交於異於 $\overline{A_3A_5}$ 兩端點之 P_{25}、P_{26}、P_{27} 三點，

$\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 與三平面 $E_{A_1A_2P}$、$E_{A_1A_3P}$、$E_{A_2A_3P}$ 分別交於異於 $\overline{A_4A_5}$ 兩端點之 P_{28}、P_{29}、P_{30} 三點，

(註：上述的點 P_j's 與 **Remark 5** 中的一致)，考慮循環路徑 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_1}$ ，

如圖(二十九)，

則 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \dfrac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \dfrac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_{19}}}{\overline{P_{19}A_5}} \times \dfrac{\overline{A_2P_{20}}}{\overline{P_{20}A_5}} \times \dfrac{\overline{A_2P_{21}}}{\overline{P_{21}A_5}} \times \dfrac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} \times \dfrac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}} \times \dfrac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}} = 1 \cdots\cdots (*)$ 。

18. **（空間中四角錐的西瓦共點定理之二）**

承上述第 17 項結果（即定理十），

(1)若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_1}$ ，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}} \times \frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}} \times \frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}} \times \frac{\overline{A_5P_{28}}}{\overline{P_{28}A_4}} \times \frac{\overline{A_5P_{29}}}{\overline{P_{29}A_4}} \times \frac{\overline{A_5P_{30}}}{\overline{P_{30}A_4}} \times \frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}} \times \frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}} \times \frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}} = 1。$$

（此即『問題九』之一般化情形之證明。）

(2)若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_1}$ ，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_{25}}}{\overline{P_{25}A_5}} \times \frac{\overline{A_3P_{26}}}{\overline{P_{26}A_5}} \times \frac{\overline{A_3P_{27}}}{\overline{P_{27}A_5}} \times \frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} \times \frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}} \times \frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}} = 1。$$

(3)若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_1}$ ，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}} \times \frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}} \times \frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}} \times \frac{\overline{A_4P_7}}{\overline{P_7A_1}} \times \frac{\overline{A_4P_8}}{\overline{P_8A_1}} \times \frac{\overline{A_4P_9}}{\overline{P_9A_1}} = 1。$$

(4)若將循環路徑更換為 $\overleftrightarrow{A_1A_2} \to \overleftrightarrow{A_2A_3} \to \overleftrightarrow{A_3A_4} \to \overleftrightarrow{A_4A_5} \to \overleftrightarrow{A_5A_1}$ ，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_2}} \times \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{P_3A_2}} \times \frac{\overline{A_2P_{13}}}{\overline{P_{13}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{14}}}{\overline{P_{14}A_3}} \times \frac{\overline{A_2P_{15}}}{\overline{P_{15}A_3}} \times \frac{\overline{A_3P_{22}}}{\overline{P_{22}A_4}} \times \frac{\overline{A_3P_{23}}}{\overline{P_{23}A_4}} \times \frac{\overline{A_3P_{24}}}{\overline{P_{24}A_4}} \times \frac{\overline{A_4P_{28}}}{\overline{P_{28}A_5}} \times \frac{\overline{A_4P_{29}}}{\overline{P_{29}A_5}} \times \frac{\overline{A_4P_{30}}}{\overline{P_{30}A_5}} \times \frac{\overline{A_5P_{10}}}{\overline{P_{10}A_1}} \times \frac{\overline{A_5P_{11}}}{\overline{P_{11}A_1}} \times \frac{\overline{A_5P_{12}}}{\overline{P_{12}A_1}} = 1。$$

19. （空間中 n 頂點多面體的西瓦共點定理）

已知空間中一 n 頂點多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$，$P$ 為空間中一定點滿足下列條件：

(α)給定 $1\le i<j\le n$，對於 $1\le k<l\le n, k\notin\{i,j\}, l\notin\{i,j\}$，過 A_k、A_l 與 P 三點之平面 $E_{A_kA_lP}$ 分別與直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 相交於異於線段 $\overline{A_iA_j}$ 兩端點的一點，所以直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 上共有 C_2^{n-2} 個交點（不必然全部相異），即 $P_{r_{ij}+1}, P_{r_{ij}+2}, P_{r_{ij}+3}, \cdots, P_{r_{ij}+C_2^{n-2}}$，其中 r_{ij} 為直線 $\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 之序位數（詳見 Remark 5 中所述）。

(β)多面體 $\Gamma: A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 中任三頂點不共線，亦即過 Γ 的任三個頂點 A_i、A_j 與 A_k 均可以決定唯一的平面 $E_{A_iA_jA_k}$。

若取定一閉循環路徑通過多面體的 m 條不重複稜線（頂點可允許重複經過）如下，

$\overleftrightarrow{A_{k_1}A_{k_2}}\to\overleftrightarrow{A_{k_2}A_{k_3}}\to\overleftrightarrow{A_{k_3}A_{k_4}}\to\cdots\to\overleftrightarrow{A_{k_{m-1}}A_{k_m}}\to\overleftrightarrow{A_{k_m}A_{k_1}}$，則

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+1}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+1}A_{k_{i+1}}}}\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+2}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+2}A_{k_{i+1}}}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+C_2^{n-2}}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+C_2^{n-2}}A_{k_{i+1}}}}\right)=1$$ （視 $A_{k_{m+1}}=A_{k_1}$），

亦即 $$\prod_{i=1}^{m}\prod_{t=1}^{C_2^{n-2}}\frac{\overline{A_{k_i}P_{r_{k_ik_{i+1}}+t}}}{\overline{P_{r_{k_ik_{i+1}}+t}A_{k_{i+1}}}}=1\cdots\cdots(\star)$$。

柒、討論與應用

一、 研究成果的進一步說明與其他可能性

1. 在以下(1)至(6)中，我將針對定理一中的一些前提要求與結論間的關係做討論。

(1) 在定理一的描述中，我們要求在n邊形n個邊上的n個點$P_1, P_2, \cdots, P_n$需要在同一直線L上，如果此n個點不共線，則定理一中的結論顯然不一定會成立。舉例如下，

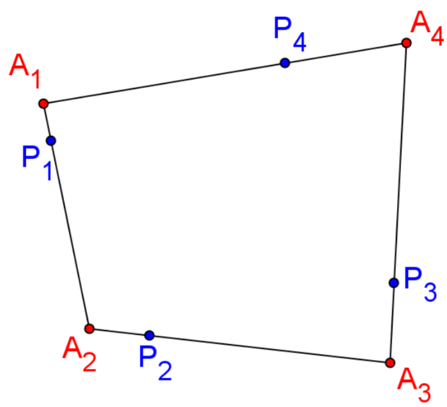


圖 1-1

如圖 1-1，若已知$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=\dfrac{1}{2}$，

則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{120}\neq 1$$

，故此時定理一之結論不成立。

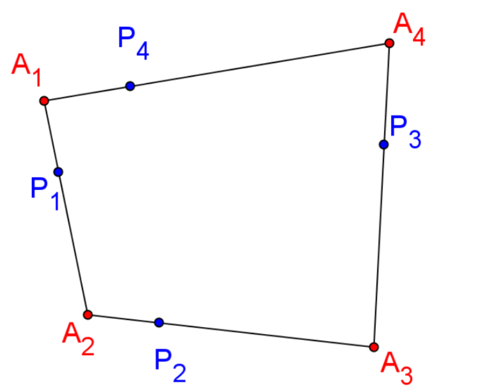


圖 1-2

如圖 1-2，若已知$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}=\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=\dfrac{3}{1}$，則

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{1}=1$$

，故此時定理一之結論成立。

(2) 若此n個點$P_1, P_2, \cdots, P_n$已經在同一直線L上，但是L與某一邊所在直線$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$平行，此時，$L$與該邊所在直線$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$之交點$P_i$不存在，此與$P_i$落在$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$上之前提假設矛盾，因此導致線段$\overline{A_iP_i}$不存在，所以定

理一中所描述的結論不會成立。

(3) 若此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 已經在同一直線 L 上，但是 L 與某一邊所在直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 重合，此時，L 與該邊所在直線 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 之交點 P_i 無法確定，此與 P_i 落在 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 上之前提假設矛盾，因此導致線段 $\overline{A_iP_i}$ 不存在，所以定理一中所描述的結論不會成立。

(4) 若此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 已經在同一直線 L 上，但是某個 $P_i=A_i$ 或 $P_i=A_{i+1}$，則 $\overline{A_iP_i}=0$ 或 $\overline{P_iA_{i+1}}=0$，所以定理一中所描述的結論不會成立。

(5) 綜合上述(1),(2),(3)與(4)得知，定理一中的前提要求是必要的，否則無法保證其結論的正確性。

(6) 由上述(1)中的圖 1-2 知，定理一的逆命題是錯誤的，因為 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=1$，但是 P_1,P_2,P_3,P_4 四點不共線。

2. 在以下(1)至(6)中，我將針對定理二中的一些前提要求與結論間的關係做討論。

(1) 在定理二的描述中，我們要求 n 條直線均無『三線共點的情形』，然而我發現此條件限制似乎不必然必要，考慮 $n=4$ 與 $n=5$ 之情形，驗證如下。

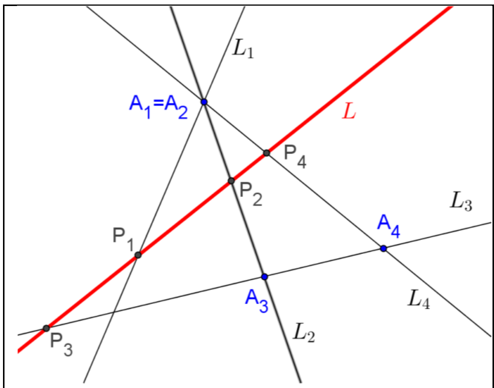


圖 2-1 ($n=4$ 之情形)

（此例中，雖然 L_1,L_2 與 L_4 三線共點，但定理二中之結論依然成

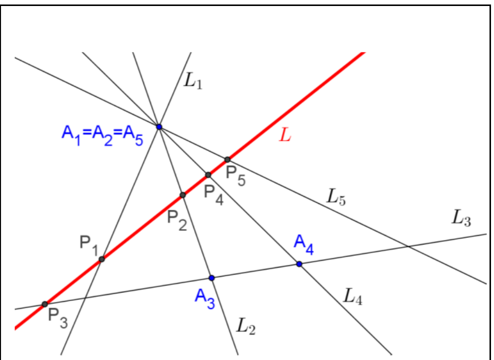


圖 2-2 ($n=5$ 之情形)

（此例中，雖然 L_1,L_2,L_4 與 L_5 四線共點，但定理二中之結論依然

立。） 證明： $\left(\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\right)\times\left(\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}\right)=1\times1=1$ 成立。	成立。） 證明： $\left(\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\right)\times\left(\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\right)\times\left(\dfrac{\overline{A_5P_5}}{\overline{P_5A_1}}\right)$ $=1\times1\times1=1$ 成立。

(2) 若此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 已經在同一直線 L 上，但是 L 與某一直線 L_i 平行，此時，L 與該直線 L_i 之交點 P_i 不存在，此與 P_i 落在 L_i 上之前提假設矛盾，因此導致線段 $\overline{A_iP_i}$ 不存在，所以定理二中所描述的結論不會成立。

(3) 若此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 已經在同一直線 L 上，但是 L 與某直線 L_i 重合，此時，L 與該直線 L_i 之交點 P_i 無法確定，此與 P_i 落在 L_i 上之前提假設矛盾，因此導致線段 $\overline{A_iP_i}$ 不存在，所以定理二中所描述的結論不會成立。

(4) 若此 n 個點 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 已經在同一直線 L 上，但是某個 $P_i=A_i$ 或 $P_i=A_{i+1}$，則 $\overline{A_iP_i}=0$ 或 $\overline{P_iA_{i+1}}=0$，所以定理二中所描述的結論不會成立。

(5) 綜合上述(1),(2),(3)與(4)得知，定理二中的前提要求中，除了『無三線共點的情形』的要求外，其餘的要求都是必要的，否則無法保證其結論的正確性。

(6) 由上述 1(1)中的圖 1-2 知，定理二的逆命題是錯誤的，因為 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=1$，但是 P_1,P_2,P_3,P_4 四點不共線。

3. 在定理一中，我們主要用數學歸納法來驗證，在全國科展後，我試著找出其他的證明方法，很幸運地，我發現可以將原多邊形做一些切割，進而驗證結論是正確的，以下是詳細的論證過程。

定理一的第二種證法：

(i) 如下圖 3-1 所示，從 A_1 分別與 $A_3A_4A_5\cdots A_{k-1}A_k$ 連接，可得 $k-1$ 個三角形，且 $\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4},\overline{A_1A_5}\cdots\overline{A_1A_{k-1}},\overline{A_1A_k}$ 與 L 會各交於 $P_1',P_2',\cdots,P_{k-2}'$，

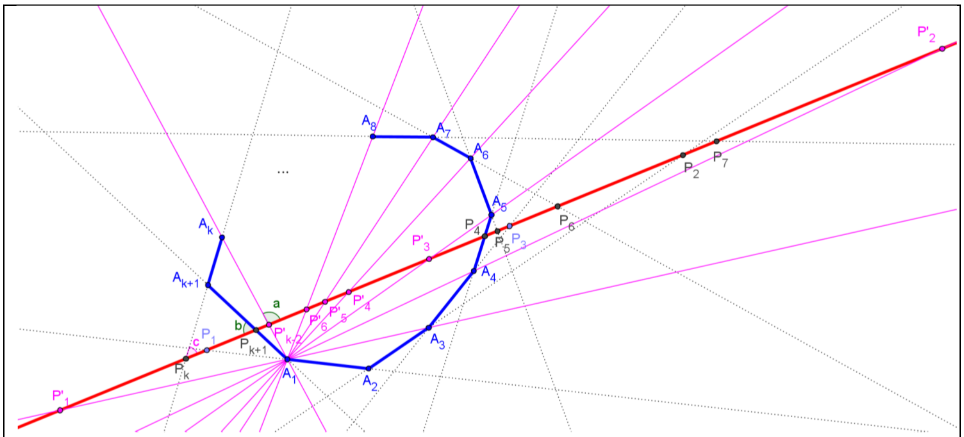


圖 3-1

（說明：若 $L//\overline{A_1A_i}$，則我們視 L 與 $\overline{A_1A_i}$ 相交於無窮遠處 P_{i-2}'，此時我們視比值 $\dfrac{\overline{A_1P_{i-2}'}}{\overline{P_{i-2}'A_i}}=1$，因此

①在 $\Delta A_1A_{i-1}A_i$ 中，由 $L//\overline{A_1A_i}$ 可知 $\dfrac{\overline{A_1P_{i-3}'}}{\overline{P_{i-3}'A_{i-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{i-1}P_{i-1}}}{\overline{P_{i-1}A_i}}=1$，所以

$$\frac{\overline{A_1P_{i-3}'}}{\overline{P_{i-3}'A_{i-1}}}\times\frac{\overline{A_{i-1}P_{i-1}}}{\overline{P_{i-1}A_i}}\times\frac{\overline{A_iP_{i-2}'}}{\overline{P_{i-2}'A_1}}=\left(\frac{\overline{A_1P_{i-3}'}}{\overline{P_{i-3}'A_{i-1}}}\times\frac{\overline{A_{i-1}P_{i-1}}}{\overline{P_{i-1}A_i}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_iP_{i-2}'}}{\overline{P_{i-2}'A_1}}\right)=1\times1=1；$$

②在 $\Delta A_1A_iA_{i+1}$ 中，由 $L//\overline{A_1A_i}$ 可知 $\dfrac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{i+1}P_{i-1}'}}{\overline{P_{i-1}'A_1}}=1$，所以

$$\frac{\overline{A_1P_{i-2}'}}{\overline{P_{i-2}'A_i}}\times\frac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}\times\frac{\overline{A_{i+1}P_{i-1}'}}{\overline{P_{i-1}'A_1}}=\left(\frac{\overline{A_1P_{i-2}'}}{\overline{P_{i-2}'A_i}}\right)\times\left(\frac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}\times\frac{\overline{A_{i+1}P_{i-1}'}}{\overline{P_{i-1}'A_1}}\right)=1\times1=1，$$

在接下來的論證過程中，我們將運用此觀點與結果。）

(ii) 在 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_1'}}{\overline{P_1'A_1}}=1$；

在 $\Delta A_1A_3A_4$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_1'}}{\overline{P_1'A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_2'}}{\overline{P_2'A_1}}=1$；

在 $\Delta A_1A_4A_5$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_2'}}{\overline{P_2'A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\dfrac{\overline{A_5P_3'}}{\overline{P_3'A_1}}=1$；

在 $\Delta A_1A_{k-1}A_k$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_{k-3}'}}{\overline{P_{k-3}'A_{k-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_{k-2}'}}{\overline{P_{k-2}'A_1}}=1$；

在 $\Delta A_1A_kA_{k+1}$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_{k-2}'}}{\overline{P_{k-2}'A_k}}\times\dfrac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1$。

(iii) 將上述的 $k-1$ 個式子相乘，可得

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\frac{\overline{A_{k-2}P_{k-2}}}{\overline{P_{k-2}A_{k-1}}}\times\frac{\overline{A_{k-1}P_{k-1}}}{\overline{P_{k-1}A_k}}\times\frac{\overline{A_kP_k}}{\overline{P_kA_{k+1}}}\times\frac{\overline{A_{k+1}P_{k+1}}}{\overline{P_{k+1}A_1}}=1,$$

故得證原題。

Q.E.D.

4. 在定理二中，我們主要用數學歸納法來驗證，在全國科展後，我試著找出其他的證明方法，很幸運地，我發現可以將原多邊形做一些切割，進而驗證結論是正確的，以下是詳細的論證過程。

定理二的第二種證法：

(I)先考慮凹四邊形

連接直線 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$，則我們可以分成三類情形討論，詳述如下：

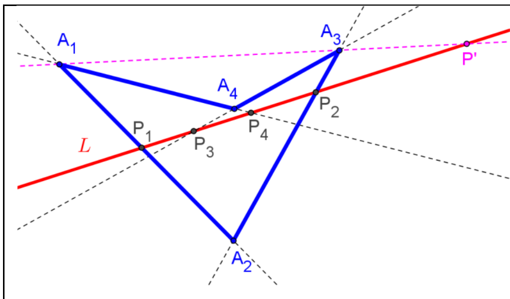


圖 4-1

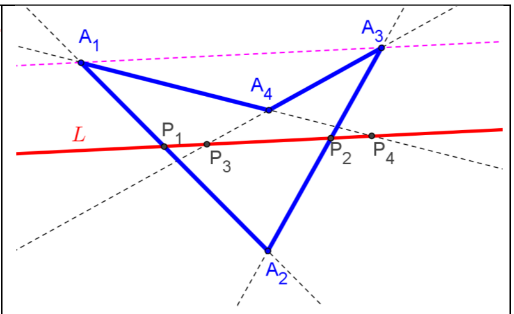


圖 4-2

(i) 情形一：當直線 L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 相交於一點 P' 時，如上圖 4-1，則

(α)在 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P'}}{\overline{P'A_1}}=1\cdots$①；

(β)在 $\Delta A_1A_3A_4$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P'}}{\overline{P'A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=1\cdots$②；

(γ) 由①×②得知 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=1$，得證此時原題成立。

(ii) 情形二：當直線 L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 平行時，如上圖 4-2，則

(α)在 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，因為 L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 平行，所以 $\overline{A_1P_1}:\overline{P_1A_2}=\overline{A_3P_2}:\overline{P_2A_2}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}=1 \cdots ③$$

(β)在 $\Delta A_1A_3A_4$ 中，因為 L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 平行，所以 $\overline{A_3P_3}:\overline{P_3A_4}=\overline{A_1P_4}:\overline{P_4A_4}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=1 \cdots ④$$

(γ)由③×④得知 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_1}}=1$，得證此時原題成立。

(iii) 情形三：當直線 L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 重合時，則 L 會通過 A_1 與 A_3 兩點，與前提矛盾。

綜合上述(i),(ii)與(iii)，得證原命題成立。

(II)次考慮**凸、凹多邊形**

對於 $i\in\{3,4,5,\cdots,n-1\}$，連接直線 $\overleftrightarrow{A_1A_i}$，則我們可以分兩類情形討論，詳述如下。

(i) 情形一：對於每一個 $i\in\{2,3,4,5,\cdots,n-1\}$，$A_1,A_i$ 與 A_{i+1} 三點不共線。

因為對於每一個 $i\in\{2,3,4,5,\cdots,n-1\}$，$A_1,A_i$ 與 A_{i+1} 三點不共線，所以從 A_1 分別與 $A_3,A_4,A_5,\cdots,A_{n-2}$ 與 A_{n-1} 連接，可得 $n-2$ 個三角形，亦即 $\Delta A_1A_iA_{i+1}$，$i\in\{2,3,4,5,\cdots,n-1\}$，如下圖 4-3 所示，則

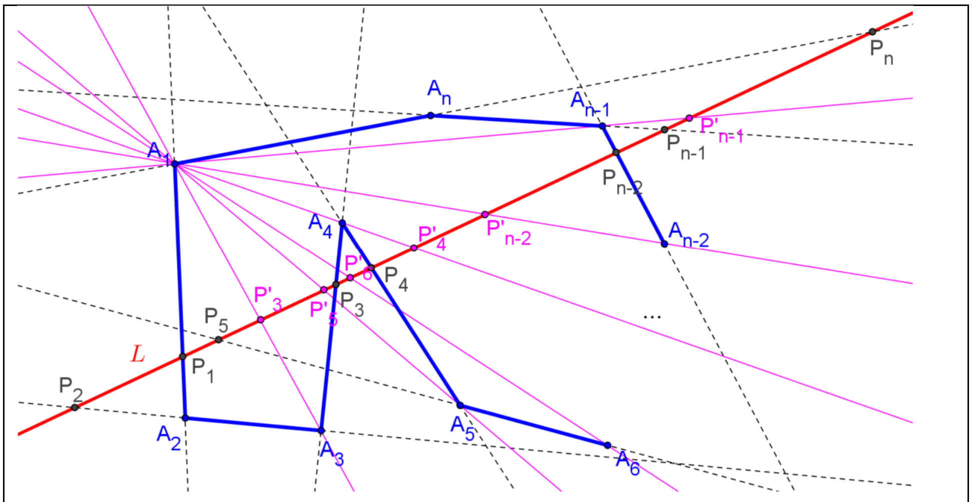


圖 4-3

①由題意知直線 L 不會通過 A_i，$i \in \{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$，所以直線 L 會與 $\overleftrightarrow{A_1A_3}, \overleftrightarrow{A_1A_4}, \overleftrightarrow{A_1A_5}, \cdots, \overleftrightarrow{A_1A_{n-2}}$ 與 $\overleftrightarrow{A_1A_{n-1}}$ 各交於一點，即 $P_3', P_4', \cdots, P_{n-1}'$，共 $n-3$ 個點。

②在 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}} \times \dfrac{\overline{A_3P_3'}}{\overline{P_3'A_1}} = 1$ ；

在 $\Delta A_1A_3A_4$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_3'}}{\overline{P_3'A_3}} \times \dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}} \times \dfrac{\overline{A_4P_4'}}{\overline{P_4'A_1}} = 1$ ；

在 $\Delta A_1A_4A_5$ 中，由引理一(孟氏定理)可知 $\dfrac{\overline{A_1P_4'}}{\overline{P_4'A_4}} \times \dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}} \times \dfrac{\overline{A_5P_5'}}{\overline{P_5'A_1}} = 1$ ；

在 $\Delta A_1A_{n-2}A_{n-1}$ 中，由引理一(孟氏定理)可知

$\dfrac{\overline{A_1P_{n-2}'}}{\overline{P_{n-2}'A_{n-2}}} \times \dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}} \times \dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}'}}{\overline{P_{n-1}'A_1}} = 1$ ；

在 $\Delta A_1A_{n-1}A_n$ 中，.由引理一(孟氏定理)可知

$\dfrac{\overline{A_1P_{n-1}'}}{\overline{P_{n-1}'A_{n-1}}} \times \dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}} \times \dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}} = 1$ ；

③將上述的 $n-2$ 個式子相乘，可得

$\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}} \times \dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}} \times \dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}} \times \dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}} \times \cdots \times \dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}} \times \dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}} \times \dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}} = 1$，

得證此時原題成立。

(ii) 若存在 $i\in\{2,3,4,5,\cdots,n-1\}$ 使得 A_1,A_i 與 A_{i+1} 三點共線，如下圖 4-4 所示，

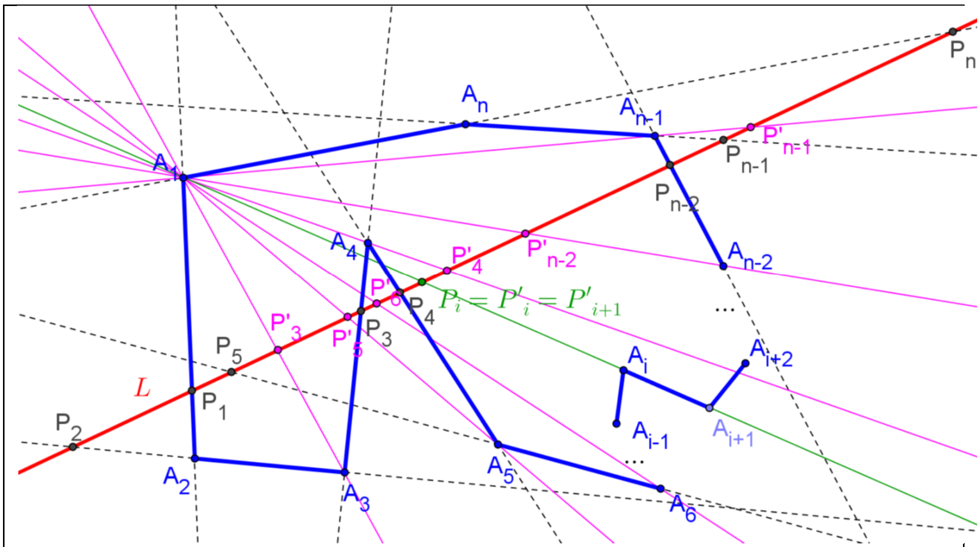


圖 4-4

此時，A_1,A_i 與 A_{i+1} 三點無法構成一個三角形，但是我們卻可以知道

（L 與 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 之交點）=（L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_i}$ 之交點）=（L 與 $\overleftrightarrow{A_1A_{i+1}}$ 之交點），

亦即 $P_i = P'_i = P'_{i+1}$，從而 $\dfrac{\overline{A_1P'_i}}{\overline{P'_iA_i}}\times\dfrac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{i+1}P'_{i+1}}}{\overline{P'_{i+1}A_1}}=\dfrac{\overline{A_1P_i}}{\overline{P_iA_i}}\times\dfrac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{i+1}P_i}}{\overline{P_iA_1}}=1$，

換句話說，雖然 A_1,A_i 與 A_{i+1} 三點無法構成一個三角形，但是在上述

(i)中的 $\dfrac{\overline{A_1P'_i}}{\overline{P'_iA_i}}\times\dfrac{\overline{A_iP_i}}{\overline{P_iA_{i+1}}}\times\dfrac{\overline{A_{i+1}P'_{i+1}}}{\overline{P'_{i+1}A_1}}=1$ 之結果並不受影響，依舊成立。如此

一來，我們依舊可以有上述(i)中的 $n-2$ 式子之結果，將之全部相乘

即得 $\dfrac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\dfrac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\dfrac{\overline{A_3P_3}}{\overline{P_3A_4}}\times\dfrac{\overline{A_4P_4}}{\overline{P_4A_5}}\times\cdots\times\dfrac{\overline{A_{n-2}P_{n-2}}}{\overline{P_{n-2}A_{n-1}}}\times\dfrac{\overline{A_{n-1}P_{n-1}}}{\overline{P_{n-1}A_n}}\times\dfrac{\overline{A_nP_n}}{\overline{P_nA_1}}=1$，

得證此時原題成立。

綜合上述(i)與(ii)，得證原命題成立。

綜合上述(I)與(II)之結論，得證定理二成立。在此證法中，我們主要利用切割原多邊形成數個三角形的方式，此有別於原來所用的『數學歸納法』。

Q.E.D.

5. 在定理三的前提要求中，我們要求 P 點不落在 n 邊形的 n 個邊所在的直線上，亦不落在 n 邊形之對角線所在的直線上，除了這些情形之外，定理三所描述的結論都會成立。因為如果 P 點落在 n 邊形的 n 個邊所在的直線上或對角線所在的直線上，會造成某個線段 $\overline{A_iP_j}=0$，此時定理三中的結果便不會成立，因為會有某個分子或分母為 0。換句話說，在定理三的描述中，我們其實已經考量了平面上所有 P 點的情形。舉例來說，如果點 $P\in\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$，則 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 會與 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 相交於一點 $P_k(=A_{i+1})$，如下圖 5-1 所示，此時 $\overline{A_{i+1}P_k}=0$，這將使得定理三中描述的結論無法成立。另一方面，如果點 $P\in\overleftrightarrow{A_iA_j}$（$\overleftrightarrow{A_iA_j}$ 為 n 邊形之一對角線所在的直線），則 $\overleftrightarrow{A_iP}$ 會與 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 相交於一點 $P_l(=A_j)$，如下圖 5-2 所示，此時 $\overline{A_jP_l}=0$，這將使得定理三中描述的結論無法成立。

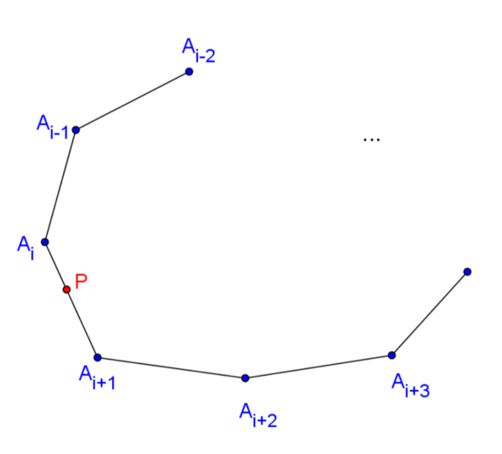


圖 5-1

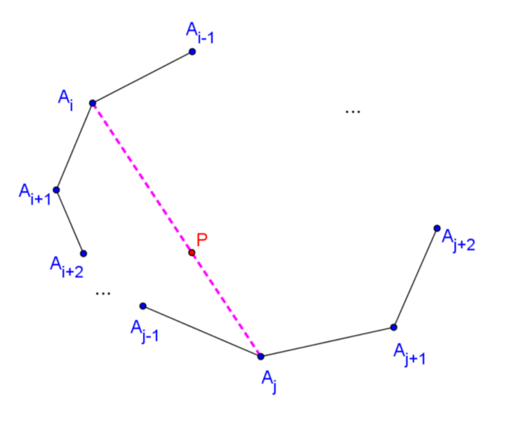


圖 5-2

6. 針對『引理一』中的孟氏定理，我們其實可以考慮其極端情形，詳述如下，

『引理一』中的孟氏定理的極端情形：

假設平面上有一三角形 ABC，又 D 與 E 分別為 $\overleftrightarrow{BC}$ 與 $\overleftrightarrow{CA}$ 上一點，使得 $\overleftrightarrow{DE}\,//\,\overleftrightarrow{AB}$，且 D 與 E 兩點不與三角形 ABC 三頂點重合，如下圖 6-1 與圖 6-2，則 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

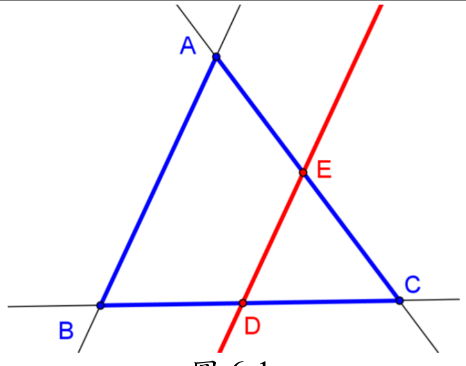


圖 6-1

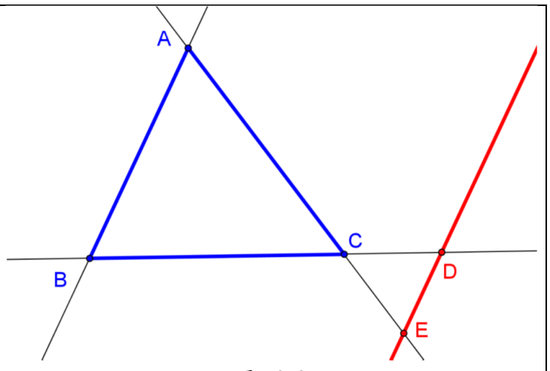


圖 6-2

證明：

(1) 觀點一：

如上圖 6-1 與圖 6-2 所示，因為 $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{AB}$，所以 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}$，所以 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

(2) 觀點二：

此前提中，要求 $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{AB}$，所以 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 不會有交點，可是以另一觀點觀之，我們其實可以將 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交點視為在無窮遠處的一點 F，並視 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=1$，則 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)\times\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right)=1\times1=1$，此可視為孟氏定理之極端情形。

Q.E.D.

7. 『定理四』主要是將『西瓦定理』中的『共點』換成『共切圓』的情形，花了一點力氣終於證明它的正確性。我也曾經試著將其擴展到凸、凹四邊形的情形，用了 Geoegebra 繪圖軟體畫了圖形，做了簡單的實驗，實驗結果告訴我推論應該是正確的，但其證明則尚無進展，於此，將做軟體實驗所發現的結果寫成猜測，詳述如下，此猜測可看做是『問題五』之推廣。

猜測一：

給定平面上一個四邊形 $ABCD$，及一圓 Γ，其圓心為 O，自 A 點作圓 Γ 的

兩切線$\overleftrightarrow{AT_1},\overleftrightarrow{AT_2}$分別交$\overleftrightarrow{BC}$於$P_7,P_8$，且分別交$\overleftrightarrow{CD}$於$P_9,P_{10}$，自$B$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{BU_1},\overleftrightarrow{BU_2}$分別交$\overleftrightarrow{CD}$於$P_{11},P_{12}$，且分別交$\overleftrightarrow{DA}$於$P_{13},P_{14}$，自$C$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{CV_1},\overleftrightarrow{CV_2}$分別交$\overleftrightarrow{DA}$於$P_{15},P_{16}$，且分別交$\overleftrightarrow{AB}$於$P_1,P_2$，自$D$點作圓$\Gamma$的兩切線$\overleftrightarrow{DS_1},\overleftrightarrow{DS_2}$分別交$\overleftrightarrow{AB}$於$P_3,P_4$，且分別交$\overleftrightarrow{BC}$於$P_5,P_6$，如下圖 7-1 與圖 7-2 所示，當$\forall i\in\{1,2,3,\cdots,15,16\}$，$P_i$均存在，且$P_i$均不與$A,B,C,D$重疊時，則$\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{\overline{AP_i}}{\overline{P_iB}}\right)\times\left(\prod_{i=5}^{8}\frac{\overline{BP_i}}{\overline{P_iC}}\right)\times\left(\prod_{i=9}^{12}\frac{\overline{CP_i}}{\overline{P_iD}}\right)\times\left(\prod_{i=13}^{16}\frac{\overline{DP_i}}{\overline{P_iA}}\right)=1$。

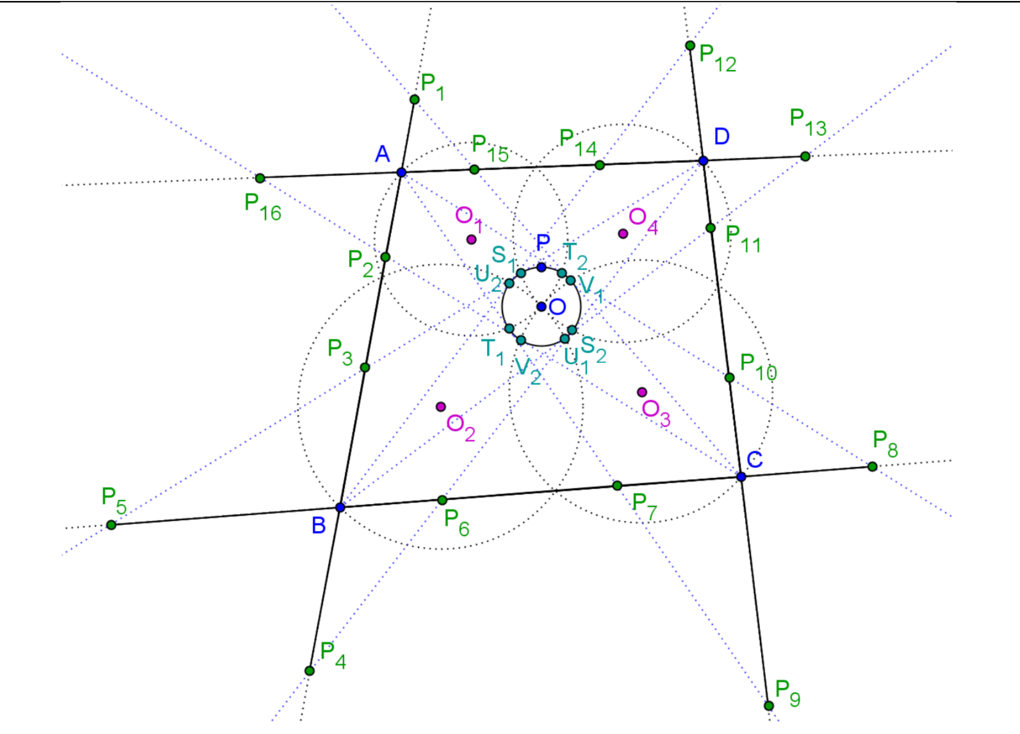


圖 7-1（四邊形 $ABCD$ 為凸四邊形之情形）

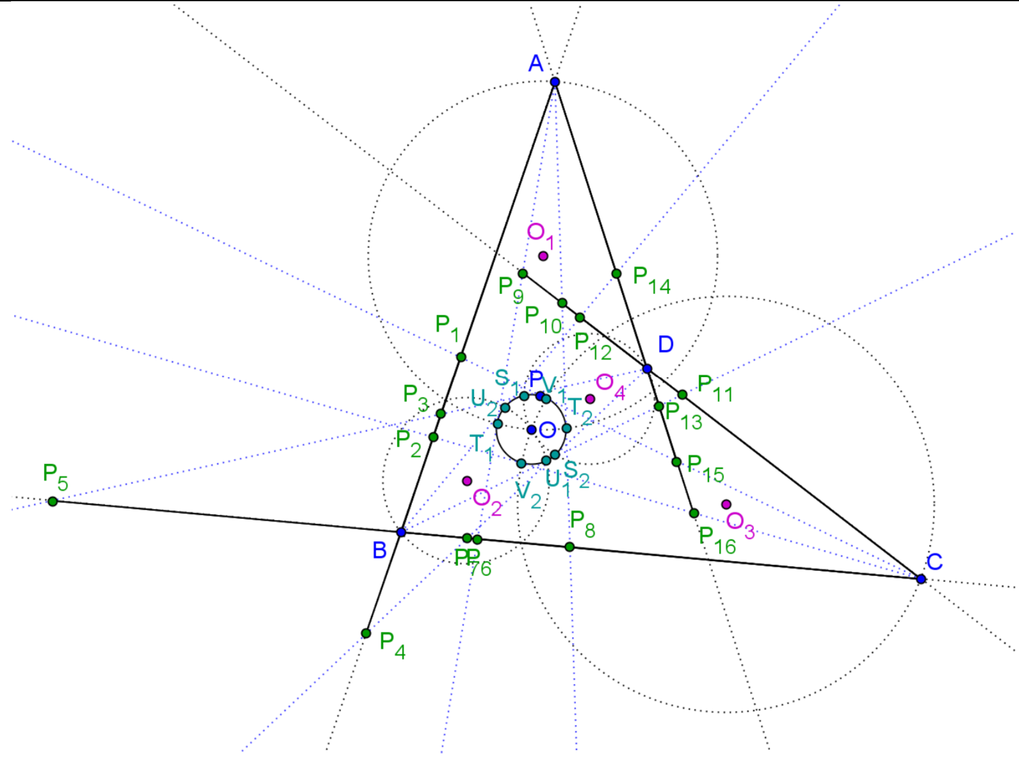


圖 7-2（四邊形 $ABCD$ 為凹四邊形之情形）

由於在『定理四』中，我是以坐標幾何的方式來給出證明，計算複雜度頗高。在『猜測一』中，點的個數更多，可想而知，若再用坐標幾何的方式來證明，將會更為複雜，所以針對『定理四』與『猜測一』找出純幾何證法，應該是要努力的方向，企盼未來得有機會順利解決。如果『猜測一』可以順利驗證，則我們應該可以把『定理三』做同方向的推論。

8. 本文中的許多結果應可以在球面上找到相對應的推論。

二、 本文研究過程的特色與應用

1. 我會用數學軟體做一些數學實驗，發現規則，並就發現的規則給予嚴謹證明。

2. 在論證的過程中，我所用的方法，主要有正弦定理、數學歸納法、線段比值轉換成面積比值、坐標幾何、線段比值轉換成另一種線段比值、線段比值轉換成角錐體積比值等。

3. 針對參考文獻資料[1]，進行探討驗證，並更正其錯誤。

4. 我們已經完整的掌握『孟氏定理』與『西瓦定理』在平面上多邊形與空間中多面體的一般形式，並且均給予嚴謹的證明，經查相關文獻資料中，僅部分結果類似，並未發現有完全一樣的結論。

5. 在參考資料[3]中，曾提及『孟氏定理』在多個泡泡接合的球心圖形中的應用，這或許是可以思考的應用範疇。

捌、結論與展望

由於課餘的一個機緣，讓我有機會接觸了幾何上兩個重要結果—『孟氏定理與西瓦定理』，在好奇心的驅使下，我分別將孟氏定理推廣到凸四邊形、凹四邊形、凸五邊形，乃至凸 n 邊形，更甚者，將『凸 n 邊形』換成『n 條直線』，我也可以推得類似的結果。而事實上，『n 條直線』的情形就包含了『凸 n 邊形』與『凹 n 邊形』的所有情形。

在孟氏定理獲得推論的成功之後，很自然地，想到其『對偶命題』—『西瓦定理』也應該有相對應的結果，果不其然，我證得其在凸四邊形、凹四邊形與凸五邊形上的推廣，乃至於到凸 n 邊形也有相對應的結果。而事實上，『凹 n 邊形』的證明方式與『凸 n 邊形』之狀況類似，所以我其實完成了『西瓦定理』在『凸、凹 n 邊形』的推廣。

完成前面兩大部分的推論之後，我嘗試作另一個向度的推廣，也就是將西瓦定理中的三線共點的『點』擴大變成一個『圓』，則我可以獲得如『定理四』的結果。

在證明『定理四』之後，我開始思考『問題五』、『問題六』、『問題七』與『定理三』應該也有類似的結果，我試著用 **Geogebra** 繪圖軟體驗證其正確性，發現這樣的猜測應該是成立的，只不過證明尚在努力中。

另外，在立體空間中的推廣，我也做了一些努力，在分區科展後，我又陸續完成了空間中任意『n 個頂點多面體』的『孟氏共面定理』，此外，我也證明了空間中任意四面體的『西瓦共點定理』，同時以實例驗證空間中的『西瓦共點定理』在四角錐中的形式。

在全國科展後，我又順利的找到空間中『n 個頂點多面體』的『西瓦共點定理』之形式，並且給予嚴謹的證明，如此一來，我們便得更完整的掌握『孟氏定理』與『西瓦定理』在平面上多邊形與空間中多面體的一般形式。展望未來，希望可以找到這兩個定理在球面上相對應的結果。

玖、參考資料

[1] 中華民國第二十八屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱:『從平面到立體—從三角形看四面體的性質』，作者：林志民、陳彥匡、范治民，指導老師：許燦煌。

[2] 中華民國第三十八屆中小學科學展覽第二區科展作品專輯高中組,作品名稱：『球面三角形上的西瓦定理及其應用』，作者：吳宜靜、李君儀、謝文芩，指導老師：吳原榮。

[3] 余文卿、吳志揚教授 主編，高中幾何學(上)與幾何學(下)，龍騰版，2003。

[4] 初等幾何研究，左銓如，季素月編著，九章出版社，1998。

[5] 中華民國第四十九屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組，國立台灣科學教育館彙編，作品名稱:『"孟"幻泡影』，作者：林柏僑、蔡長佑、施順瀚、許唐瑋，指導老師：李文堂、吳博仁。

[6] 林福來、陳順宇、陳創義、徐正梅、許清土、林信安　編撰，高中數學第一冊至第四冊，南一版，2011~2013。

壹拾、　附錄

孟氏定理的第二種證法

此種證明法，主要是先作輔助線，再將線段比轉換成三角形的面積比，思考的方式其實極類似於西瓦定理的證明方式，此證法的一般情形即本文第柒部分第3點所提之證明，於此我們僅著手**證明三角形、凸四邊形、凹四邊形、與凸五邊形之情形**，詳述如下。

(1) 三角形：

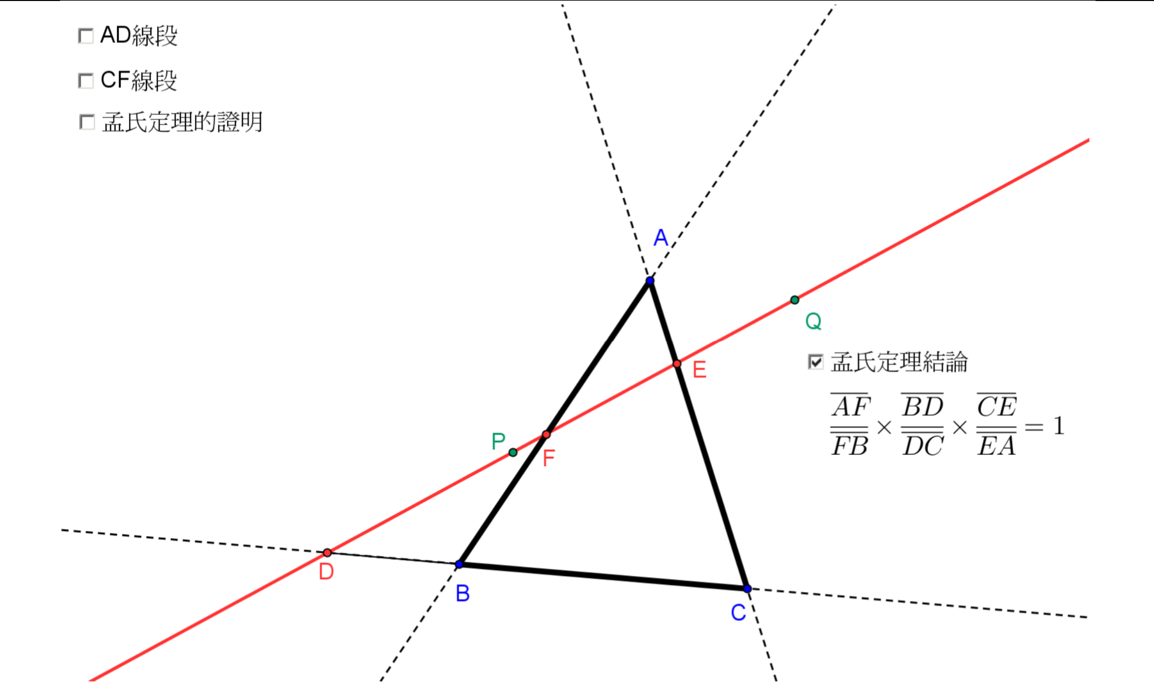


圖 A-1

證明：連接 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CF}$ ，則

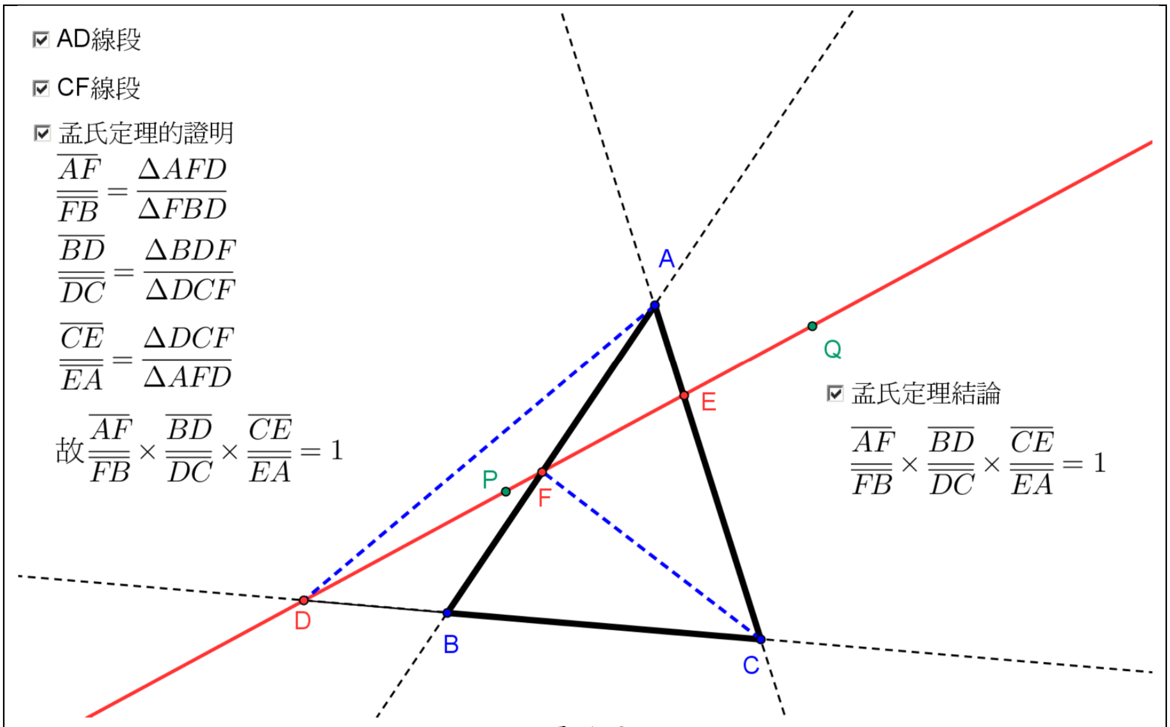


圖 A-2

(2) 凸四邊形

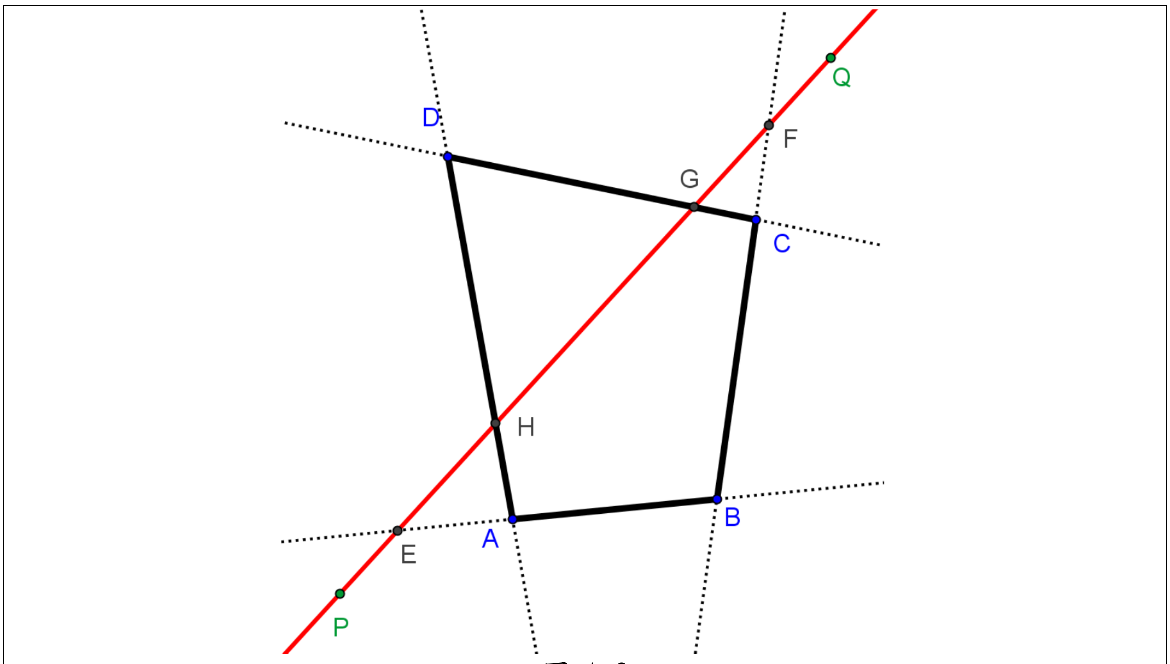


圖 A-3

試證明：$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。

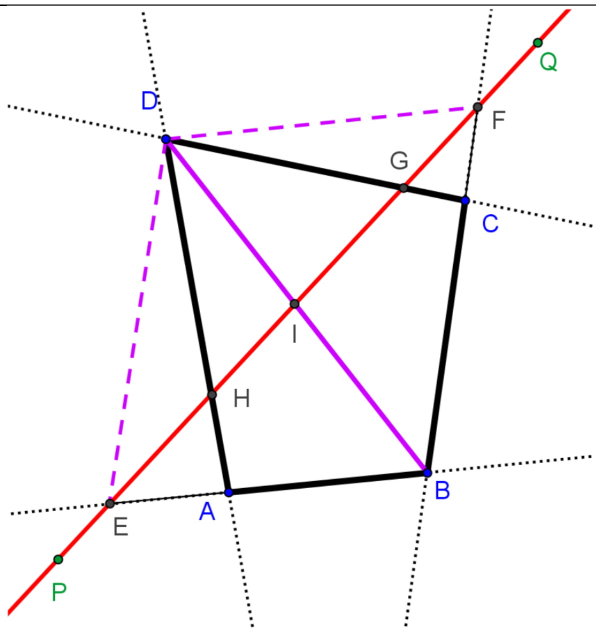


圖 A-4

證明：

連接 $\overleftrightarrow{BD}$ 交 $\overleftrightarrow{PQ}$ 於一點 I ，再連接 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ ，則

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\Delta AEH}{\Delta EBH}\times\frac{\Delta EBH}{\Delta EDH}\times\frac{\Delta EDH}{\Delta AEH}=1\cdots ①;$$

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IB}}=\frac{\Delta BFI}{\Delta CFI}\times\frac{\Delta CFI}{\Delta DFI}\times\frac{\Delta DFI}{\Delta BFI}=1\cdots ②;$$

由①×②即得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$ ，故得證原題。

Q.E.D.

(3) 凹四邊形

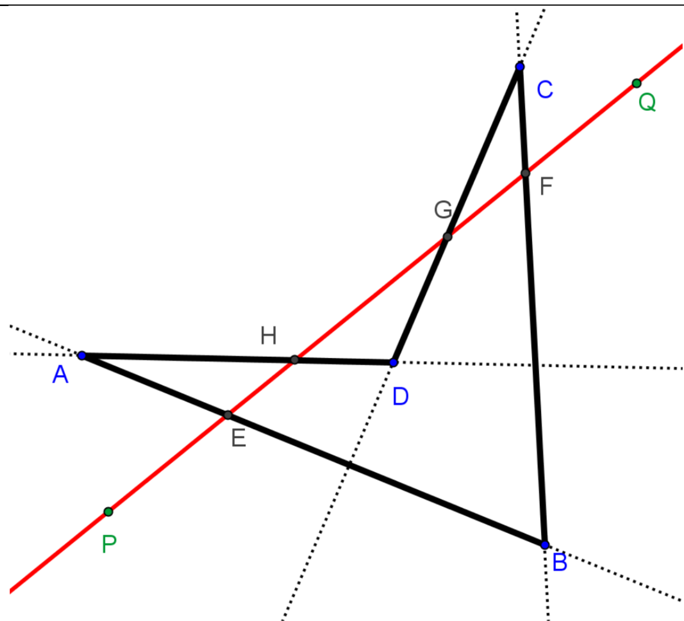


圖 A-5

試證明：$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$。

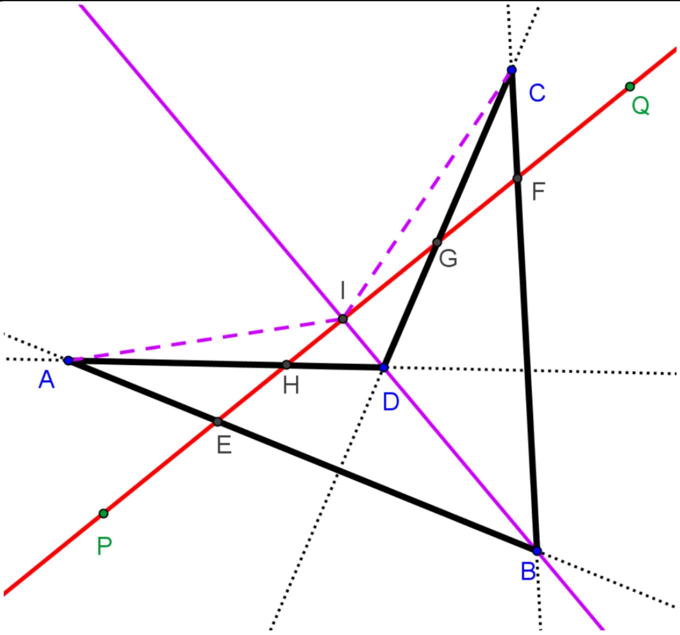


圖 A-6

證明：

連接 $\overleftrightarrow{BD}$ 交 $\overleftrightarrow{PQ}$ 於 I 點，再連接 $\overline{IA}$ 與 $\overline{IC}$，則

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\Delta AEI}{\Delta EBI}\times\frac{\Delta EBI}{\Delta IDE}\times\frac{\Delta IDE}{\Delta AEI}=1\cdots ①;$$

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{IB}}=\frac{\Delta BFI}{\Delta CFI}\times\frac{\Delta CFI}{\Delta DFI}\times\frac{\Delta DFI}{\Delta BFI}=1\cdots ②;$$

由①×②即得 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}\times\dfrac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\times\dfrac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=1$，故得證原題。

Q.E.D.

(4) 凸五邊形

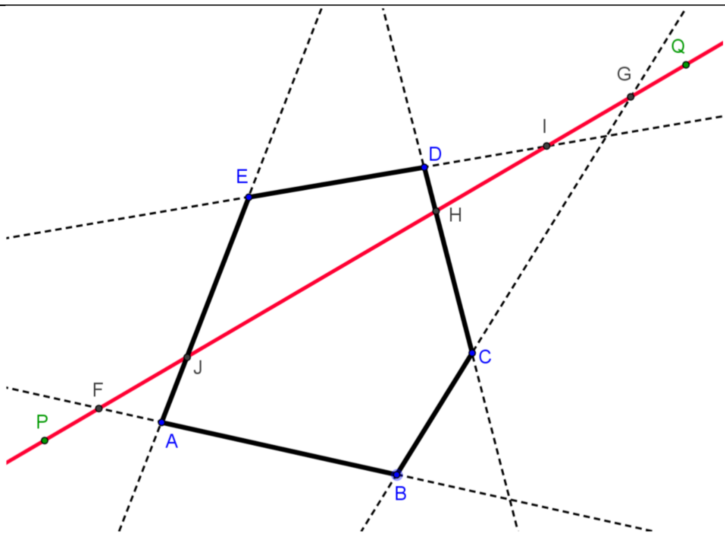


圖 A-7

試證明：$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\dfrac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\dfrac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1$。

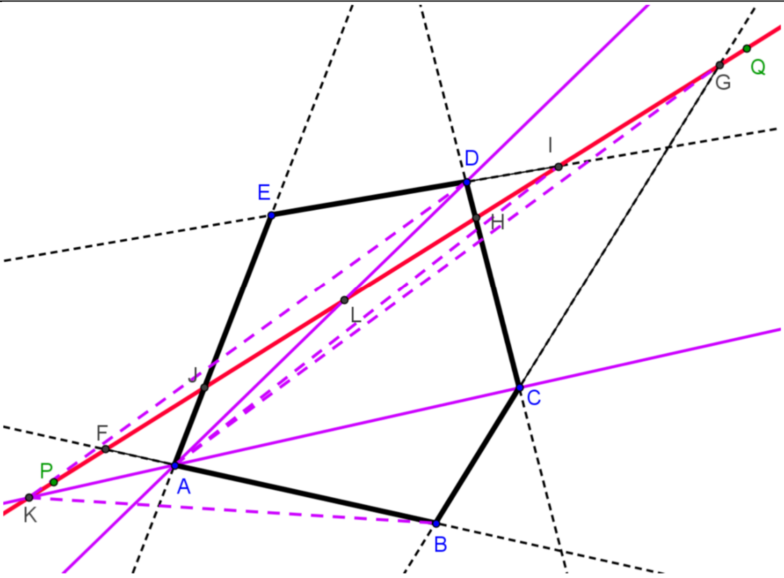


圖 A-8

證明：

(i) 連接 $\overleftrightarrow{AC}$ 交 $\overleftrightarrow{PQ}$ 於 K 點，連接 $\overleftrightarrow{AD}$ 交 $\overleftrightarrow{PQ}$ 於 L 點，連接 $\overline{BK},\overline{AI},\overline{AG}$ 與 $\overline{DK}$，則

(ii) 考慮 ΔABC，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CK}}{\overline{KA}}=\dfrac{\Delta AKG}{\Delta BKG}\times\dfrac{\Delta BKG}{\Delta CKG}\times\dfrac{\Delta CKG}{\Delta AKG}=1\cdots①$;

(iii) 考慮 ΔACD，$\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\dfrac{\overline{DL}}{\overline{LA}}=\dfrac{\Delta AKL}{\Delta CKL}\times\dfrac{\Delta CKL}{\Delta DKL}\times\dfrac{\Delta DKL}{\Delta AKL}=1\cdots②$;

(iv) 考慮 ΔADE，$\dfrac{\overline{AL}}{\overline{LD}}\times\dfrac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\dfrac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=\dfrac{\Delta ALI}{\Delta DLI}\times\dfrac{\Delta DLI}{\Delta ELI}\times\dfrac{\Delta ELI}{\Delta ALI}=1\cdots③$;

(v) 由①×②×③即得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BG}}{\overline{GC}}\times\dfrac{\overline{CH}}{\overline{HD}}\times\dfrac{\overline{DI}}{\overline{IE}}\times\dfrac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=1$，故得證原題。

Q.E.D.

評語

本作品推廣三角形的孟氏定理和西瓦定理至一般 n 邊形，並將西瓦定理中的定點改為圓、三角形或四邊形而得到類似的結果，最後將西瓦定理推廣至四面體或 n 頂點多面體上封閉路徑上，非常有想法，得到非常多結果，也有困難度。但所用的技巧不深，因此有些證明太繁雜，應有改進空間，另外，本作品的成果，除了最後空間中封閉路徑的西瓦定理外，其他結果皆在預料之中。