

中華民國第 53 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理科

第三名

040113

探究棒球棒的甜蜜點

學校名稱：國立虎尾高級中學

作者： 高一 魏紫芸 高一 楊甯安 高一 郭愉瑄	指導老師： 蘇裕年
---	------------------

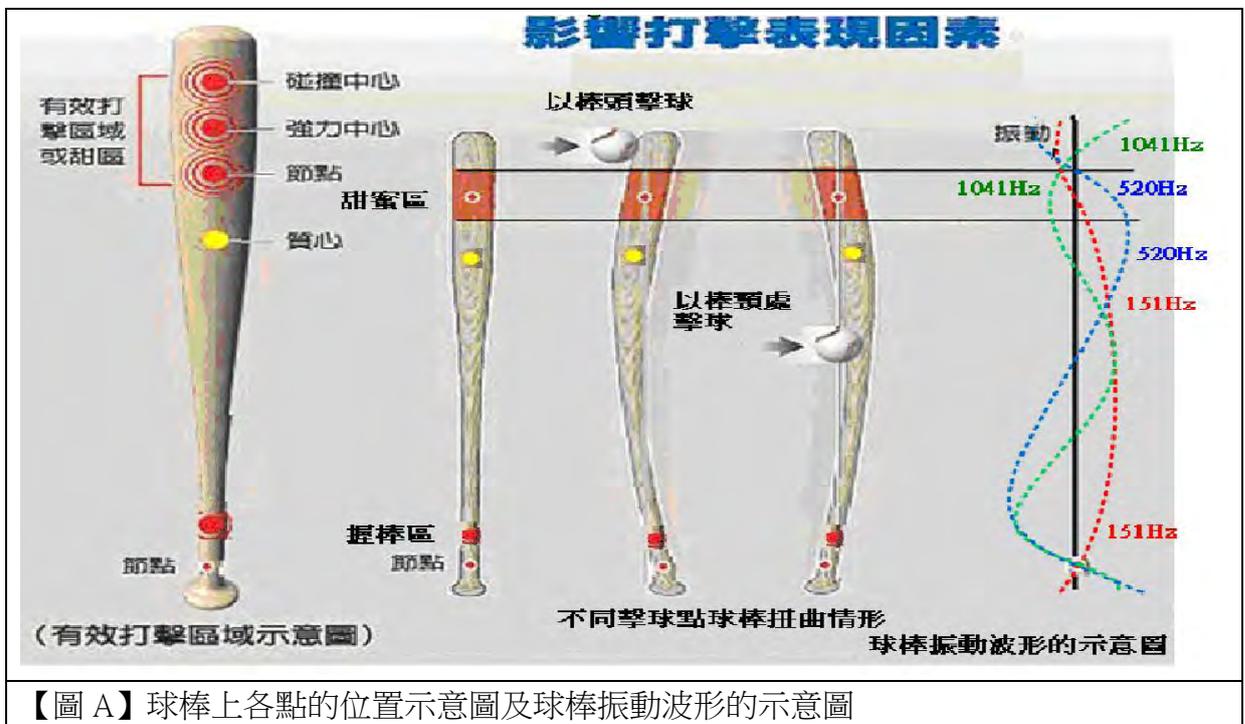
關鍵詞：甜蜜點、節點、恢復係數

探究棒球棒的甜蜜點

摘要

根據台北市體育學院運動器材科技研究所劉強教授指出甜蜜點(範圍)包含三個定義的區域：(圖 A 改繪自聯合報)^[1]

- 一、碰撞中心：擊球時握把無撞擊感的位置。(物理學上甜蜜點的定義點又稱『振盪中心』^[2] (the center of oscillation))
- 二、強力中心：擊球後產生最高速球的位置。(恢復係數最大)
- 三、節點：擊球後握把無振動感的位置。



我們利用 PASCOS 音頻接收器，測量到標準的比賽用球棒，受撞擊時會產生三個較明顯的振盪頻率(如圖 A-右)。好的手工球棒會將這三個震波頻率的節點，安排在甜蜜區附近，使打擊者敲中該處時，球棒振動最小，握棒處受力最小，球與棒間的恢復係數最大，擊出的棒球可以飛得最遠。這個點(區域)就稱之為甜蜜點(The sweet spot)。

壹、研究動機

大家都有打棒球的經驗？當我們揮棒時，若球棒某個位置剛好打中球心時，我們感覺手的振動很小，甚至感覺不到球棒有受力；接著球就會很快的速度飛出，打擊者會感受到打擊的快感，稱之為甜蜜點，任何打過棒球的人都會認同這個名稱。

網路上說『甜蜜點』的成因錯中複雜，可能和棒材、打擊者姿勢、棒的加工方式……有關，又說要深入研究它的成因，可能需要博士級的學識及昂貴的檢測儀器。

我們初生之犢，想以學校現有的儀器、高中生能懂的數學式及一般普羅大眾能夠理解的物理概念，來探討棒球熱潮的話題；希望每位棒球的愛好者能夠將我們的新發現應用於實際的棒球打擊中。

貳、原理

一、單擺週期 (圖 2-1)

將給出一個簡單的擺力矩的總扭矩。

$$\tau = -r \times F_g = -L \sin \theta \times m g$$

對於一個小的角度值

(θ 很小時, $\sin \theta \approx \theta$)

$$\vec{\tau} = -L \sin \theta \times m g$$

$$\approx -L \theta \times m g (\sin \theta \approx \theta)$$

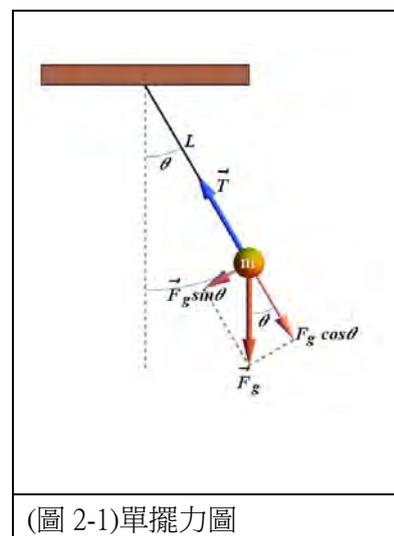
我們可以看到，轉矩 τ 作用在物體上是成比例的角位移 θ 帶有負號，因此，這扭矩會產生簡諧運動。如果 I 是轉動慣量，和 α 是其角加速度

$$\vec{\tau} = I \alpha = -L \sin \theta \times m g$$

$$\alpha = - \left(\frac{m g L}{I} \right) \theta$$

$$\omega^2 = \frac{m g L}{I}$$

對於單擺 $I = m L^2$ ，因此，這樣的擺的角頻率是



(圖 2-1)單擺力圖

$$\omega = \sqrt{\frac{m g L}{m L^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2 \pi}{T}$$

$$\text{得 } T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

二、物理擺(複擺)週期 (圖 2-2)

一個真正的球棒，通常被稱為一個物理擺，擺有一個複雜的質量分佈。考慮一個物理擺，傾斜角 θ 處擺下。

作用於球棒的力矩為

$$\tau = -F_g (h \sin \theta)$$

對於一個小的角度值 θ

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\tau = -F_g (h \theta)$$

I 是轉動慣量， α 是其角加速度

$$\tau = I \alpha = -m g (h \theta)$$

$$\alpha = - \left[\frac{(m g) h}{I} \right] \theta$$

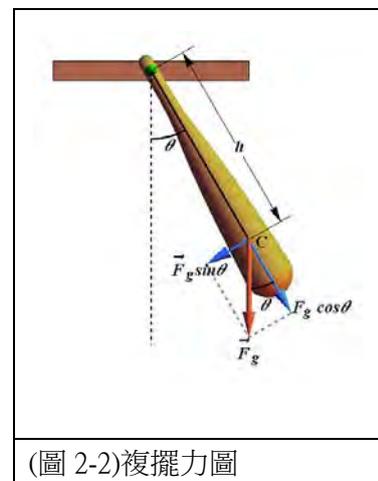
$$\omega^2 = \frac{m g h}{I}$$

這個複擺的角頻率

$$\omega = \sqrt{\frac{m g h}{I}} = \frac{2 \pi}{T}$$

得

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{m g h}}$$



(圖 2-2)複擺力圖

三、複擺週期與單擺週期相等時的擺長

【註】以下數學式改自輔大實驗手冊，用凱特(Kater)擺測重力場 g ^[3]

複擺中的懸掛點 O 及 P，重心 C， h_1 及 h_2 分別是以 O 和 P 到重心的距離， $h_1+h_2=L$ 。

T_1 、 T_2 分別是以 O 及 P 作為懸點所量到的週期，根據複擺的公式 (圖 2-3)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgh_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{mgh_2}}$$

$$(I_1 = I_{cm} + mh_1^2, \quad I_2 = I_{cm} + mh_2^2)$$

$$\text{得 } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgh_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + mh_1^2}{mgh_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + h_1^2}{gh_1}}$$

$$\Rightarrow gh_1 T_1^2 = 4\pi^2 \left(\frac{I_{cm}}{m} + h_1^2 \right) \quad (1)$$

$$\text{同理 } gh_2 T_2^2 = 4\pi^2 \left(\frac{I_{cm}}{m} + h_2^2 \right) \quad (2)$$

(1)(2)相減 消去 $\frac{I_{cm}}{m}$ (因為 I_{cm} 和 m 無法直接測得)

$$\Rightarrow g(h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2) = 4\pi^2 (h_1^2 - h_2^2)$$

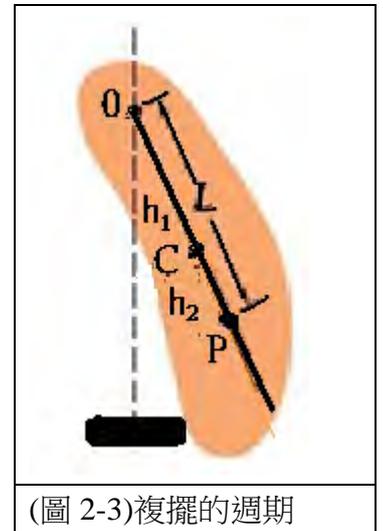
$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2 (h_1^2 - h_2^2)}{(h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2)} \quad (3)$$

$$\text{由(3): } \frac{4\pi^2}{g} = \frac{(h_1 T_1^2 - h_2 T_2^2)}{(h_1^2 - h_2^2)} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(h_1 + h_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)} \quad (4)$$

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2(h_1 + h_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)}} \quad (5)$$

由於 $h_1 + h_2 = L$ (OP 的距離)，若調整使 $T_1 = T_2 = T_0$ ，

$$\text{則(5)可簡化為 } g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2} \quad (6)$$

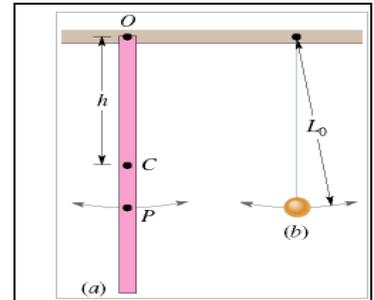


(圖 2-3)複擺的週期

可得 $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ (7)

【註】取懸點 O 球棒擺動週期與長度 L_0 的單擺擺動週期相同，O 到甜蜜點 P 的長度恰為單擺擺長的長度，這是巧合？或是另有物理意義？

四、球以水平方向撞擊均勻棒為例，推論球打中甜蜜點 P 時，對握棒(O)的打擊者所受的合力會為零，試證之 (圖 2-4)



(2-4)複擺與單擺對照圖
(圖片來源)Halliday 第 15-17 頁^[4]

(一)、水平力撞擊力 F 作用於 P 點上，棒質量 m

棒所受的加速度 $a = \frac{F}{m}$

(二)、均勻木棒質心 C 則

$\overline{OC} = \frac{L}{2}$, $\overline{OP} = \frac{2L}{3}$ (詳見註)

$\Rightarrow \overline{CP} = \frac{2L}{3} - \frac{L}{2} = \frac{L}{6}$

【註】由複擺公式 $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$ ($I = \frac{1}{3}mL^2$) ($h = \frac{L}{2}$)

可得 $T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$ 相當於單擺 $L_0 = \frac{2L}{3}$

(三)、木棒受力矩作用後的角加速度

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F \left(\frac{L}{6}\right)}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{2F}{mL}$$

(四)、O 點所受的淨加速度 a_0

$$a_0 = \frac{F}{m} - \frac{1}{2}\alpha L = \frac{F}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{2F}{mL}\right)L = 0$$

打中 P 點的(甜蜜點)打擊者，依上式推算，**打擊者握把處所受的合力等於零。碰撞中心(振盪中心)的定義：『擊球時握把無撞擊感的位置』。**

五、利用撞擊擺的方式：算出球撞擊球棒後的恢復係數並作圖表示^[5]

$$e = \frac{\text{遠離速度}}{\text{接近速度}} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

叁、研究目的

- 一、槌子輕敲棒球棍，體驗不同敲擊點，棒球棍振動是否相同？
- 二、承上敲擊法，利用 PASCO 聲音感測器，分析不同敲擊點，球棒所產生的聲波各頻率分布狀況，作為各項檢測及推理的依據。
- 三、懸吊球棒的握把處，將棒球棍視作複擺，找出其擺動週期。
- 四、承上，用鐵珠及棉繩製作成單擺，調整擺長使單擺週期與『三』之複擺週期一致。測量單擺擺長，此一擺長，是否就是球棒的握點至『振盪中心』的距離？
- 五、承上，改『振盪中心』當懸點，讓棒球棍擺動，其週期是否沒有變動？
- 六、以一定速度的棒球去撞擊可自由擺動的懸吊棒球棍，當球撞擊棒球棍不同位置時，求得的恢復係數有何差異？
- 七、承上，改用棒球棍去撞擊球，一樣求得的恢復係數有何差異？
- 八、承上六、七找出恢復係數最大的球棒位置，是否就是『強力中心』的位置？

肆、研究設備及器材

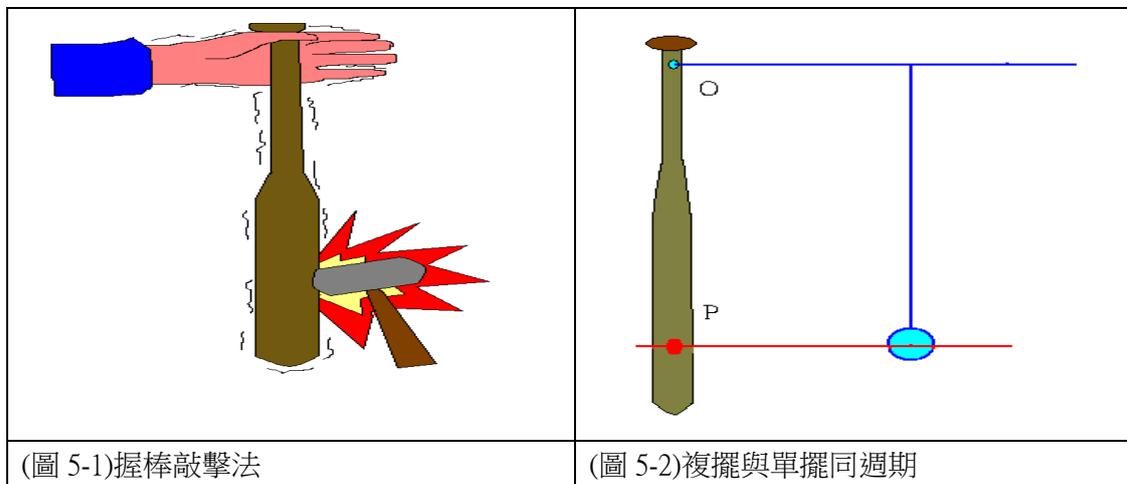


(圖 4-1)
球棒、球、量尺、槌子、單擺、攝影機、照相機、DataStudio 介面、音頻接收器

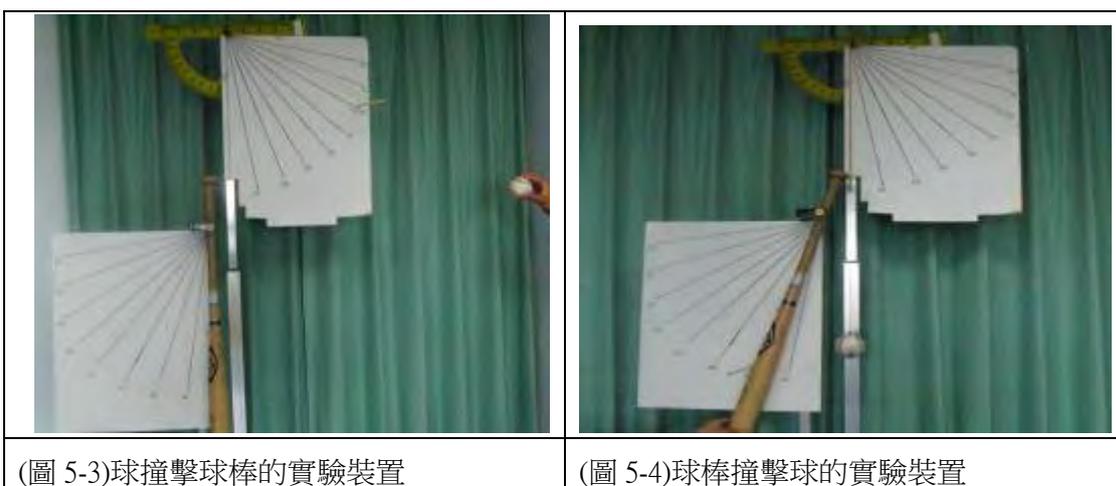


(圖 4-2)
自製可量角度碰撞儀
可夾住球棒支點的旋轉器
可改變擺球長度的伸縮架

伍、研究過程及方法



- 一、以 O 為支點，P 為敲擊點；左手按住 O 點，右手拿槌子敲擊 P 點，感受球棒振動時，左手受力狀況。(圖 5-1)
- 二、以 O 為支點，P 為敲擊點，以聲音接收器，測得不同撞擊點，所產生的聲音頻譜。(圖 5-1)
- 三、以 O 為支點，P 為震盪中心；將棒球看成複擺，另用一單擺使複擺的週期等於單擺的週期則單擺的擺長將會是甜蜜點 P 到支點 O 的距離(圖 5-2)
- 四、利用撞擊擺的方式：
 - (一)、以球的中心點去擊球棒 P 點，求其恢復係數。(圖 5-3)
 - (二)、以球棒 P 點去擊球中心點，求其恢復係數。(圖 5-4)



陸、研究結果

一之 1、(雜牌棒)以 O 為握棒點，P 為敲擊點，量測 OP 距離。連續測 5 次，求其平均

(表 6-1) 木棒上各點的相對位置

支點	支點 1	支點 2	支點 3	支點 4
(圖 6-1)對應點	1	2	3	4
握棒點(O)坐標	6.5	10.0	13.0	16.2
敲擊點(P)坐標	72.5	69.0	65.9	64.2
OP 距離(cm)	66.0	59.0	52.9	48.0
<p>【說明】以握棒端(O)在上，棒頭朝下，棒的上端為坐標原點，分別記錄握棒點、敲擊點坐標，計算其間距。</p>				



(圖 6-1 球棒各點位置)

【結果】

- (一)、握棒點固定，分別敲擊球棒不同點，每個打擊點的聲音扎實度不同，而其中某處聲音最為清脆且手感的振動最小處，可能為甜蜜點的範圍。
- (二)、握棒點的不同，敲擊棒球棍不同位置，手感到振動最小處也不同。當支點向下移時，手感振動最小處(甜蜜點)會上移，即握棒點與甜蜜點距離縮小。
- (三)、敲擊球棒的點和握棒點很靠近時，手感受到的振動越大
- (四)、不同的支點，手感覺到振動最小之處會在某一個固定範圍內，手感覺到振動最小之處亦即疑似甜蜜點的地方。

一之 2、(捷聲 A 棒)以 O 為握棒點，P 為敲擊點，量測 OP 距離。連續測 5 次，求其平均

(表 6-2) 木棒上各點的相對位置

支點	支點 1	支點 2	支點 3	支點 4
(圖 6-2)對應點	10	12	18	24
握棒點(O)坐標	10cm	12cm	18cm	24cm
敲擊點(P)坐標	68cm	70cm	70cm	70cm
OP 距離(cm)	58cm	58cm	52cm	46cm



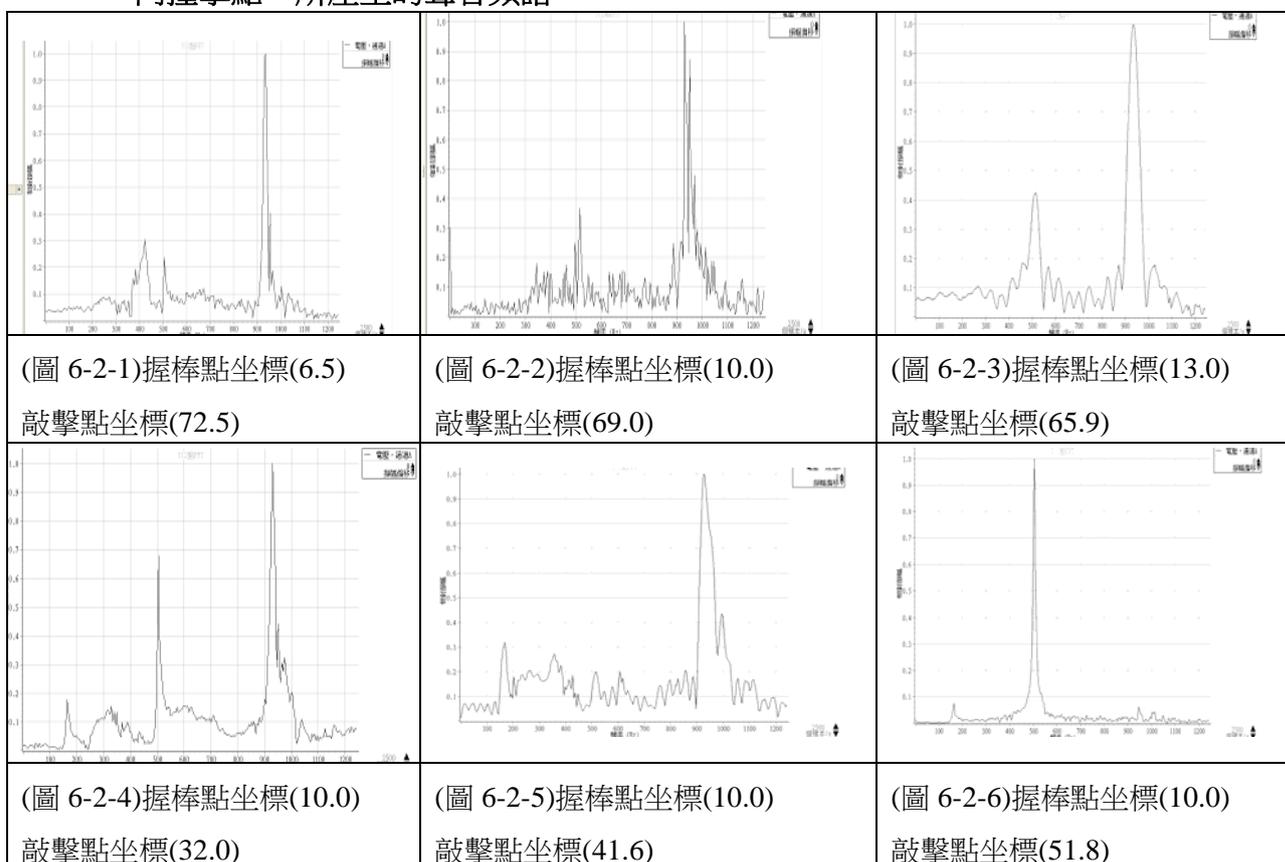
(圖 6-2 球棒各點位置)

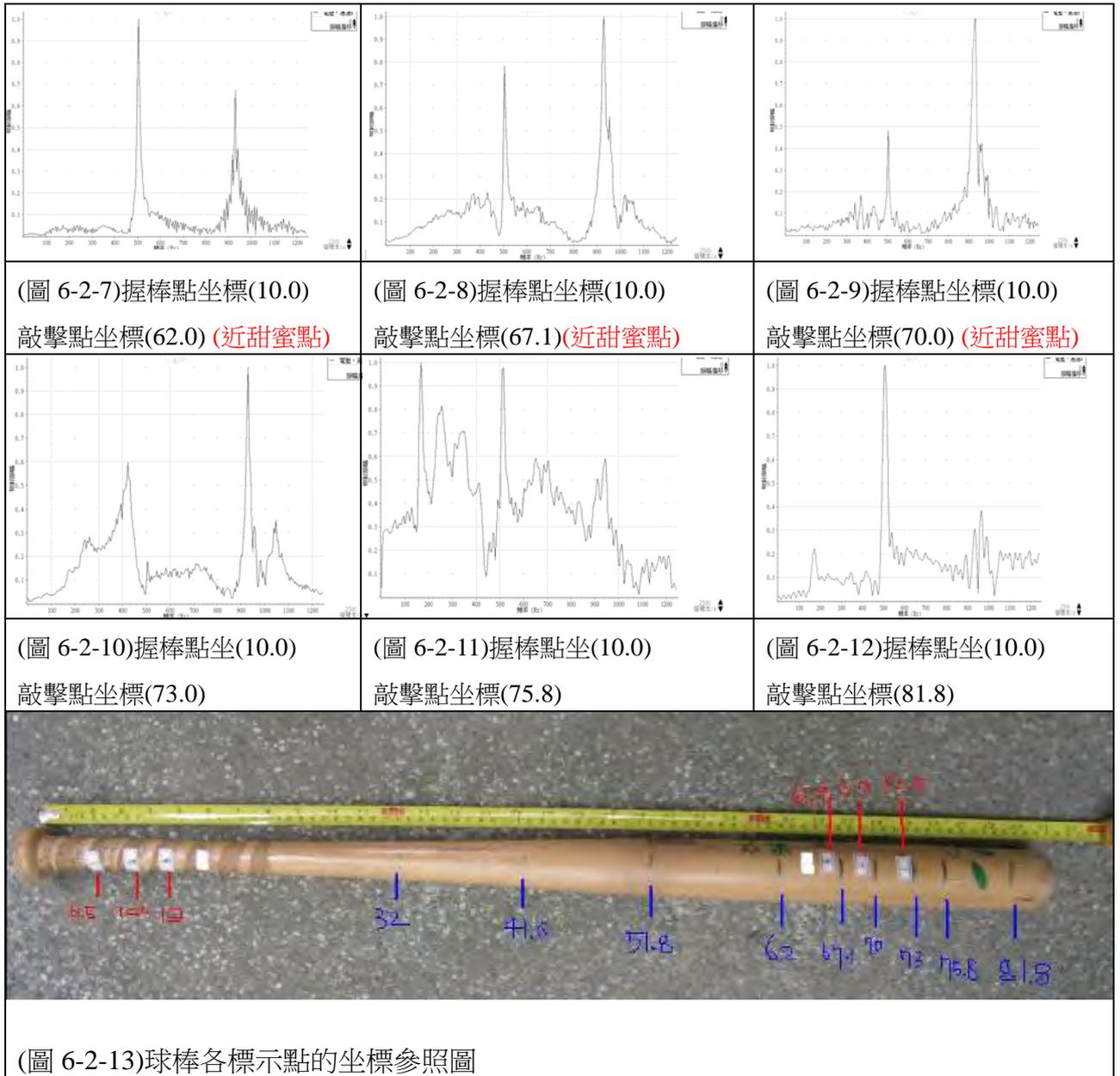
【說明】以握棒端(O)在上，棒頭朝下，棒的上端為坐標原點，分別記錄握棒點、敲擊點坐標，計算其間距。

【結果】

我們使用台北體院提供給我們的捷聲 640-A 球棒，當我們從座標 10cm 處以 2 公分為間距，開始下找，可以發現握棒點在座標 10cm 時，它的甜蜜點對應點為座標 68cm 處，；若握棒點是座標 12cm~24cm 處，其甜蜜點都在座標為 70cm 這點。難道這是專業級手工球棒的特點？

二之 1、雜牌棒，以 O 為握棒點，P 為敲擊點，以 PASCO 聲頻接收器，測得不同撞擊點，所產生的聲音頻譜。

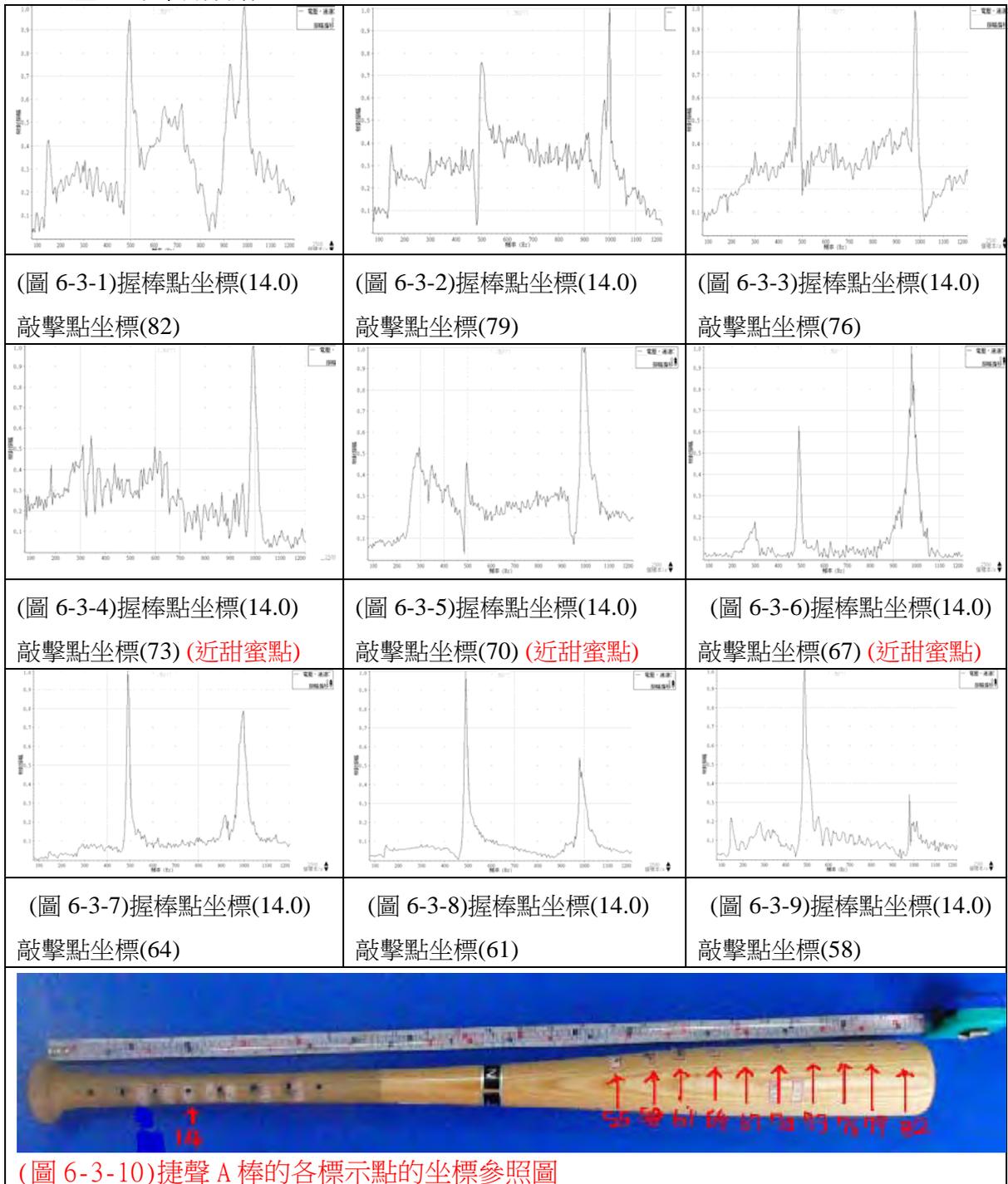




- (一)、以聲頻接收器測量到：不同的各點在敲擊靠近甜蜜點的時候，**最大峰值**，大多位於 920Hz 之處，次高的峰值約在 510Hz 附近。
- (二)、**敲擊點越靠近球棒的棒頭時**，最大峰值會移到 510Hz 附近。
- (三)、原先實驗一找出振動最小的 P 點其波譜(如圖 6-2-7) (如圖 6-2-8) (如圖 6-2-9)這些波譜的特色就是波型較平順(鋸齒振幅少)，510Hz 及 920Hz 分配較平均(意思是有兩個較大的峰值)

二之 2、捷聲 A 棒【棒點 14cm】棒長 85cm 質心點 56cm 節點 6cm

以 O 為握棒點，P 為敲擊點，以 PASCO 聲頻接收器，測得不同撞擊點，所產生的聲音頻譜。



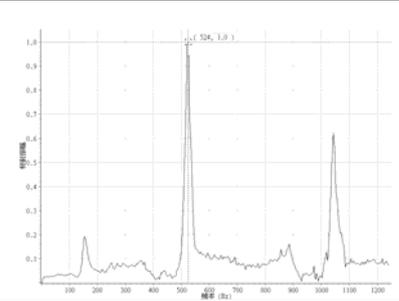
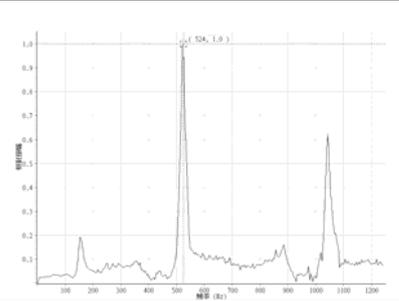
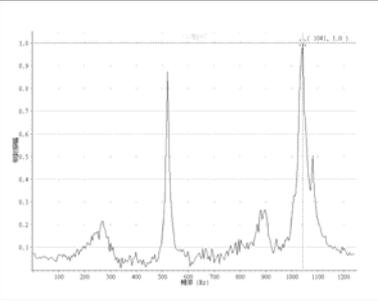
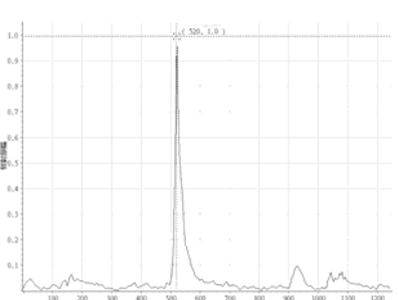
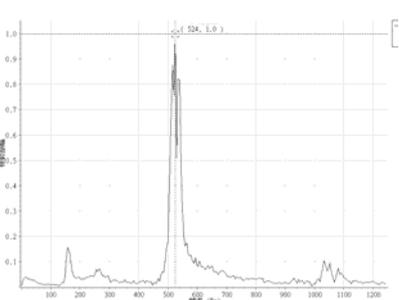
- (一) 此棒敲擊處靠近棒頭端則 995Hz 頻率強度略大於 490Hz 的頻率之強度
- (二) 此棒敲擊處甜蜜點處則 995Hz 頻率強度較 490Hz 的頻率之強度為大
- (三) 越靠棒頭處處則 490Hz 的頻率強度會逐漸增大。

二之 3、捷聲 B 棒【握棒點 14cm】棒長 85cm 質心點 56cm 節點 6cm

<p>(圖 6-4-1)握棒點坐標(14.0) 敲擊點坐標(81) (敲棒頭) 感覺手很麻(3 級)</p>	<p>(圖 6-4-2)握棒點坐標(14.0) 敲擊點坐標(70) (敲甜蜜點)趨近沒感覺(1 級)</p>	<p>(圖 6-4-3)握棒點坐標(14.0) 敲擊點坐標(59) 感覺有點麻 (2 級)</p>
		<p>【註】我們加入手感的振動感分 1-5 共五級(1 最不麻，5 級最麻)</p>
<p>(圖 6-4-4)握棒點坐標(14.0) 敲擊點質心坐標(56) (敲質心) 感覺中等振動感 (4 級)</p>	<p>(圖(6-4-5)握棒點坐標(14.0) 敲擊點坐標(46) 靠近握棒點 感覺麻到想要丟棒(5 級)</p>	
<p>(圖 6-4-6)捷聲 B 棒各標示點的坐標參照圖</p>		

- (一) 由棒頭依序往握棒處敲,發現最大峰值的頻率會有規率性，棒頭端是 520Hz 頻率，甜蜜點處是 1041Hz，靠近棒頸處時最大峰值是 151Hz
- (二) 打擊時握棒手的麻不麻似乎和低頻 151Hz 的強度成正相關。我們多次測試當低頻 151Hz 出現時，只要擊球點越靠近握把點，手麻的程度就越大。
- (三) 我們嚐試將握棒點在座標 14cm 的右手放開，只剩下左手握把點約在 6cm 處，發現握棒左手完全不麻了。

二之 4、捷聲 B 棒【握棒點 6cm】(棒長 85cm 質心點 56cm 節點 6cm)

		
(圖 6-5-1)握棒點坐標(6.0) 敲擊點坐標(81) (敲棒頭) 棒轉動感很小	(圖 6-5-2)握棒點坐標(6.0) 敲擊點坐標(70) (敲甜蜜點) 趨近於沒感覺	(圖 6-5-3)握棒點坐標(6.0) 敲擊點坐標(59) 移動感很小
		【註】握棒點 6cm 處所產生的波譜穩定且再現性高，我們可由此現象推論，此棒的自然頻率為 520Hz、1041Hz。(還有一個 151Hz 敲到棒頸才會出現)
(圖 6-5-4)握棒點坐標(6.0) 敲擊點坐標(56) (敲質心) 振動稍大	(圖 6-5-5)握棒點坐標(6.0) 敲擊點坐標(46) 靠近握棒點 移動振動兼而有之	

球棒各部位介紹



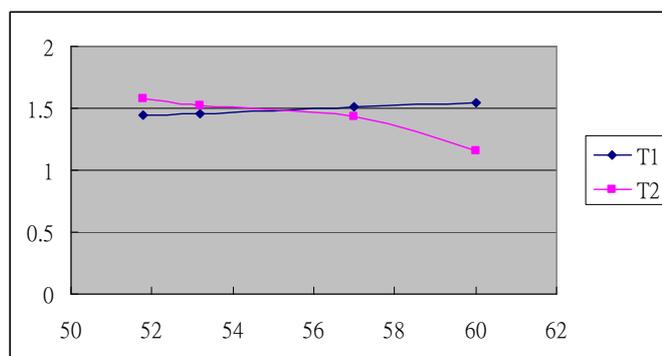
(圖 6-5-6)捷聲 B 棒各標示點的坐標參照圖

- (一) 握棒點在 6cm 處，不論敲擊棒的何處，木棒移動、轉動量都變小，幾乎找不到振動使手發麻的撞擊點
- (二) 我們可以將此處視為各頻率形成波動時，此處為握把處的常見的頻率 151Hz、520Hz、1041Hz 的共同節點

三之 1、(雜牌棒)以 O 為支點， P 為甜蜜點，將棒球看成複擺，測量此球棒擺動週期 T_1 ， $T_1 = 2\pi\sqrt{L/g}$ 可算出對應的單擺擺長 L， $\overline{op} = L$ ，再以 P 當支點，求其週期 T_2

(表 6-3(雜牌棒)複擺週期與單擺擺長之關係)

支點	1	2	3	4
複擺週期(T_1)(sec)	1.55	1.51	1.46	1.44
$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$	60.0	57.0	53.2	51.8
算出 L(cm)				
改以 P 點當懸點的週期 (T_2)(sec)	1.16	1.43	1.52	1.58



(圖 6-6-1) 擺長和複擺週期 T_1 與 T_2 之對照圖



(圖 6-6-2)球棒各標示點位置圖

【結果】單、複擺相互比對下，以支點在『點 2』至『點 3』之間，較符合此推論，其兩條趨勢線的交叉點約在 55.1cm 處。甜蜜點坐標 66.1cm，距棒頭端 19.9cm

三之 2、(捷聲 A 棒) 以 O 為支點，P 為甜蜜點，將棒球看成複擺，測量此球棒

擺動週期 T_1 可算出對應的單擺擺長 $T_1 = 2\pi\sqrt{L/g}$ 長 L ， $\overline{op} = L$ ，

找出 P 點，再以 P 當支點，讓棒擺動求其週期 T_2

(表 6-4(捷聲 A 棒)複擺週期與單擺擺長之關係)

支點(cm)	10	12	14	16	18	21	24
複擺週期 (T_1)(sec)	1.58	1.55	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41
$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 算出 L(cm)	62.0	59.7	56.7	55.2	53.7	51.5	49.4
改以 P 點當懸點的週期 (T_2)(sec)	1.44	1.44	1.48	1.46	1.44	1.44	1.42
P 點的坐標(cm)	72.0	71.1	70.7	71.2	71.7	72.5	73.4

(圖 6-6-3)擺長與複擺週期 T_1 與 T_2 的對照圖

【註】 捷聲球棒，有一特點，不論 P 點在何處，複擺的週期都在 1.44sec 附近。對應的 P 點坐標，也都差不多。

(圖 6-6-4)球棒各標示點位置圖

【結果】 單、複擺相互比對下，以周期交叉在 1.44 秒，不論棒的支點在何處，甜蜜點對應於球棒的坐標是 72-70cm 處。距棒頭端 13-15cm

四、利用撞擊擺的方式：求球撞擊球棒 P 點後的恢復係數

(一)、以普通雜牌棒球撞擊靜止的雜牌球棒

$$m_1(\text{球}) \text{自高度 } h, \text{ 擺下至最低點時, 速度 } v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$$

撞擊靜止的棒球棍($v_2=0$)，碰撞後兩者速度分別為 v_1' 及 v_2' ，其中

$$v_1' = \sqrt{2gh_1} \quad v_2' = \sqrt{2gh_2} \quad (h_1=L_{1c}(1-\cos\theta_1)) \quad (h_2=L_{2c}(1-\cos\theta_2))$$

(L_{1c} 是球的懸點到球質心距離； L_{2c} 是球棒的懸點到球棒的質心距離)

撞擊不同的位置，以 O 為支點，P 為撞擊點，P 點距棒球頭端點為 X 公分，
求出其恢復係數 e 值，並作(X-e)圖。

球棒懸點坐標在 11cm 處

(球的懸點為坐標原點，球的質心坐標為__95__cm)

(球棒的懸點為坐標原點，球棒的質心坐標為__53__cm)

球自角度 60 度釋放 v_1 =__3.05__m/s

X 公分	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
距懸點距離 (公分)	72	69	66	63	60	57	54	51	48	45
球棒最大擺角	15	16	19	18	19	17	17	15	14	13
球反跳最大角 度	14	15	15	17	16	15	14	13	11	10
碰後球棒速	0.59	0.63	0.75	0.71	0.75	0.67	0.67	0.59	0.56	0.52
碰後球速	-0.74	-0.80	-0.80	-0.90	-0.85	-0.80	-0.74	-0.69	-0.58	-0.53
恢復係數(e)	0.44	0.47	0.51	0.53	0.52	0.48	0.46	0.42	0.37	0.30

【結果】

1、數據顯示恢復係數最大值為 0.52-0.53，強力中心距離棒頭約 12-15cm 處

(二)、以開南校隊使用的棒球撞擊靜止的捷聲球棒 A

球棒懸點坐標在 14cm 處

(球的懸點為坐標原點，球的質心坐標為__102__cm)

(球棒的懸點為坐標原點，球棒的質心坐標為_42.5_cm)

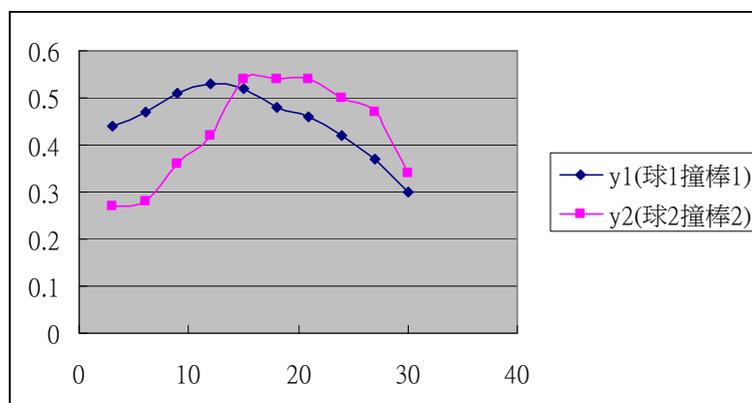
球自角度 60 度釋放 $v_1 = \underline{\underline{3.16}} \text{ m/s}$

(表 6-6)球棒懸點坐標在 14cm 處，開南球撞擊靜止的捷聲球棒 A(圖 6-7 紅色線)

X 公分	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
距懸點距離 (公分)	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41
球棒最大擺角	18	19	20	20	20	20	20	18	18	15
球反跳最大角 度	4	4	8	11	18	18	18	17	15	10
碰後球棒速	0.64	0.67	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71	0.64	0.64	0.53
碰後球速	-0.22	-0.22	-0.44	-0.61	-0.99	-0.99	-0.99	-0.93	-0.83	-0.55
恢復係數(e)	0.27	0.28	0.36	0.42	0.54	0.54	0.54	0.50	0.47	0.34

【結果】

- 1、數據顯示恢復係數最大值為 **0.54**，強力中心距離棒頭約 15-21cm 處
- 2、以距棒球頭的距離 x 為橫軸，恢復係數(e)為縱軸，利用 Excel 折線圖找出 (x-e)關係圖



(圖 6-7)相同球速碰撞球棒不同位置其恢復係數之關係

(三)、以普通雜牌球棒撞擊靜止的雜牌棒球

m_1 (棍)自高度 h ，擺下至最低點時，速度 $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}$

撞擊靜止的球($v_2=0$)，碰撞後兩者速度分別為 v_1' 及 v_2' ，其中

$v_1' = \sqrt{2gh_1}$ $v_2' = \sqrt{2gh_2}$ 撞擊不同位置，以 O 為支點， P 為敲擊點，

P 點距棒球頭端點為 X 公分，求出其恢復係數 e 值，並作(X-e)圖

球棒懸點坐標在 11cm 處

(球的懸點為坐標原點，球的質心坐標為__95__cm)

(球棒的懸點為坐標原點，球棒的質心坐標為__53__cm)

球棒自角度 17 度(質心)(棒緣緊貼 20 度線)釋放 $v_1 = \underline{\underline{0.67}} \text{ m/s}$

(表 6-7) 球棒懸點坐標在 11cm 處，雜牌球棒撞擊雜牌球(圖 6-8 藍色線)											
X 公分	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
距懸點距離 (公分)	72	69	66	63	60	57	54	51	48	45	42
碰後球棒最大擺角	無法用肉眼看出有何差別，我們就取 12 度為測量值										
碰後球最大角度	17	17	16	18	16	16	16	15	14	13	12
碰後球棒速	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48
碰後球速	0.90	0.90	0.85	0.95	0.85	0.85	0.85	0.80	0.74	0.69	0.64
恢復係數	0.63	0.63	0.55	0.70	0.55	0.55	0.55	0.48	0.39	0.31	0.24

【結果】

1、橫軸表示撞擊位置，縱軸表示恢復係數，實驗結果是距離棒頭約 12cm 處

(四)、以球棒懸點坐標在 14cm 處

(球的懸點為坐標原點，球的質心坐標為__102__cm)

(球棒的懸點為坐標原點，球棒的質心坐標為_42.5__cm)

球棒自角度 17 度釋放 $v_1 = \underline{0.60}$ m/s

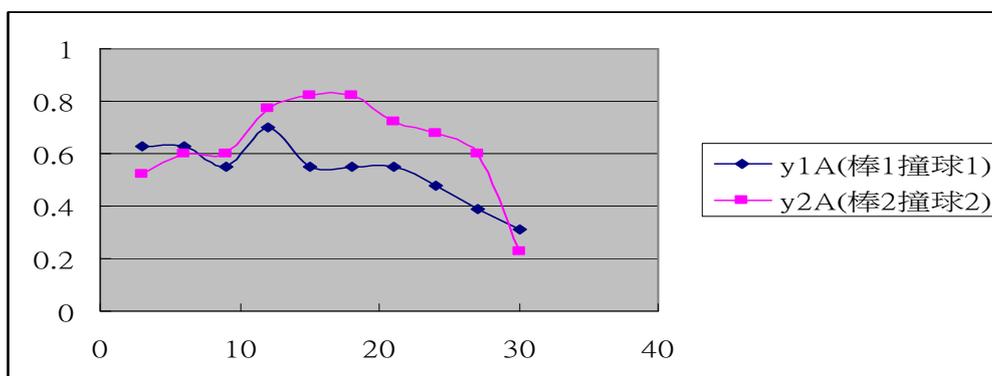
(表 6-8)球棒懸點坐標在 14cm 處，**捷聲球棒撞擊靜止的開南球(圖 6-8 紅色線)**

X 公分	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
距懸點距離(公分)	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41
球棒最大擺角	10	12	12	12	13	13	13	12	12	12
球反跳最大角度	12	15	15	17	18	18	17	16	15	11
碰後球棒速	0.36	0.47	0.47	0.47	0.50	0.50	0.50	0.47	0.47	0.47
碰後球速	0.67	0.83	0.83	0.93	0.99	0.99	0.93	0.88	0.83	0.61
恢復係數(e)	0.52	0.60	0.60	0.77	0.82	0.82	0.72	0.68	0.60	0.23

【結果】

1、橫軸表示撞擊位置，縱軸表示恢復係數，實驗結果是**距離棒頭約 15-18cm 處為此棒的甜蜜點**

2、以距棒球頭的距離 x 為橫軸，恢復係數(e)為縱軸，利用 Excel 折線圖找出 (x-e)關係圖



(圖 6-8)相同球棒以不同位置去碰撞球心其恢復係數之關係

柒、討論

一、依雜牌球棒的設計，我們認為握棒點應該在棒的坐標位置 11cm 處，我們重新檢視各實驗的甜蜜點位置可得到下列關係

實驗一、鐵鎚輕敲棒球棍，體驗不同敲擊點，其甜蜜點在 OP 長度為 59.0cm~52.9cm。取中間值為 56.0cm，甜蜜點坐標 67.0cm，距棒頭端 19.0cm。

實驗二、承上敲擊法，利用 PASCO 聲音感測器，分析不同敲擊點，其甜蜜點在 OP 長度為 60.0cm~52.0cm。取中間值為 56.0cm，甜蜜點坐標 67.0cm，距棒頭端 19.0cm。

實驗三、懸吊球棒的握把處，將棒球棍視作複擺，找出其擺動週期。求得 OP 長度為 55.1cm，甜蜜點坐標 66.1cm，距棒頭端 19.9cm。

實驗四、以一定速度的棒球去撞擊固定懸吊處的球棒棍，當球撞擊棒球棍不同位置時，分析其恢復係數得到的 OP 長度為 63.0cm，甜蜜點坐標 74.0cm，距棒頭端 12.0cm。

實驗五、改用棒球棍去撞擊球，一樣求其恢復係數。OP 長度為 63.0cm，甜蜜點坐標 74.0cm。距棒頭端 12.0cm。

二、依捷聲球棒的設計，我們認為握棒點應該在棒的坐標位置 14.0cm 處，我們重新檢視各實驗的甜蜜點位置可得到下列關係

實驗一、鐵鎚輕敲棒球棍，體驗不同敲擊點，其甜蜜點座標為 70.0cm 處，距棒頭端 15.0cm。

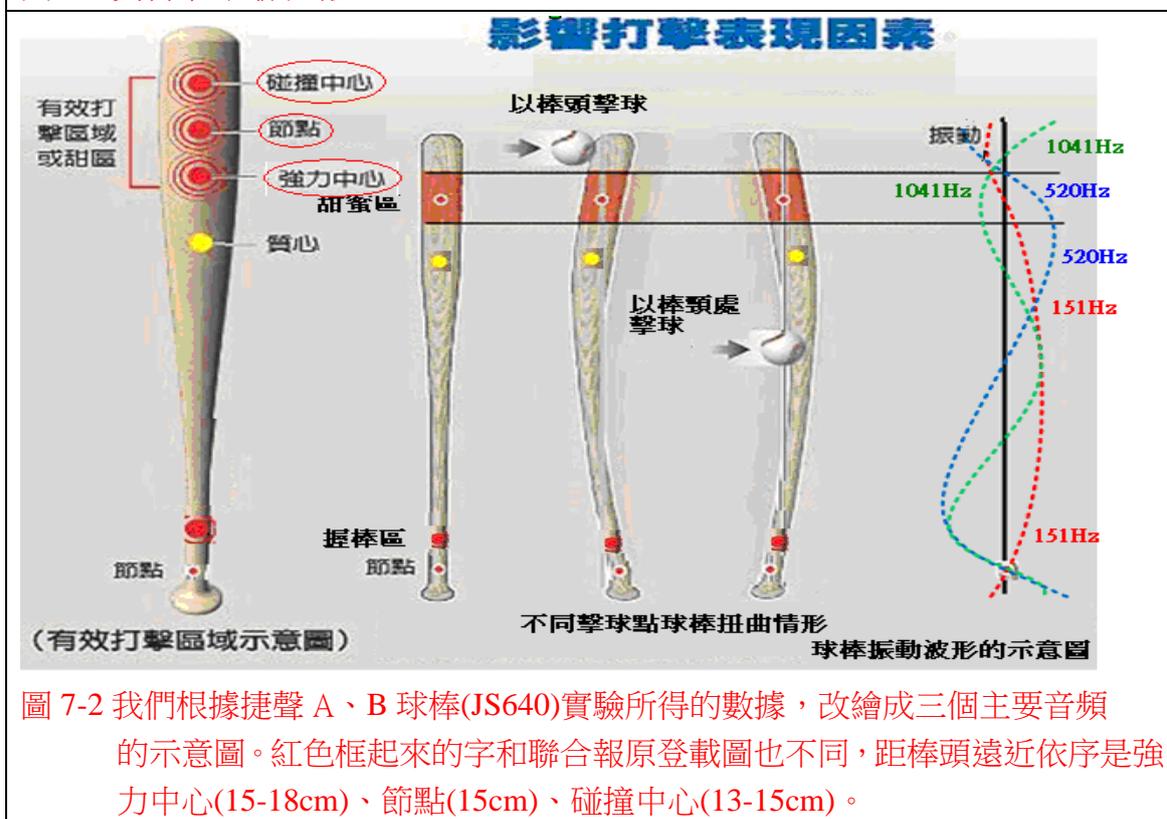
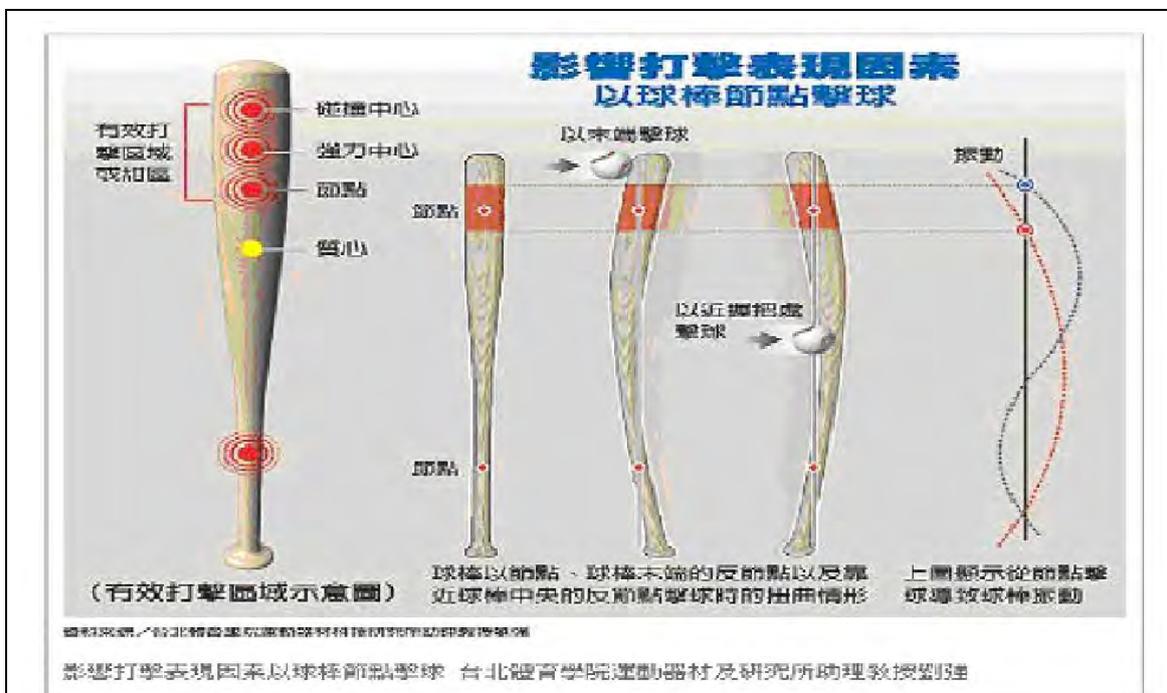
實驗二、承上敲擊法，利用 PASCO 聲音感測器，分析不同敲擊點，找出右手握棒處受力及振動最小，且頻率 520Hz、1041Hz 雙峰頻率較強的位置，其甜蜜點座標為 70.0cm 處。距棒頭端 15.0cm。

實驗三、懸吊球棒的握把處，將棒球棍視作複擺，找出其擺動週期。甜蜜點座標為 70.0cm-72.0cm，距棒頭端 15.0-13.0cm。

實驗四、以一定速度的棒球去撞擊固定懸吊處(坐標 14.0cm)的球棒棍，當球撞擊棒球棍不同位置時，分析其恢復係數得到的甜蜜點距棒頭端 15.0-18.0cm。

實驗五、改用(懸點坐標 14.0cm)棒球棍去撞擊球，一樣求其恢復係數。甜味距棒頭端 15.0-18.0cm。

依據討論一、二的實驗結果，我們將圖 7-1 的聯合報登載的參考圖，依實驗結果改繪成圖 7-2。



- 【推論】(一)實驗三(O、P 複擺同週期)就是棒上的『碰撞中心』或『振盪中心』。
(二)實驗一、二(球棒最小振動)就是打中棒上『節點』。
(三)實驗四、實驗五(恢復係數最大)就是打中棒上『強力中心』。

- 三、實驗二、承上敲擊法，利用 PASCO 聲音感測器所測頻率，我們可以譬喻成一根球棒是有許許多多頻率不同的音叉所組成，其中有三支音叉振幅最大。依序是 980Hz-1041Hz、490-520Hz、151-170Hz。敲擊球棒的不同點就如同敲到音叉的不同部位。敲到該波形的節點處，則該頻率顯現的相對強度較小；若是敲到該波形的腹點，則頻率顯現的相對強度較大。
(一)球打中棒頭端附近，高頻 980Hz-1041Hz 出現較大振幅。
(二)球打中棒頭(甜蜜區)附近則高頻 980Hz-1041Hz、中頻 490-520Hz 相對強度較大
(三)球打中棒頸附近則低頻 151-170Hz 的振幅會在此區域增大

- 四、實驗二、承上敲擊法，利用 PASCO 聲音感測器所測頻率，打在甜蜜點附近的產生頻率譜，比較容易出現雜亂無章的現象。我們大膽推論，甜蜜點附近，是主要頻率(151Hz、520Hz、1041Hz)波形節點的集中點，要在此處敲擊出較強的頻譜相對困難。

- 五、我們原先會以為球棒產生駐波的條件也會有類似共鳴管上的駐波。

假設(1)、二端自由端的駐波條件 $L = \frac{n}{2} \lambda (n = 1, 2, 3)$ ，則泛音頻率會是基頻的兩倍及三倍。(和測到的結果不符)

假設(2)、棒頭為自由端，握把處當固定端，其的駐波條件

$L = \frac{n}{4} \lambda (n=1,3,5)$ ，則泛音頻率會是基頻的三倍及五倍。(和測到有點像，但也不是)，我們推測棒頭處，球棒粗，波長短；棒頸處，球棒細波長短，形成駐波波長，有長、有短。

- 六、我們測量時發現 151Hz 的頻率。

撞擊棒頸時，最容易出現，其次是撞擊棒頭端時，我們也發現這頻率的強弱程度與握棒時手麻程度有正相關。當球打中甜蜜點時，幾乎很少有 151Hz 的頻率，我們推測，此處應該就是基頻的節點位置。

- 七、我們將「握持中心」固定在坐標 6cm 處。

敲擊木棒產生的頻譜穩定，讓握棒者不舒服的振動感也小，我們推測球棒自然頻率的最佳節點應在此處。

八、比較雜牌球棒與捷聲球棒。

除了材料，外型等本身差異外。最大差異是，雜牌球棒的不同握把區會有不同的甜蜜點；捷聲球棒，手握球棒的握把區內，其對應的甜蜜點幾乎是固定在一個位置上。

九、碰撞時測量上的誤差。

本次實驗需要改變球棒的懸掛點，球的擺長要固定，但高低要改變，因此我們自製了這台撞擊臺，希望能有較精準的測量，其中量角度因為沒有準確的儀器可以測量，我們用攝影機當輔助，目測角度判讀有疑議，以錄影影片來判讀。實驗過程中具有其他因素影響，包括風、敲擊的力道以及正面碰撞否，都是誤差來源，因此我們量測角度是採多次碰撞，取角度最大那次當作記錄值。

十、以能量觀點來看待甜蜜點的打擊。

我們可以把投手投球的能量加上打擊手揮棒的的能量當成系統的總能量，當恢復係數越高，代表打擊過程轉換成熱能的比率越低；打中甜蜜點，球棒不會振動，手也不會刺痛，那麼消耗在球棒及人體上的能量就較少，傳給球的動能就越多，讓球飛得高又遠。

十一、常有人問我們，為何不是打中棒頭端或球棒的質心，球可以飛最遠？^[6]

我們的想法是：

- (1)棒頭的切線速度較大，碰撞時可以有較大碰撞力。我們的推測是棒頭的振動模式是自由端，球擊中該處，球棒振動較大，能量損失也較大，能傳給球的動能相對少。其它可能因素還有……；如形變、碰撞時間等我們就暫不討論。
- (2)球碰到質心，球棒能量應會有最大轉移量？我們的想法是，揮棒動作中，球棒有移動和轉動兩種動能，打中質心時等於手會得到一個和揮棒動作相反的力矩來抵銷原來的揮棒力矩。打擊者手部受力是向後，不像擊中甜蜜點手受合力為零。

捌、結論

一根好的球棒產生應該是有許多球員嚐試使用過不同的材質、不同形狀、不同長度……。他們會發現各種球棒，在某種情況下，會得到最佳打擊效果，而加以研究發展。然而這些所謂最佳球棒與最佳打擊者如何配合到天衣無縫？我們分析洋將義大犀牛隊曼尼的揮棒姿勢，套入我們實驗結果，我們會驚訝發現，球員美麗揮棒動作，是可以實驗去驗證，擊球前的握棒點在右手(14cm 處)甜蜜點在球棒座標(70cm)處，打擊後瞬間將球棒交給左手，棒的節點在座標 6cm 處，此用意是整支棒的振動感最小，打擊者最不會受傷的握棒處。



(圖 8-1) 擊球前的握棒點在右手(14cm 處)甜蜜點在球棒坐標(70cm)處，



(圖 8-2) 打擊後瞬間將球棒交給左手，棒的節點在坐標 6cm 處，整支棒的振動感最小。

我們沒有所謂『加速規』等，高貴儀器來測量球棒撞擊後的振動狀況，我們根據高雄科應大 2006 年 35 期邱武耀、蘇紘建等「球棒之甜蜜區分析」的論文^[7]，

第 43 屆全國科展文獻^[8]知木棒的縱波波速 $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}}$ (Y 楊氏係數^[9]、 ρ_0 細棒密

度)，加上我們自創的手感感測及音頻分析；，我們可以理解，聲波在棒頭波長短波速慢，振幅小，產生的振動也小。棒頸處，木棒細長，波速快、波長長，振幅大，加上該處會產生 151Hz – 170Hz 低頻的強力共振波。這種波不僅讓打擊者手痛麻，且容易斷棒；好的打擊者要有好的選球工夫，投手投過來的進球點不佳時，寧可不打，也不要以棒頸處去擊球。

玖、參考資料及其他

- 【1】、楊正敏 聯合報 新聞中的科學全壘打解析 強棒靠甜蜜點 聚能轟出全壘打 http://mag.udn.com/mag/campus/storypage.jsp?f_ART_ID=143968
- 【2】、邱韻如格物致知 <http://memo.cgu.edu.tw/yun-ju/cguweb/PhyChiu/H201Oscillation/SweetSpotFind.htm>
- 【3】、輔大物理手冊實驗六複擺 [www.phy.fju.edu.tw/~498598075/Experiment\(final\)/01/phyexp06.pdf](http://www.phy.fju.edu.tw/~498598075/Experiment(final)/01/phyexp06.pdf)
- 【4】、David Halliday 等原著 王行達等編譯 物理(上)(中譯本) 第八版 p15-15-p15-18 全華圖書公司 2008 年 9 月出版
- 【5】、林明瑞 等 高二物理(下)教師手冊 第十章碰撞 p88-p89 南一書局 99 年一月再版二刷

- 【6】、 Physics of Baseball & Softball
<http://www.physics.usyd.edu.au/~cross/baseball.html>
- 【7】、 邱武耀、蘇紘建等「球棒之甜蜜區分析」高雄應用科大學報 2006 年
第 35 期 p317-326
- 【8】、 林祖鳳等 做不完的彈簧實驗－縱波性質的研究 第 43 屆全國科展高中組
物理科
- 【9】、 楊氏係數(中興大學普物實驗室)
http://experiment.phys.nchu.edu.tw/EZphysics/ex_e.htm

【評語】 040113

作品以簡單裝置，研究球棒受撞擊的振動頻率，找出不同節點，可以讓打擊者避免震動。實驗數據精確，考慮周全。

可加強：球棒振動為廣泛研究題目，多數結果均已知，不易有高度創新。