中華民國第 51 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030404

方格函數—缺塊 n×n 正方形中總方格數和空缺位置之規律性及函數關係探討

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 郭笛萱	柯紋娟 藍苕瑛

關鍵詞：缺塊方格、函數、等差關係

得獎感言

我從四年級開始做科展，六年級時，與兩位同學一起進入全國賽，得到第二名。升上九年級後，因為課業壓力，原本並不打算繼續做科展，但是後來得知上屆的學長姐也是在九年級時，得到全國第二、第三名，所以我心想，他們可以做得到，那我也可以試試看。於是，就展開了這一年的研究之路。

一開始研究這個題目時，我並沒有預料到這個題目居然可以延伸出那麼多東西。起初，我找到了一堆數據，但是卻找不出數字之間的規則，這讓我十分氣餒。過了幾個禮拜後，我突然想到，為何不將這些數據分區後，再來找尋規則呢？於是，終於讓我找出了規則，當下的喜悅，是難以言喻的。

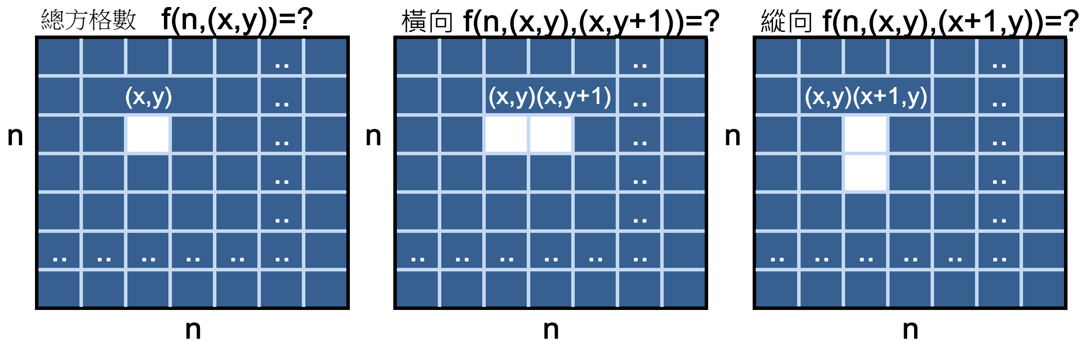
很高興這次可以得到第一名，這都要感謝一路指導我的老師—蘭雅國中柯紋娟老師和藍苕瑛老師，以及支持我的父母親，謝謝你們！

方格函數

缺塊 nxn 正方形中總方格數和空缺位置之規律性及函數關係探討

摘要

由 4x3 的方塊中，在缺一方格下計算總方格數的挑戰為起點，我試著探討在缺塊 **n x n** 的正方形中總方格數和 任取一個位置方格(x,y) 或 任取出二個橫向位置方格[(x,y),(x,y+1)]、縱向位置方格[(x,y),(x+1,y)] 後之規律性及函數的關係，如下圖所示。並定義在未缺塊的正方形中，總方格數為 C(n)，且 C(n)= $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 。



研究結果顯示，其函數式經由二種規律性 (**A**)一般性及 (**B**)遞迴性 求得，結果如下:

一、任取一個位置方格(x,y)之總方格數

一般函數 $n\in N$ 且 $x \le y \le \frac{n+1}{2}$	**遞迴函數** $n\in N$ 且 $x \le y \le \frac{n+1}{2}$
$\mathbf{f(n,(x,y))=C(n)-D(n,(x,y))}$	**if x=1 , f(n,(1,y))=(C(n)-n)-dv** **dv=(n-y)(y-1)**
$\mathbf{D(n,(x,y)) = 2\sum_{k=1}^{x} k^2 + 2\sum_{k=x+1}^{y} xk + (n-2y)xy}$	**if x>1 , f(n,(x,y))=f(n,(x-1,y-1))-dv** **dv=(n-x-y+2)(x+y-1)**

二、任取二個橫向位置方格 [(x,y),(x,y+1)] 或 縱向位置方格[(x,y),(x+1,y)] 之總方格數

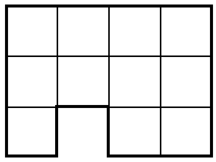
一般函數

橫向	$\mathbf{f(n,(x,y),(x,y+1)) = f(n,(x,y+1)) - xy + \sum_{k=1}^{x-1} k}$
縱向	$\mathbf{f(n,(x,y),(x+1,y)) = f(n,(x+1,y)) - \sum_{k=1}^{x} k}$

遞迴函數

第一列	**x=1 , f(n,(1,y),(1,y+1))=(C(n)-n)-dv**	**dv=y(n-y)**
橫向	**x>1 , f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x-1,y),(x,y))-dv**	**dv=x(n-x-y+1)**
縱向	**x>1 , f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv**	**dv=y(n-x-y+1)**

壹、　研究動機



在 2003 JHMC 國中數學競賽中，有一個題目: 右圖中每一小方格都是正方形，試問此圖中大大小小的正方形共有幾個？這引起我對缺塊的 nxn 正方形中，總方格數和空缺位置探討的興趣，並嘗試找尋其位置座標(x,y)和總方格數之規律性及函數關係。在此次科展中，我運用到了國中第二冊第二章直角坐標、第四章線型函數及其圖形以及第四冊第一章數列與級數、第二章幾何圖形之數學概念。

貳、　研究目的

一、在 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格的方法數。

二、在 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格後，所包含的 1x1，2x2 .... nxn 之總方格數之規律性，函數關係探討及所有位置座標的轉換規則。

三、在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格的方法數。

四、在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格後，所包含的 1x1，2x2 .... nxn 之總方格數之規律性，函數關係探討及所有位置座標的轉換規則。

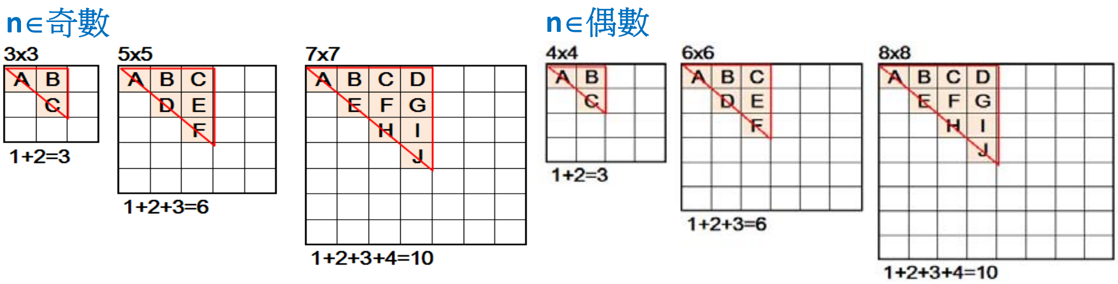
參、　研究設備及器材

方格紙、彩色筆、尺、電腦程式 Visual Basic、Excel。

肆、　研究過程

一、 <u>在 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格的方法有幾種？</u>

(一) 為了找出在 nxn 的正方形方塊中，任取一方格後，所包含的 1x1,2x2, . . .,nxn 方格共有多少個，所以我先計算出在 nxn 的方格中，任取一個方格的方法共有幾種。因為在取單一方格的所有 n^2 種取法中，會有對稱的重覆問題，所以我發現只要取在下圖中的<u>紅色三角形區域</u>內之方格，即可包含所有的取法。而當 n 為奇數及偶數時，分別存在著一種規律性，如下圖所示：



(二) 以邊長 n 為奇數及偶數來做區分，各找出任取一個方格的方法數公式

1. 邊長 n 為奇數時，其取法數公式為：

$$1+2+\ldots\ldots+\frac{n+1}{2}=\frac{(1+\frac{n+1}{2})(\frac{n+1}{2})}{2}=\frac{(n+1)(n+3)}{8}$$

2. 邊長 n 為偶數時，其取法數公式為：

$$1+2+\ldots\ldots+\frac{n}{2}=\frac{(1+\frac{n}{2})(\frac{n}{2})}{2}=\frac{n(n+2)}{8}$$

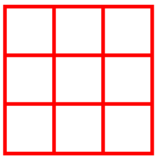
二、 <u>在 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格後，所包含的 1x1，2x2. . . . nxn 總方格數之規律性及函數關係探討及所有位置座標的轉換規則</u>。

(一) 首先我先將每個方格定上座標 (x,y)，x 值為第 x 列，y 值為第 y 行，以 6x6 方格為例，座標標號方式如左下表：

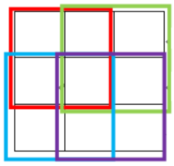
y

x

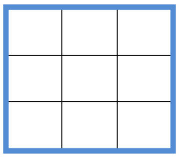
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



1x1 有 $9(3^2)$個



2x2 有 $4(2^2)$個



3x3 有 $1(1^2)$個

(二) 之後我算出在 nxn 的正方形方塊中，在不取任何一個方格的情形下，計算其所包含的 1x1，2x2……nxn 方格之總方格數為 $n^2+\cdot\cdot+3^2+2^2+1^2$個。

以 3x3 右上圖為例：

將 3x3 中的所有方格數加總起來共 14 個($1^2+2^2+3^2=14$)

上述算式可用下列公式算出

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3(3+1)(6+1)}{6} = 14$$

把上述的關係列為下表，並定義 nxn 的正方形方塊中所有大小的原有總方格數為 **C(n)**

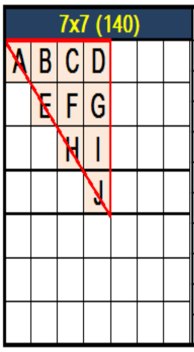
C(n)= $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)	C(7)	C(8)	C(9)	C(10)	C(11)
總方格數	14	30	55	91	140	204	285	385	506

(三) 接著我用<u>列舉</u>及<u>刪除</u>兩種方法，完整計算在 3x3 至 8x8 方塊中，任取一個位置方格(x,y)後，其所包含總方格數的值，並驗證二種計算方法，其值是相同的。

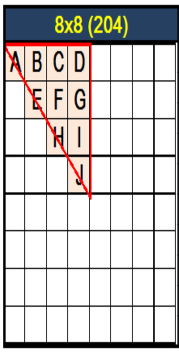
1. <u>**列舉法：**</u>先計算出 1x1 至 nxn 所有不同大小的方格後，再做加總計算。

下表為 7x7 和 8x8 以列舉法計算後的總方格數結果:

(註: 方格差為 <u>**C(n)**</u>與<u>任取一位置方格後總方格數</u>之差)

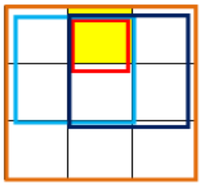


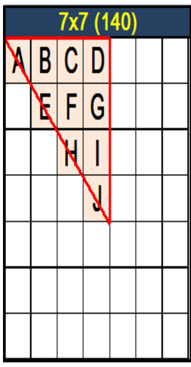
取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	總方格數	方格差
A	48	35	24	15	8	3	0	133	-7
B	48	34	23	14	7	2	0	128	-12
C	48	34	22	13	6	2	0	125	-15
D	48	34	22	12	6	2	0	124	-16
E	48	32	21	12	5	0	0	118	-22
F	48	32	19	10	3	0	0	112	-28
G	48	32	19	8	3	0	0	110	-30
H	48	32	16	7	0	0	0	103	-37
I	48	32	16	4	0	0	0	100	-40
J	48	32	16	0	0	0	0	96	-44



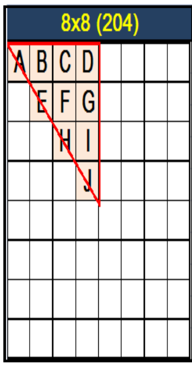
取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	總方格數	方格差
A	63	48	35	24	15	8	3	0	196	-8
B	63	47	34	23	14	7	2	0	190	-14
C	63	47	33	22	13	6	2	0	186	-18
D	63	47	33	21	12	6	2	0	184	-20
E	63	45	32	21	12	5	0	0	178	-26
F	63	45	30	19	10	3	0	0	170	-34
G	63	45	30	17	8	3	0	0	166	-38
H	63	45	27	16	7	0	0	0	158	-46
I	63	45	27	13	4	0	0	0	152	-52
J	63	45	27	9	0	0	0	0	144	-60

2. 刪除法：先計算任取一位置方格後，此方格所含蓋大小不同之方格數(設為總扣除數)，再用 C(n)減去此總扣除數，即為總方格數。以 3x3 方塊右圖為例，黃色的方格含蓋了 1 個 1x1，2 個 2x2，1 個 3x3 的方格，∴總扣除數為 4，而 C(3)=14，所以計算 14-4=10，10 即為刪除黃色位置方格後的總方格數。下表為 7x7 和 8x8 以刪除法計算後的總方格數結果：





取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	總扣除數	總方格數
A	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-7	133
B	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-12	128
C	-1	-2	-3	-3	-3	-2	-1	-15	125
D	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	-16	124
E	-1	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-22	118
F	-1	-4	-6	-6	-6	-4	-1	-28	112
G	-1	-4	-6	-8	-6	-4	-1	-30	110
H	-1	-4	-9	-9	-9	-4	-1	-37	103
I	-1	-4	-9	-12	-9	-4	-1	-40	100
J	-1	-4	-9	-16	-9	-4	-1	-44	96



取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	總扣除數	總方格數
A	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-8	196
B	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-14	190
C	-1	-2	-3	-3	-3	-3	-2	-1	-18	186
D	-1	-2	-3	-4	-4	-3	-2	-1	-20	184
E	-1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-26	178
F	-1	-4	-6	-6	-6	-6	-4	-1	-34	170
G	-1	-4	-6	-8	-8	-6	-4	-1	-38	166
H	-1	-4	-9	-9	-9	-9	-4	-1	-46	158
I	-1	-4	-9	-12	-12	-9	-4	-1	-52	152
J	-1	-4	-9	-16	-16	-9	-4	-1	-60	144

3. 以**列舉法**及**刪除法** 兩種方法計算出在 3x3 至 8x8 的方塊中，任取一個位置方格(x,y)後，其所包含總方格數之值是相同的，其結果整理如下表。接著我試著將各組數字進行分析，尋找數字間是否存在某種規律性及函數式。(註: 方格中的數字代表取出該位置方格後，所包含的總方格數)

3x3

11	10
	8

4x4

26	24
	20

5x5

50	47	46
	41	39
		36

6x6

85	81	79
	73	69
		63

7x7

133	128	125	124
	118	112	110
		103	100
			96

8x8

196	190	186	184
	178	170	166
		158	152
			144

(四) 首先【定義】在 nxn 的正方形方塊中，任取一個位置方格(x,y)後，所包含的 1x1，2x2.... nxn 總方格數為 **f (n , (x,y))** 且 $x \le y \le \frac{n+1}{2}$ ，接著經由上述二種方式所得之總方格數值，我試著以一般函數法及遞迴函數法的二種規律性做分析，並求得 **f(n,(x,y))**之函數式。

1. 一般函數法：

(1)一般函數法主要是找尋最終的單一函數式，首先我利用先前刪除法在 3x3 至 9x9 的方塊中，任取一個位置方格(x,y)後所得的數據，以其中 8x8 和 9x9 為例，嘗試找出總扣除數 (設為 D(n,(x,y))) 是否和 n,x,y 存在函數關係？

8x8

位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	總扣除數
(1,1)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-8
(1,2)	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-14
(1,3)	-1	-2	-3	-3	-3	-3	-2	-1	-18
(1,4)	-1	-2	-3	-4	-4	-3	-2	-1	-20
(2,2)	-1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-26
(2,3)	-1	-4	-6	-6	-6	-6	-4	-1	-34
(2,4)	-1	-4	-6	-8	-8	-6	-4	-1	-38
(3,3)	-1	-4	-9	-9	-9	-9	-4	-1	-46
(3,4)	-1	-4	-9	-12	-12	-9	-4	-1	-52
(4,4)	-1	-4	-9	-16	-16	-9	-4	-1	-60

9x9

位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	總扣除數
(1,1)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-9
(1,2)	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-16
(1,3)	-1	-2	-3	-3	-3	-3	-3	-2	-1	-21
(1,4)	-1	-2	-3	-4	-4	-4	-3	-2	-1	-24
(1,5)	-1	-2	-3	-4	-5	-4	-3	-2	-1	-25
(2,2)	-1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-30
(2,3)	-1	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-4	-1	-40
(2,4)	-1	-4	-6	-8	-8	-8	-6	-4	-1	-46
(2,5)	-1	-4	-6	-8	-10	-8	-6	-4	-1	-48
(3,3)	-1	-4	-9	-9	-9	-9	-9	-4	-1	-55
(3,4)	-1	-4	-9	-12	-12	-12	-9	-4	-1	-64
(3,5)	-1	-4	-9	-12	-15	-12	-9	-4	-1	-67
(4,4)	-1	-4	-9	-16	-16	-16	-9	-4	-1	-76
(4,5)	-1	-4	-9	-16	-20	-16	-9	-4	-1	-80
(5,5)	-1	-4	-9	-16	-25	-16	-9	-4	-1	-85

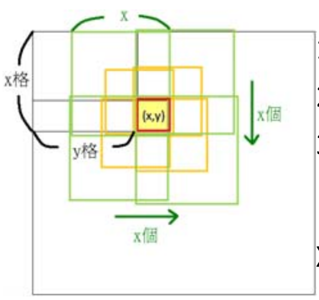
(2) 經過分析後發現，上表數字呈現左右對稱的規則，但無單一的規律性，因此我試著將數字分區，由每區數字中找尋規律性及函數式。

(3) **藍色區(完全平方數區)數字分析：** 首先我發現以坐標 x 值為基礎，左右各有 $1^2,2^2,3^2....x^2$ 對稱之平方數，如下表所示，因此我劃分此區為藍色完全平方數區。此區之數字和應為 $2\sum_{k=1}^{x} k^2$，但是當 n=9(奇數), x=5 時，其中 $5^2=25$ 會重複計算，因此我以紅色標記，最後計算總扣除數時應減去其值。

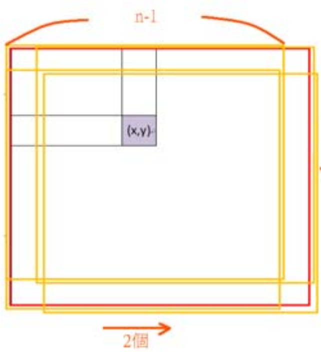
	位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
x=1	(1,1)	1							1
	(1,2)	1							1
	(1,3)	1							1
	(1,4)	1							1
x=2	(2,2)	1	4					4	1
	(2,3)	1	4					4	1
	(2,4)	1	4					4	1
x=3	(3,3)	1	4	9			9	4	1
	(3,4)	1	4	9			9	4	1
x=4	(4,4)	1	4	9	16	16	9	4	1

	位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9
x=1	(1,1)	1								1
	(1,2)	1								1
	(1,3)	1								1
	(1,4)	1								1
	(1,5)	1								1
x=2	(2,2)	1	4						4	1
	(2,3)	1	4						4	1
	(2,4)	1	4						4	1
	(2,5)	1	4						4	1
x=3	(3,3)	1	4	9				9	4	1
	(3,4)	1	4	9				9	4	1
	(3,5)	1	4	9				9	4	1
x=4	(4,4)	1	4	9	16		16	9	4	1
	(4,5)	1	4	9	16		16	9	4	1
x=5	(5,5)	1	4	9	16	25	16	9	4	1

藍色(完全平方數區)公式證明： $2\sum_{k=1}^{x} k^2$



1x1→1 個
2x2→4 個
3x3→9 個
•
•
X•X→X^2 個



(n-x+1)(n-x+1)
→x^2 個
•
•
•
(n-2)(n-2)→9 個
(n-1)(n-1)→4 個
nxn→1 個

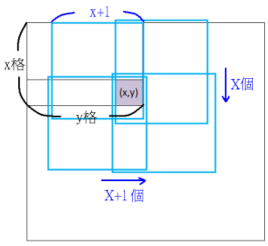
∴ **藍色區數字和** $=1+4+9+\ldots\ldots+x^2+x^2+\ldots\ldots+9+4+1 = 2\sum_{k=1}^{x} k^2$

(4) 綠色區(等差數區)數字分析: 接著我發現以坐標 x+1 為起始值，y 為終止值，左右各有 y-x 個數字呈現等差關係，如下表所示。以 n=9 (1,5)為例，左右各有 5-1=4 個數字為 2,3,4,5 呈等差關係，且數字分別為 1x2,1x3,1x4,1x5…，以 n=9 (2,5)為例，左右各有 5-2=3 個數字為 6,8,10 呈等差關係，且數字分別為 2x3,2x4,2x5…，因此我劃分此區為綠色等差數區，且數字和應為 x(x+1)+x(x+2)….+x(y)，可記為 $2\cdot\sum_{k=x+1}^{y} xk$ 但當 n=奇數時，數字 xy 會重複計算，因此以紅色標記之

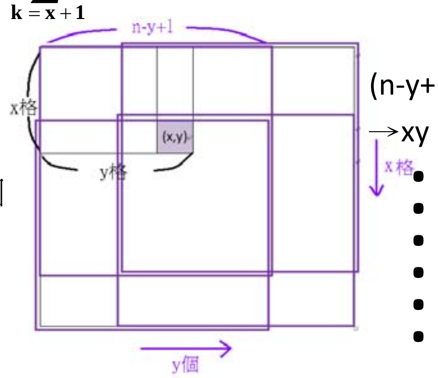
	位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
x=1	(1,1)		1	1	1	1	1	1	
	(1,2)		2	2	2	2	2	2	
	(1,3)		2	3	3	3	3	2	
	(1,4)		2	3	4	4	3	2	
x=2	(2,2)			4	4	4	4		
	(2,3)			6	6	6	6		
	(2,4)			6	8	8	6		
x=3	(3,3)				9	9			
	(3,4)				12	12			
x=4	(4,4)								

	位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9
x=1	(1,1)		1	1	1	1	1	1	1	
	(1,2)		2	2	2	2	2	2	2	
	(1,3)		2	3	3	3	3	3	2	
	(1,4)		2	3	4	4	4	3	2	
	(1,5)		2	3	4	5	4	3	2	
x=2	(2,2)			4	4	4	4	4		
	(2,3)			6	6	6	6	6		
	(2,4)			6	8	8	8	6		
	(2,5)			6	8	10	8	6		
x=3	(3,3)				9	9	9			
	(3,4)				12	12	12			
	(3,5)				12	15	12			
x=4	(4,4)					16				
	(4,5)					20				
x=5	(5,5)									

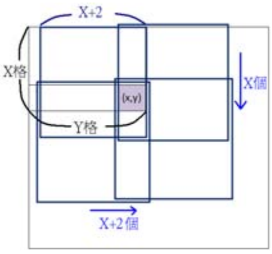
綠色(等差數區)公式證明： $\sum_{k=x+1}^{y} xk$



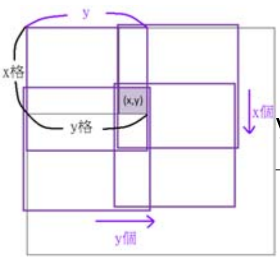
(x+1)(x+1)
→x(x+1)個



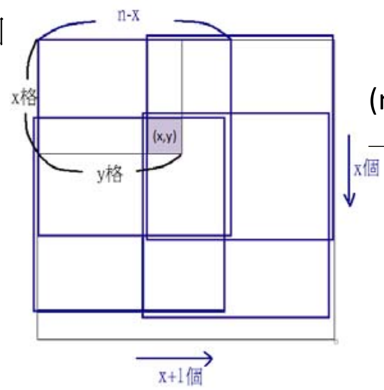
(n-y+1)(n-y+1)
→xy 個



(x+2)(x+2)
→x(x+2)個



yxy
→xy 個



(n-x)(n-x)
→x(x+1)個

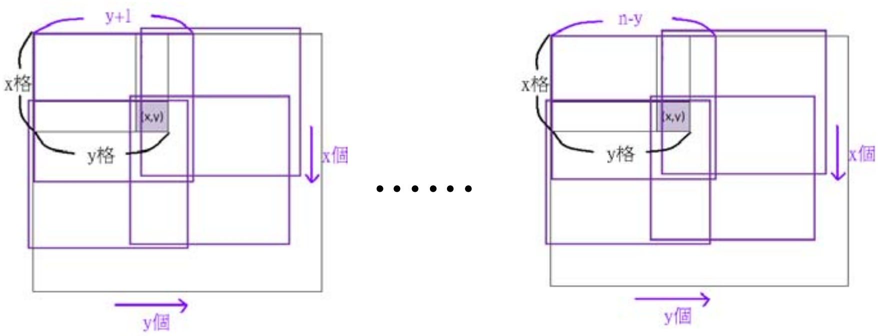
∴綠色區數字和=x(x+1)+x(x+2)+…+xy+xy+…+x(x+2)+x(x+1)) = $2\sum_{k=x+1}^{y} xk$

(5) 黃色區(相等數區)數字分析: 最後我發現剩下區塊內之數字皆相同，且數值皆為 xy 之乘積，個數為(n-2y)個，∴數字和為(n-2y)xy，因此我劃分此區為黃色相等數區。而我發現在計算(n-2y)xy 時，若 n≤2y，當 n 為偶數時，其值為 0，當 n 為奇數，其值為負數，且此負數正好為之前在前二區中紅色標記應扣除之數。

	位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
x=1	(1,1)		1	1	1	1	1	1	
	(1,2)			2	2	2	2		
	(1,3)				3	3			
	(1,4)								
x=2	(2,2)			4	4	4	4		
	(2,3)				6	6			
	(2,4)								
x=3	(3,3)				9	9			
	(3,4)								
x=4	(4,4)								

	位置方格	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9
x=1	(1,1)		1	1	1	1	1	1	1	
	(1,2)			2	2	2	2	2		
	(1,3)				3	3	3			
	(1,4)					4				
	(1,5)					-5				
x=2	(2,2)			4	4	4	4	4		
	(2,3)				6	6	6			
	(2,4)					8				
	(2,5)					-10				
x=3	(3,3)				9	9	9			
	(3,4)					12				
	(3,5)					-15				
x=4	(4,4)					16				
	(4,5)					-20				
x=5	(5,5)					-25				

黃色(相等數區) 公式證明：**(n-2y)xy**



(y+1)(y+1)→xy 個……………………………(n-y)(n-y)→xy 個

∵(y+1)到(n-y)有(n-y)-(y+1)+1=(n-2y)項，且每項的數值皆為 xy

∴黃色區數字和 =**(n-2y)xy**

(6) 由(3)(4)(5)可知在 nxn 方塊中，任取出一個位置方格(x,y)後，總扣除數 D(n,(x,y))，應為三區函數式之和，即

$$D(n,(x,y)) = 2\sum_{k=1}^{x} k^2 + 2\sum_{k=x+1}^{y} xk + (n-2y)xy$$

∴總方格數 f(n,(x,y))應為

$$f(n,(x,y))=C(n)-D(n,(x,y))$$

例: $f(5,(3,3))=55-[2x(1^2+2^2+3^2)+2x0+(-1)x(3x3)]=55-19=36$

例: $f(6,(2,3))=91-[2x(1^2+2^2)+2x(6)+0x2x3]=91-22=69$

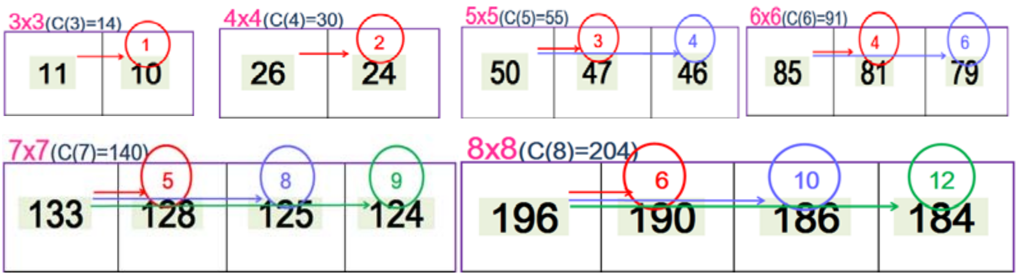
例: $f(7,(2,4))=140-[2x(1^2+2^2)+2x(6+8)+(-1)x2x4]=140-30=110$

2. 遞迴函數法：

遞迴函數法主要在找尋二位置方格之間的函數關係，在 nxn 的方塊中，取出位置方格(x,y)後，其所包含的總方格數，觀察後發現上表中的數字間存在一種等差關係，且第一列和第二列之後的關係規則不同，因此我將它分類為第一列橫向之等差關係以及第二列之後的斜向等差關係來分析探討。

(1) 第一列之橫向等差關係：x=1 y>1，(1,1)→ (1,y) 之探討

【A. 數字分析】



<分析 1>觀察以上圖形，我發現所有座標位置(1,1)之值皆為**[C(n)-n]**

例: f(3,(1,1))=C(3)-3=14-3=11 , f(4,(1,1))=C(4)-4=30-4=26……

<分析 2>各個圈圈中的數字代表 f(n,(1,1))與 f(n,(1,y))的<u>差值 (設為 dv)</u>

我發現在邊長數 n 不同的情況下，<u>差值</u>存在一種等差關係

紅圈 **y=2** (1,1)→(1,**2**)當 n=3, 4, 5, 6, 7, 8 時，紅圈差值 dv_n 分別為 1, 2, 3, 4, 5 (首項 dv_3=1 公差 **d** 為 **1**)

∴dv_3=(3-2)d=1 ,dv_4=(4-2)d,=2 , dv_n=(n-2)d ,且發現 d 和座標 y 之關係為 d=y-1=1

∴紅圈差值 **dv = (n-2)(y-1)=(n-y)(y-1)** ，同理可求得，當

藍圈 **y=3** (1,1)→(1,**3**)當 n= 5, 6, 7, 8 時，藍圈差值分別為 4, 6, 8, 10，(首項 dv_5=4 公差為 **2**) ∴藍圈差值 **dv = (n-3)(y-1)=(n-y)(y-1)**

綠圈 **y=4** (1,1)→(1,**4**)當 n= 7, 8 時，綠圈差值分別為 9,12, (首項 dv_7=9 公差為 **3**) ∴綠圈差值 **dv = (n-4)(y-1)=(n-y)(y-1)**

因此我將第一列橫向位置座標(1,y)總方格數的等差關係，整理如下

(n-y) d=(y-1) dv

x=1	f(n,(1,1))=	[c(n)-n] - (n-1)0	=[c(n)-n] - (n-1)(1-1)
	f(n,(1,2))=	[c(n)-n] - (n-2)1	=[c(n)-n] - (n-2)(2-1)
	f(n,(1,3))=	[c(n)-n] - (n-3)2	=[c(n)-n] - (n-3)(3-1)
	f(n,(1,4))=	[c(n)-n] - (n-4)3	=[c(n)-n] - (n-4)(4-1)
	…	…	
∴	**f(n,1,y)=**	**[c(n)-n] - (n-y)(y-1)**	

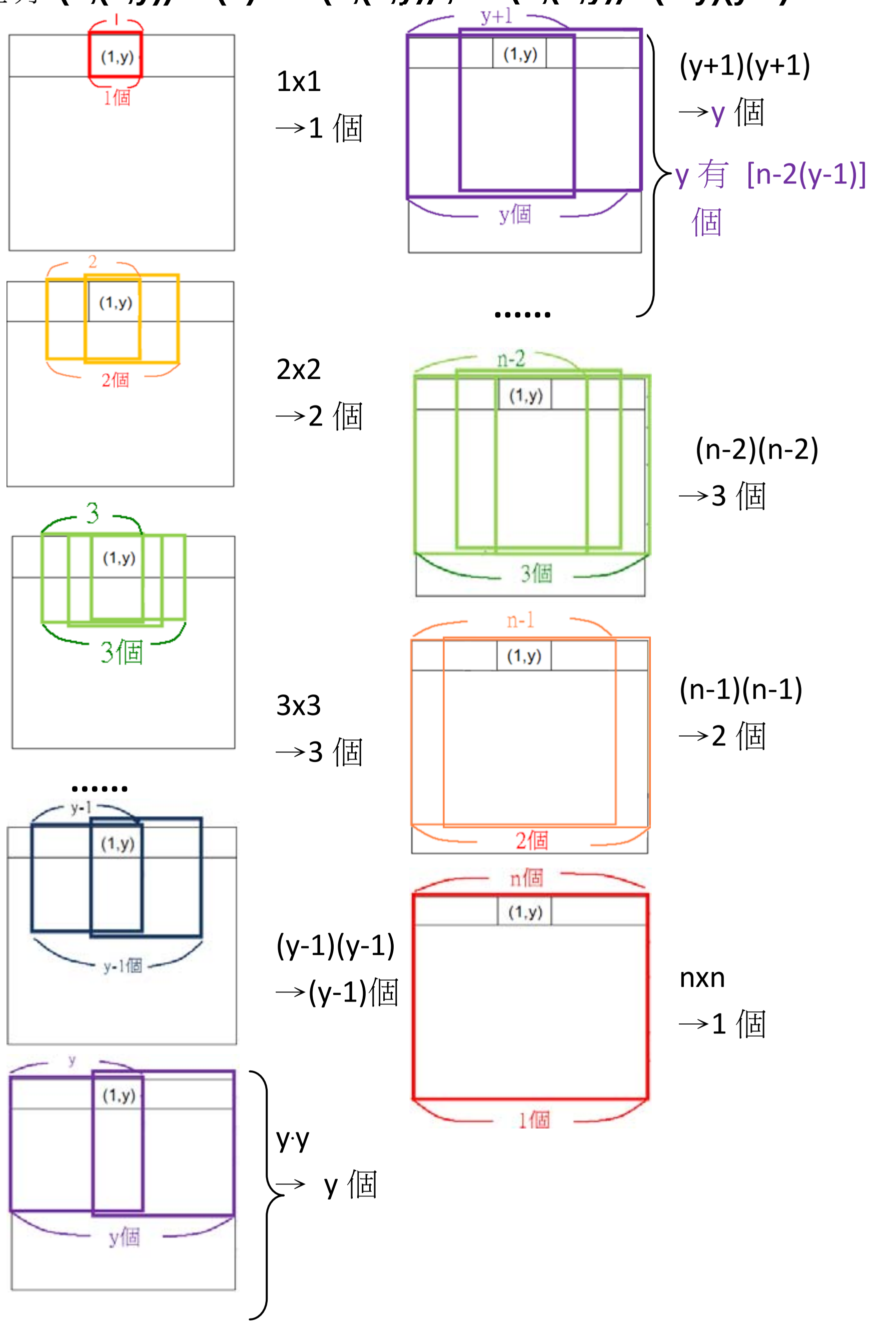
利用上述等差的關係，我可以決定第一列(1,y)的每一個值，發現 f(n, (1,y))可以利用 **[C(n)-n]-(n-y)(y-1)** 計算出結果，整理如下：

f(n,(1,y))=(C(n)-n)-dv C(n): n×n 之總方格數	dv=(n-y)(y-1)	f(n,(1,y))=(C(n)-n)-dv C(n): n×n 之總方格數	dv=(n-y)(y-1)
f(3,(1,1))=(14-3)-0=11 f(3,(1,2))=(14-3)-1=10	dv=(3-1)(1-1)=0 dv=(3-2)(2-1)=1	f(6,(1,1))=(91-6)-0=85 f(6,(1,2))=(91-6)-4=81 f(6,(1,3))=(91-6)-6=79	dv=(6-1)(1-1)=0 dv=(6-2)(2-1)=4 dv=(6-3)(3-1)=6
f(4,(1,1))=(30-4)-0=26 f(4,(1,2))=(30-4)-2=24	dv=(4-1)(1-1)=0 dv=(4-2)(2-1)=2	f(7,(1,1))=(140-7)-0=133 f(7,(1,2))=(140-7)-5=128 f(7,(1,3))=(140-7)-8=125 f(7,(1,4))=(140-7)-9=124	dv=(7-1)(1-1)=0 dv=(7-2)(2-1)=5 dv=(7-3)(3-1)=8 dv=(7-4)(4-1)=9
f(5,(1,1))=(55-5)-0=50 f(5,(1,2))=(55-5)-3=47 f(5,(1,3))=(55-5)-4=46	dv=(5-1)(1-1)=0 dv=(5-2)(2-1)=3 dv=(5-3)(3-1)=4		

由此規則，可以推出在 nxn 方塊中，在第一列任取一個位置方格(1,y)後，其所包含總方格數公式應為 **f(n,(1,y))=[C(n)-n]-(n-y)(y-1)**。

【B. 公式證明】

證明 **f(n,(1,y))=C(n)-n-D(n,(1,y))， D(n,(1,y))= (n-y)(y-1)**



$$D(n,(1,y)) = \{1+2+3+\ldots\ldots(y-1)+y[n-2(y-1)]+(y-1)+\ldots\ldots+3+2+1\}$$

$$\therefore f(n,(1,y)) = C(n)-\{1+2+3+\ldots\ldots(y-1)+y[n-2(y-1)]+(y-1)+\ldots\ldots+3+2+1\}$$

$$=C(n)-y(n-y+1)$$

$$=C(n)-n-(ny-y^2+y-n)$$

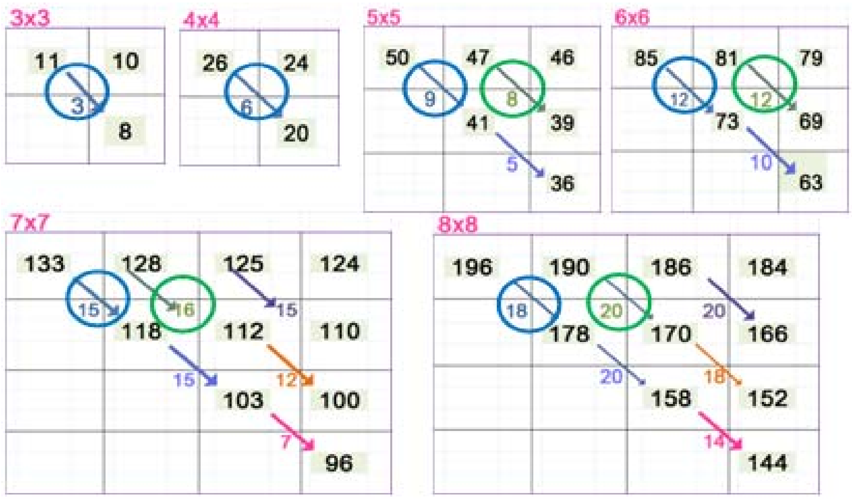
$$=C(n)-n-\{n(y-1)-y(y-1)\}$$

$$=\mathbf{C(n)-n-(n-y)(y-1)}$$

(2) 第二列之後的斜向等差關係：x>1 y>1 , (x-1,y-1)→(x, y) 之探討

【A. 數字分析】

我發現在座標位置(x-1,y-1)和(x,y)之總方格數值間的差值 dv，在邊長數 n 不同的情況下，同樣存在一種等差關係。如下圖所示：



<分析一>在 n= 3,4,5,6,7,8 從(1,1)→(2,2) 其差值 dv 分別為 3,6,9, 12 ,15,18 (如上圖中 藍圈所示) ，且數字為首項 3，公差 3 之等差關係，因此觀察此差值 dv 應為(n-2)和公差 3 之乘積，所以可得出 **藍圈差值=(n-2)3**

<分析二>在 n= 5,6,7,8 從(1,2)→(2,3) 其差值分別為 8,12,16,20，(如上圖中 綠圈所示) ，且數字為首項 8，公差 4 之等差關係，因此觀察此數列應為(n-3)和公差 4 之乘積，所以可得出 **綠圈差值=(n-3)4**

觀察上圖表中總方格數字的等差關係，整理如下表，並嘗試找尋其規律性及函數式。

X>1	等差規則	分析綠色紅色數字和 x , y 之關係	
X=2 y≥2	f(n,(2,2))= f(n,(1,1))-(n-2)3 f(n,(2,3))= f(n,(1,2))-(n-3)4 f(n,(2,4))= f(n,(1,3))-(n-4)5	2=2+2-2 3=2+3-2 4=2+4-2	3=2+2-1 4=2+3-1 5=2+4-1
x=3 y≥3	f(n,(3,3))= f(n,(2,2))-(n-4)5 f(n,(3,4))= f(n,(2,3))-(n-5)6	4=3+3-2 5=3+4-2	5=3+3-1 6=3+4-1
x=4 y=4	f(n,(4,4))= f(n,(3,3))-(n-6)7	6=4+4-2	7=4+4-1
…	…	.....	.....
x=x y=y	f(n,(x,y))=f(n,(x-1,y-1))-(n-p)q	p=x+y-2	q=x+y-1
x=x y=y	設 f(n, (x,y))=f(n,(x-1,y-1))-dv dv=(n-p)q		
∴ f(n,(x,y))=f(n,(x-1,y-1))-dv		dv=(n-x-y+2)(x+y-1)	

在此等差關係下，找尋到差值為 **dv= (n-x-y+2)(x+y-1)**，因此我以斜向的等差關係來找尋第二列之後的 f(n,(x,y))公式，如果當我要計算 f(n,(x,y))時，就以 f(n,(x-1,y-1))來做基礎，減去其間的差值 dv 即可，其計算結果如下：

f(n,(x,y))=f(n,(x-1,y-1))-dv	dv=(n-x-y+2)(x+y-1)
f(3,(2,2))=f(3,(1,1))-3=8	dv=(3-2-2+2)(2+2-1)=3
f(4,(2,2))=f(4,(1,1))-6=20	dv=(5-2-2+2)(2+2-1)=9
f(5,(2,2))=f(5,(1,1))-9=41	dv=(4-2-2+2)(2+2-1)=6
f(6,(2,2))=f(6,(1,1))-12=73	dv=(6-2-2+2)(2+2-1)=12
f(7,(2,2))=f(7,(1,1))-15=118	dv=(7-2-2+2)(2+2-1)=15
f(8,(2,2))=f(8,(1,1))-18=178	dv=(8-2-2+2)(2+2-1)=18
f(5,(2,3))=f(5,(1,2))-8=39	dv=(5-2-3+2)(2+3-1)=8
f(6,(2,3))=f(6,(1,2))-12=69	dv=(6-2-3+2)(2+3-1)=12
f(7,(2,3))=f(7,(1,2))-16=112	dv=(7-2-3+2)(2+3-1)=16
f(8,(2,3))=f(8,(1,2))-20=170	dv=(8-2-3+2)(2+3-1)=20
f(5,(3,3))=f(5,(2,2))-5=36	dv=(5-3-3+2)(3+3-1)=5
f(6,(3,3))=f(6,(2,2))-10=63	dv=(6-3-3+2)(3+3-1)=10
f(7,(3,3))=f(7,(2,2))-15=103	dv=(7-3-3+2)(3+3-1)=15
f(8,(3,3))=f(8,(2,2))-20=158	dv=(8-3-3+2)(3+3-1)=20

由此規則，可以推出，在 x>1,y>1 取出位置方格(x,y)後，其所包含總方格數之公式應為 **f(n,(x,y))= f(n,(x-1,y-1)) - (n-x-y+2)(x+y-1)**

【B. 公式證明】f(n(x,y)) = f(n(x-1,y-1)) - (n-x-y+2)(x+y-1)

∵ f(n,(x,y))= C(n)-D(n,(x,y))

f(n,(x-1,y-1)) =C(n)-D(n,(x-1,y-1))

∴ f(n,(x-1,y-1)) - f(n,(x,y))

=C(n)-D(n,(x-1,y-1))-C(n)+D(n,(x,y))

=D(n,(x,y)) - D(n,(x-1,y-1))

我用一般函數法所求出的 D(n,(x,y))公式來證明遞迴函數公式

∵ $$D(n,(x,y)) = 2\sum_{k=1}^{x}k^2 + 2\sum_{k=x+1}^{y}xk + (n-2y)xy$$

$$D(n,(x-1,y-1)) = 2\sum_{k=1}^{x-1}k^2 + 2\sum_{k=x+1}^{y-1}(x-1)k + (n-2y+2)(x-1)(y-1)$$

∴ D(n,(x,y)) - D(n,(x-1,y-1))

$$= 2\sum_{k=1}^{x}k^2 + 2\sum_{k=x+1}^{y}xk + (n-2y)xy - 2\sum_{k=1}^{x-1}k^2 - 2\sum_{k=x+1}^{y-1}(x-1)k - (n-2y+2)(x-1)(y-1)$$

$= -x^2-y^2-2xy+3y+3x+nx+ny-n-2$

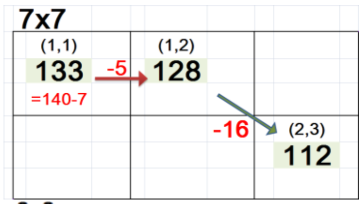
= **(n-x-y+2)(x+y-1)**

(3) 綜合以上二種等差關係，以遞迴的規律性，求得 **f(n, (x,y))**之函數為

If x=1 f(n(1,y)) = [C(n)-n] - (y-1)(n-y)

If x>1 f(n(x,y)) = f(n(x-1,y-1)) - (n-x-y+2)(x+y-1)

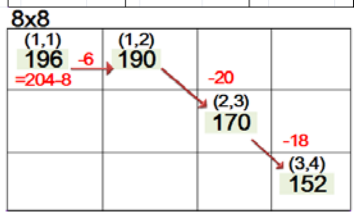
應用此遞迴函數式，驗算如下：



f(7,(2,3))=f(7,(1,2))-(7-2-3+2)(2+3-1)

=f(7,(1,1))- (7-2)(2-1)-16

=(**140-7**) **-5 -16=112**



f(8,(3,4))=f(8,(2,3))-(8-3-4+2)(3+4-1)

= f(8,(1,2))-(8-2-3+2)(2+3-1)-18

= f(8,(1,1))- (8-2)(2-1)-20-18

=(**204-8**) **– 6 -20 -18=152**

(五) 一般函數法以及遞迴函數法的檢驗

一般函數 n∈N 且 $x \le y \le \frac{n+1}{2}$	遞迴函數 n∈N 且 $x \le y \le \frac{n+1}{2}$
f (n,(x,y))=C(n)-D(n,(x,y))	if x=1 , f(n,(1,y))=(C(n)-n)-dv dv=(n-y)(y-1)
$D(n,(x,y)) = 2\sum_{k=1}^{x} k^2 + 2\sum_{k=x+1}^{y} xk + (n-2y)xy$	if x>1 , f(n,(x,y))=f(n,(x-1,y-1))-dv dv=(n-x-y+2)(x+y-1)

檢驗兩種方法的公式所算出的總方格數是否相同?

由於 3x3 至 8x8 的方塊之前已用刪除及列舉法計算出正確的數據，因此我以 n>8 之 f(9,(5,5))和 f(11,(4,5)) 為例:

1. 一般函數法：

例 1: **f(9,(5,5))=285-[2($1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$)+2x (5x0)+(9-2x5)x5x5]=200**

例 2: **f(11,(4,5))=506-[2($1^2+2^2+3^2+4^2$)+2x(4x5)+(11-2x5)x4x5]=386**

2. 遞迴函數法 ：

例 1: **f(9,(5,5))=f(9,(4,4))-(1)(9)=f(9,(3,3))-(3)(7)-9**

=f(9,(2,2))-(5)(5)-21-9=f(9,(1,1))-(7)(3)-25-21-9=276-76=200

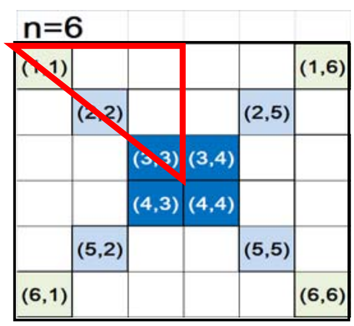
例 2: **f(11,(4,5))=f(11,(3,4))-(4)(8)=f(11,(2,3))-(6)(6)-32**

=f(11,(1,2))-(8)(4)-36-32=486-32-36-32=386

我發現以兩種公式所算出的總方格數是相同的。

(六) 求 f(n, (x,y)) 所有位置座標的之轉換規則

1. 在探討任取一個方格的方法時，我主要是以紅色三角形區塊內之位置方格為研究對象，但是如果任取不在此三角形內的其它方格時，其與三角形內的方格之間應該要有一個互相對應的關係。我以 n=6 和 n=7 為例：



由左表可知，以下這些座標可互相對應

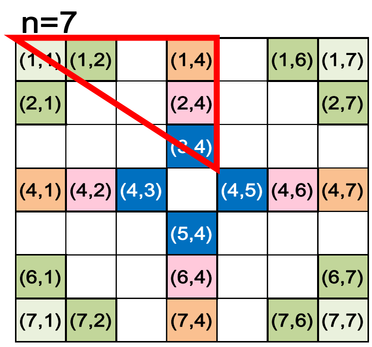
(x,y)=(y,x)=(7-x,y)=(y,7-x)=(x,7-y)

=(7-y,x)=(7-x,7-y)=(7-y,7-x)

(1,1)=(1,6)=(6,1)=(6,6)

(3,3)=(3,4)=(4,3)=(4,4)

(2,2)=(2,5)=(5,2)=(5,5)



(x,y)=(y,x)=(8-x,y)=(y,8-x)=(x,8-y)

=(8-y,x)=(8-x,8-y)=(8-y,8-x)

(1,1)=(1,7)=(7,1)=(7,7)

(1,4)=(4,1)=(4,7)=(7,4)

(1,2)=(2,1)=(1,6)=(2,7)=(6,1)=(7,2)=(6,7)=(7,6)

(3,4)=(4,3)=(4,5)=(5,4)

(2,4)=(4,2)=(4,6)=(6,4)

2. 如何將 f(n,(x,y)) $1\leqq x\leqq n$ $1\leqq y\leqq n$ 轉換為紅色三角形區塊內對稱位置之 f(n,(x',y'))？ 找出轉換(x,y) to (x',y') 的規則，使得 $x'\leq y'\leq \frac{n+1}{2}$

轉換步驟:
f(n,(x,y)) 設k=n+1
(t1) if x> y → 交換 (x,y) to (y,x)
(t2) if x> $\frac{k}{2}$ → x'=k-x if y> $\frac{k}{2}$ → y'=k-y

利用此轉換規則，舉例如下：

f(6,(5,2)) (k=n+1=7) **t1**→(2,5) **t2**→(2,7-5)=**(2,2)** ∴f(6,(5,2))=f(6,(2,2))

f(7,(6,7)) (k=n+1=8) **t2**→(8-6,8-7)=(2,1) **t1**→**(1,2)** ∴f(7,(6,7))=f(7,(1,2))

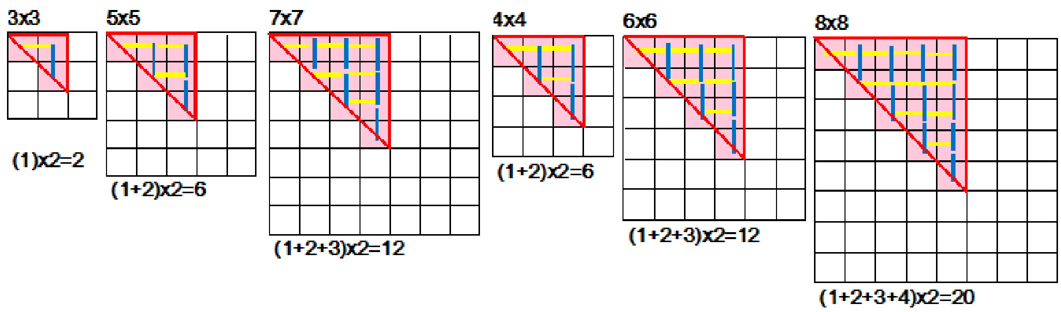
f(11,(7,8))(k=n+1=12)**t2**→(12-7,12-5)=(5,4)**t1**→**(4,5)** ∴f(11,(7,8))=f(11,(4,5))

在完成研究 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格，其總方格數之規律性及函數關係探討及所有位置的座標轉換規則之後，我試著將研究問題延伸至任取相鄰二個方格之探討。

三、 在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格的方法數。

(一) 為了找出在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格後，所包含的總方格共有多少個，所以我先計算出在 nxn 的方塊中，任取相鄰二個方格的方法數共有幾種？ 如下圖，黃色線條代表橫向的取法，藍色線條代表縱向的取法。和取單一方格相同，只要取下圖中紅色三角形區域中的方格即可包含所有的取法。且當 n 為奇數及偶數時，分別存在著一種規律性：

n∈奇數　　　　　　　　　　n∈偶數



(二) 以邊長 n 為奇數及偶數來做區分，各找出任取二個方格的方法數公式

1. 邊長 n 為奇數時，其取法數公式為：

$$2(1+2+\dots+\frac{n-1}{2})=(1+\frac{n-1}{2})(\frac{n-1}{2})=\frac{n^2-1}{4}$$

2. 邊長 n 為偶數時，其取法數公式為：

$$2(1+2+\dots+\frac{n}{2})=(1+\frac{n}{2})(\frac{n}{2})=\frac{n^2+2n}{4}$$

四、 <u>在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格後，所包含的 1x1，2x2……. nxn 總方格數之規律性及函數關係探討及所有位置座標的轉換規則。</u>

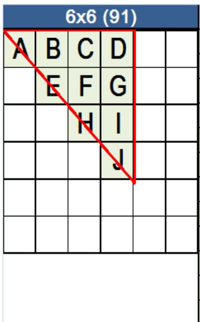
(一) 同研究過程二，我先將每個方格定上座標(x,y)，x 值為第 x 列，y 值為第 y 行。

(二) 同研究過程二，定義未缺塊時之總方格數為 **C(n)** ，且

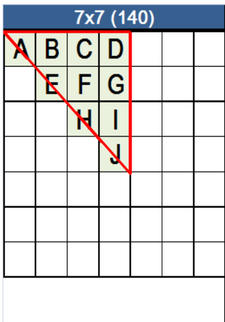
C(n)= $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)	C(7)	C(8)	C(9)	C(10)	C(11)
總方格數	14	30	55	91	140	204	285	385	506

(三) 首先我用列舉及刪除兩種方法，完整計算出在 3x3 至 8x8 的方塊中，任取相鄰二個位置方格橫向[(x,y),(x,y+1)] 或 縱向[(x,y),(x+1,y)] 後，其所包含的總方格數值，並驗證其值是相同的。

1. <u>列舉法：</u>計算出所有不同大小的方格後，再做加總計算。下表為 6x6 和 7x7 以列舉法計算總方格數後的結果：

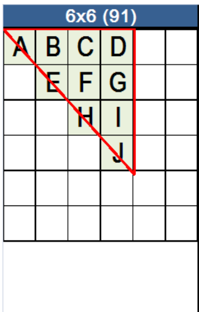


取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	總方格數	方格差
AB	34	23	14	7	2	0	80	-11
BC	34	22	13	6	2	0	77	-14
CD	34	22	12	6	2	0	76	-15
BE	34	21	12	5	0	0	72	-19
CF	34	21	10	3	0	0	68	-23
DG	34	21	10	3	0	0	68	-23
EF	34	19	10	3	0	0	66	-25
FG	34	19	8	3	0	0	64	-27
FH	34	19	7	0	0	0	60	-31
GI	34	19	7	0	0	0	60	-31
HI	34	19	4	0	0	0	57	-34
IJ	34	19	4	0	0	0	57	-34

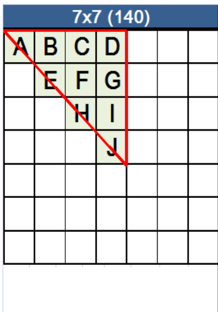


取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	總方格數	方格差
AB	47	34	23	14	7	2	0	127	-13
BC	47	33	22	13	6	2	0	123	-17
CD	47	33	21	12	6	2	0	121	-19
BE	47	32	21	12	5	0	0	117	-23
CF	47	32	19	10	3	0	0	111	-29
DG	47	32	19	8	3	0	0	109	-31
EF	47	30	19	10	3	0	0	109	-31
FG	47	30	17	8	3	0	0	105	-35
FH	47	30	16	7	0	0	0	100	-40
GI	47	30	16	4	0	0	0	97	-43
HI	47	30	13	4	0	0	0	94	-46
IJ	47	30	13	0	0	0	0	90	-50

2. <u>刪除法：</u>計算出包含該刪除方格的不同大小方格之總扣除數，再用 C(n) 減去其數值，所得的數字即為總方格數。以下為 6x6 和 7x7 的總方格數計算結果：

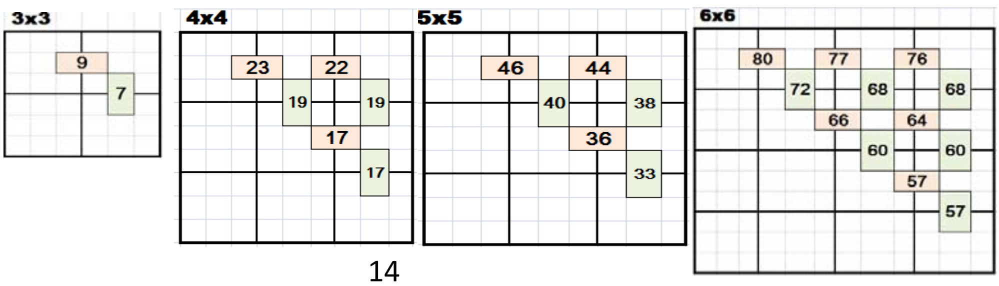


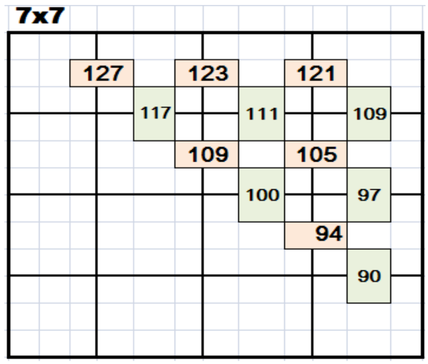
取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	總扣除數	總方格數
AB	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-11	80
BC	-2	-3	-4	-2	-2	-1	-14	77
CD	-2	-3	-4	-3	-2	-1	-15	76
BE	-2	-4	-4	-4	-4	-1	-19	72
CF	-2	-4	-6	-6	-4	-1	-23	68
DG	-2	-4	-6	-6	-4	-1	-23	68
EF	-2	-6	-6	-6	-4	-1	-25	66
FG	-2	-6	-8	-6	-4	-1	-27	64
FH	-2	-6	-9	-9	-4	-1	-31	60
GI	-2	-6	-9	-9	-4	-1	-31	60
HI	-2	-6	-12	-9	-4	-1	-34	57
IJ	-2	-6	-12	-9	-4	-1	-34	57

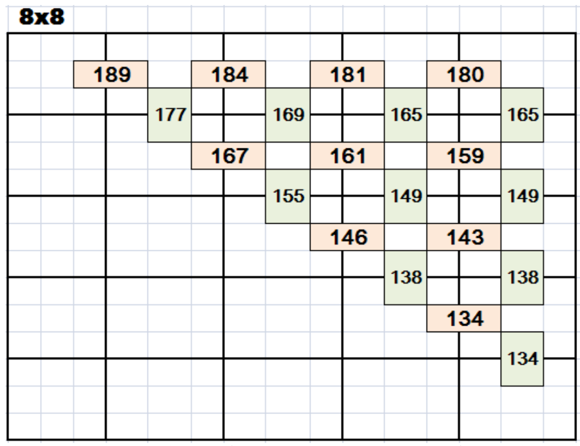


取	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	總扣除數	總方格數
AB	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-13	127
BC	-2	-3	-3	-3	-3	-2	-1	-17	123
CD	-2	-3	-4	-4	-3	-2	-1	-19	121
BE	-2	-4	-4	-4	-4	-4	-1	-23	117
CF	-2	-4	-6	-6	-6	-4	-1	-29	111
DG	-2	-4	-6	-8	-6	-4	-1	-31	109
EF	-2	-6	-6	-6	-6	-4	-1	-31	109
FG	-2	-6	-8	-8	-6	-4	-1	-35	105
FH	-2	-6	-9	-9	-9	-4	-1	-40	100
GI	-2	-6	-9	-12	-9	-4	-1	-43	97
HI	-2	-6	-12	-12	-9	-4	-1	-46	94
IJ	-2	-6	-12	-16	-9	-4	-1	-50	90

3. 以**列舉法**及**刪除法** 兩種方法計算出在 3x3 至 8x8 的方塊中，任取出二個位置方格橫向[(x,y),(x,y+1)] 或 縱向[(x,y),(x+1,y)]後，其所包含總方格數之值是相同的，結果整理如下表。接著我嘗試將各組數字進行分析，尋找數字間是否有存在某種規律性和函數式。







(四) 首先【定義】在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個位置方格，橫向相鄰[(x,y),(x,y+1)] 或 縱向相鄰[(x,y),(x+1,y)]後，所包含的 1x1，2x2.... nxn 總方格數各為 **f (n , (x,y) ,(x,y+1))** 或 **f (n , (x,y) ,(x+1,y))** 且 $x \le y < \frac{n+3}{2}$，接著經由上述二種計算方式所得之總方格數值，我試著利用和任取單一位置方格的一般及遞迴的相同二種規律性，求得 **f (n , (x,y) ,(x,y+1))** 和 **f (n , (x,y) ,(x+1,y))** 之函數式。

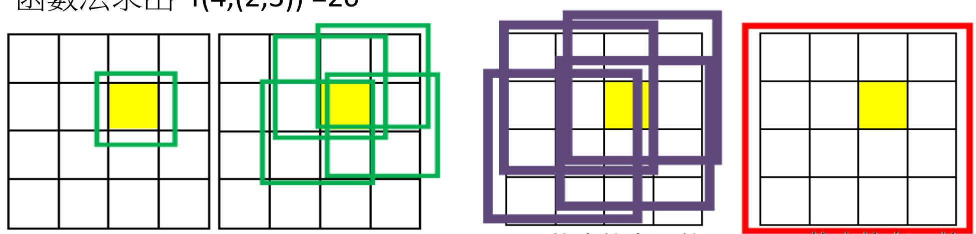
1. 一般函數法：

在 nxn 方塊中，任取橫向連二方格**[(x,y),(x,y+1)]**、或縱向連二方格**[(x,y) ,(x+1,y)]**後，所包含的總方格數。我嘗試利用之前研究過程二之以一般函數法求任取單一位置方格的總方格數之函數式當基礎，延伸至以一般函數法求任取相鄰兩位置方格總方格數之函數式，首先我以相鄰位置方格之**(第二格座標)**為比較點，試著找尋其間之差值(設 **DV**)。即

橫向 **DV**= f(n,**(x,y+1)**) - f(n,(x,y),**(x,y+1)**) or f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x,y+1)) - DV

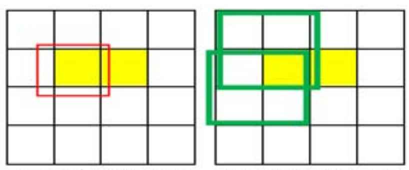
縱向 **DV**= f(n,**(x+1,y)**) - f(n,(x,y),**(x+1,y)**) or f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x+1,y)) - DV

(1)以 f(4,(2,2),(2,3))為例。我以(2,3)為比較點，利用先前取單一方格之一般函數法求出 f(4,(2,3)) =20。



1x1 的方格有 1 格　2x2 的方格有 4 格　3x3 的方格有 4 格　4x4 的方格有 1 格

如取[(2,2),(2,3)]時，有一些方格會與取(2,3)的重複，而沒有重複的部分如下圖，此個數差即為 DV，



1x1 的方格有 1 個　2x2 的方格有 2 個

∵ DV=1+2=3

∴ f(4,(2,2),(2,3)) = (f(4,(2,3))- DV = 20-3 = 17

我將此種差值 DV 的關係分類為橫向之關係，以及縱向之關係來探討是否可找到 DV 值和 n, x, y 之關係

(2)橫向 DV 及 縱向 DV 的公式分析過程如下：以 n=6 為例 C(6)=91

6x6	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	總扣除數	總方格數
(1,1)	1	1	1	1	1	1	6	85
(1,2)	1	2	2	2	2	1	10	81
(1,3)	1	2	3	3	2	1	12	79
(2,2)	1	4	4	4	4	1	18	73
(2,3)	1	4	6	6	4	1	22	69
(3,3)	1	4	9	9	4	1	28	63

6x6	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	總扣除數	總方格數
(1,1)(1,2)	2	2	2	2	2	1	11	80
(1,2)(1,3)	2	3	3	3	2	1	14	77
(1,2)(2,2)	2	4	4	4	4	1	19	72
(1,3)(2,3)	2	4	6	6	4	1	23	68
(2,2)(2,3)	2	6	6	6	4	1	25	66
(2,3)(3,3)	2	6	9	9	4	1	31	60

橫向(x,y)(x,y+1)分析	
f(6,(1,1),(1,2))=f(6,(1,2))-1=81-1=80	DV=1
f(6,(1,2),(1,3))=f(6,(1,3))-2=79-2=77	DV=2
f(6,(2,2),(2,3))=f(6,(2,3))-3=69-3=66	DV=3
f(7,(1,1),(1,2))=f(7,(1,2))-1=128-1=127	DV=1
f(7,(1,2),(1,3))=f(7,(1,3))-2=125-2=123	DV=2
f(7,(1,3),(1,4))=f(7,(1,4))-3=124-3=121	DV=3
f(7,(2,2),(2,3))=f(7,(2,3))-3=112-3=109	DV=3
f(7,(2,3),(2,4))=f(7,(2,4))-5=110-5=105	DV=5
f(7,(3,3),(3,4))=f(7,(3,4))-6=100-6= 94	DV=6
f(8,(1,1),(1,2))=f(8,(1,2))-1=190-1=189	DV=1
f(8,(1,2),(1,3))=f(8,(1,3))-2=186-2=184	DV=2
f(8,(1,3),(1,4))=f(8,(1,4))-3=184-3=181	DV=3
f(8,(2,2),(2,3))=f(8,(2,3))-3=170-3=167	DV=3
f(8,(2,3),(2,4))=f(8,(2,4))-5=166-5=161	DV=5
f(8,(3,3),(3,4))=f(8,(3,4))-6=152-6=146	DV=6
f(9,(1,1),(1,2))=f(9,(1,2))-1=269-1=268	DV=1
f(9,(1,2),(1,3))=f(9,(1,3))-2=264-2=262	DV=2
f(9,(1,3),(1,4))=f(9,(1,4))-3=261-3=258	DV=3
f(9,(1,4),(1,5))=f(9,(1,5))-3=260-4=256	DV=4
f(9,(2,2),(2,3))=f(9,(2,3))-3=245-3=242	DV=3
f(9,(2,3),(2,4))=f(9,(2,4))-5=239-5=234	DV=5
f(9,(2,4),(2,5))=f(9,(2,5))-5=237-7=230	DV=7
f(9,(3,3),(3,4))=f(9,(3,4))-6=221-6=215	DV=6
f(9,(3,4),(3,5))=f(9,(3,5))-6=218-9=209	DV=9
f(9,(4,4),(4,5))=f(9,(4,5))-6=205-10=195	DV=10

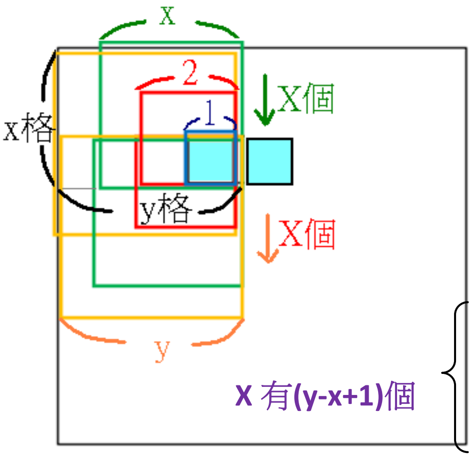
縱向(x,y)(x+1,y)分析	
f(6,(1,2),(2,2))=f(6,(2,2))-1=73-1=72	DV=1
f(6,(1,3),(2,3))=f(6,(2,3))-1=69-1=68	DV=1
f(6,(2,3),(3,3))=f(6,(3,3))-3=63-3=60	DV=3
f(7,(1,2),(2,2))=f(7,(2,2))-1=118-1=117	DV=1
f(7,(1,3),(2,3))=f(7,(2,3))-1=112-1=111	DV=1
f(7,(1,4),(2,4))=f(7,(2,4))-1=110-1=109	DV=1
f(7,(2,3),(3,3))=f(7,(3,3))-3=103-3=100	DV=3
f(7,(2,4),(3,4))=f(7,(3,4))-3=100-3= 97	DV=3
f(7,(3,4),(4,4))=f(7,(4,4))-6= 96-6= 90	DV=6
f(8,(1,2),(2,2))=f(8,(2,2))-1=178-1=177	DV=1
f(8,(1,3),(2,3))=f(8,(2,3))-1=170-1=169	DV=1
f(8,(1,4),(2,4))=f(8,(2,4))-1=166-1=165	DV=1
f(8,(2,3),(3,3))=f(8,(3,3))-3=158-3=155	DV=3
f(8,(2,4),(3,4))=f(8,(3,4))-3=152-3=149	DV=3
f(8,(3,4),(4,4))=f(8,(4,4))-6=144-6=138	DV=6
f(9,(1,2),(2,2))=f(9,(2,2))-1=255-1=254	DV=1
f(9,(1,3),(2,3))=f(9,(2,3))-1=245-1=244	DV=1
f(9,(1,4),(2,4))=f(9,(2,4))-1=239-1=238	DV=1
f(9,(1,5),(2,5))=f(9,(2,5))-1=237-1=236	DV=1
f(9,(2,3),(3,3))=f(9,(3,3))-3=230-3=227	DV=3
f(9,(2,4),(3,4))=f(9,(3,4))-3=221-3=218	DV=3
f(9,(2,5),(3,5))=f(9,(3,5))-3=218-3=215	DV=3
f(9,(3,4),(4,4))=f(9,(4,4))-6=209-6=203	DV=6
f(9,(3,5),(4,5))=f(9,(4,5))-6=205-6=199	DV=6
f(9,(4,5),(5,5))=f(9,(5,5))-6=200-10=190	DV=10

【橫向 DV 的數值分析】 **DV 值和 n, x, y 之關係?** 我發現上表 DV 數字和 n 值無關，且當

橫向	x=1 y=1	x=1 y=2	x=1 y=3	x=1 y=4	x=2 y=2	x=2 y=3	x=2 y=4	x=3 y=3	x=3 y=4	x=4 y=4	x=5 y=5
DV	1	2	3	4	3	5	7	6	9	10	15
關係	DV=xy-0				DV=xy-1			xy-3		xy-6	xy-10

∴由上表可以發現 **DV** = $xy-\sum_{k=1}^{x-1}k$ 之關係

【橫向 DV 的公式證明】**DV= xy -** $\sum_{k=1}^{x-1} k$



1x1→1 個
2x2→2 個
3x3→3 個
…….
(x-1)(x-1)→(x-1)個
x.x→x 個
(x+1)(x+1)→x 個
…….
y.y→x 個

∴橫向 DV=[1+2+3+……+(x-1)+x+……+x]

$$=\frac{(x-1)(1+x-1)}{2}+(y-x+1)x$$

$$=\frac{-x^2+2xy+x}{2}$$

$$=xy-\frac{x(x-1)}{2}$$

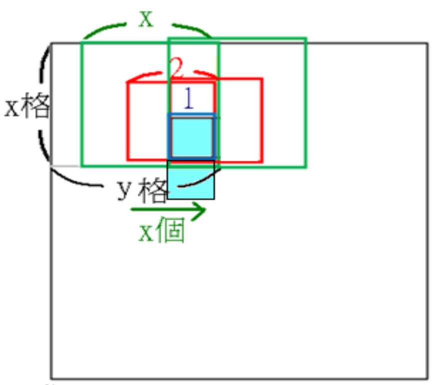
$$=xy-\sum_{k=1}^{x-1} k$$

【縱向 DV 的數值分析】 DV 值和 n, x, y 之關係 我發現上表 DV 數字和 n 值與 y 值無關，且當

縱向	x=1 y=1	x=1 y=2	x=1 y=3	x=1 y=4	x=2 y=2	x=2 y=3	x=2 y=4	x=3 y=3	x=3 y=4	x=4 y=4	x=5 y=5
DV	1	1	1	1	3	3	3	6	6	10	15
關係	DV= 1				DV= 3			DV=6		DV=10	DV=15

∴由上表可以發現∴**DV=** $\sum_{k=1}^{x} k$

【縱向 DV 的公式證明】**DV =** $\sum_{k=1}^{x} k$



1x1→1 個
2x2→2 個
3x3→3 個
……
x.x→x 個

∴縱向 DV=(1+2+3+……+x)

$$=\sum_{k=1}^{x} k$$

(3) 由此可知在 nxn 方塊中，
任取二個橫向連二方格[**(x,y) ,(x,y+1)**]後，其總方格數之函數式為：

$$\mathbf{f(n,(x,y),(x,y+1)) = f(n,(x,y+1)) - xy + \sum_{k=1}^{x-1} k}$$

任取二個縱向連二方格[**(x,y) ,(x+1,y)**]後，其總方格數之函數式為：

$$\mathbf{f(n,(x,y),(x+1,y)) = f(n,(x+1,y)) - \sum_{k=1}^{x} k}$$

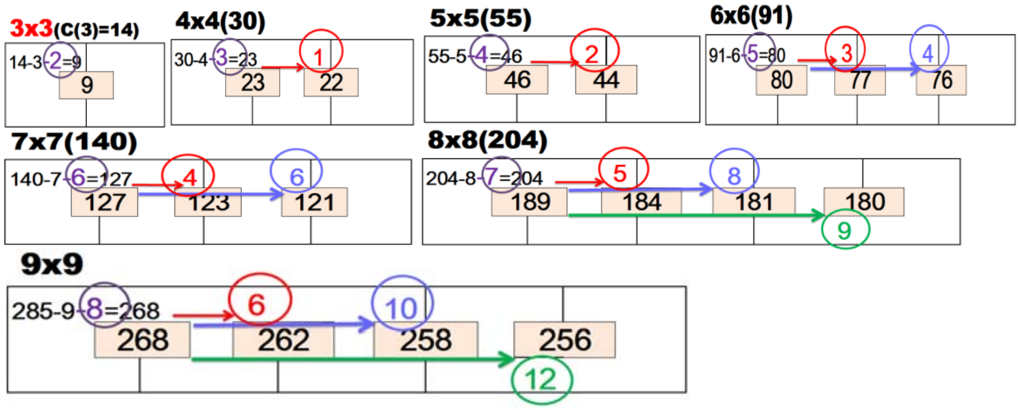
(4) 綜合以上二種關係，應用此一般函數之關係式，驗算如下：
f(8,(2,3),(2,4))=f(8(2,4))- 2x3+(1)=166-5 =161
f(7,(3,4),(4,4))=f(7,(4,4))-3x4+(1+2+3) =96-6 =90

2. 遞迴函數法：

在 nxn 的方塊中，任取橫向相鄰位置方格**[(x,y) ,(x,y+1)]**、或縱向相鄰位置方格**[(x,y) ,(x+1,y)]**後，所包含的總方格數。經過觀察分析後發現總方格數字中存在一種等差的關係，且第一列和第二列之後的關係規則不同，因此我將它分類為第一列橫向之等差關係以及第二列之後的斜向等差關係來探討。

(1) 第一列之橫向等差關係： x=1,y≥1 ，[(1,y)(1,y+1)] 之探討

【A. 數字分析】



由於在研究過程二中發現，任取出一個位置方格 (x,y) ，其第一列(1,y)的每一個值，可用 f(n, (1,y))= [C(n)-n]-dv, 差值 dv=(y-1) (n-y) 來計算出結果，因此我想利用相同的函數求法，探討任取相鄰二方格之函數式。 觀察上圖數字間的規則，我發現在邊長數 n 不同的情況下，同任取一個方格一樣，存在相似的等差關係，且在

y=1 所有座標[(1,1),(1,2)]之值皆為**[C(n)-n]-d_1** 且當 n=3,4,5,6,7,8,9 時，紫圈數字 **d_1** 分別為 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (首項=2，公差=1)，且發現 d_1 和 n 之關係式為 d_1=n-1, 例: f(3,(1,1))=C(3)-3-d_1=14-3-2=9, f(4,(1,1))=C(4)-4-d_1=30-4-3=23......， ∴紫圈差值 **d_1=(n-1)**

y≥2 圈圈中的數字代表 f(n,(1,1),(1,2))與 f(n,(1,y),(1,y+1))的差值 d2

紅圈 **y=2 : [(1,2),(1,3)]** 當 n= 4, 5, 6, 7, 8, 9 時，紅圈數字分別為 1, 2, 3, 4,5,6，(首項 $d2_4$=1,公差 d 為 1) ∴$d2_4$=(4-3)d=1 $d2_5$=(5-3)d=2 , $d2_6$=(6-3)d=3 ... $d2_n$=(n-3)d ,且發現 d 和 y 之關係式為 **d=y-1=1**

∴紅圈差值 **d2=(n-2-1)(2-1)=(n-y-1)(y-1)** ， 同理當

藍圈 **y=3 : [(1,3),(1,4)]**當 **n= 6, 7, 8, 9** 時，藍圈數字分別為 4, 6, 8, 10，(首項=4，公差 d 為 2) **, d=2=y-1**

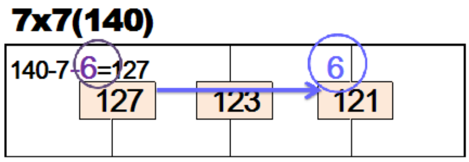
∴藍圈差值 **d_2=(n-3-1)(3-1)= (n-y-1)(y-1)**

綠圈 **y=4 : [(1,4),(1,5)]** 當 **n= 7, 8** 時，綠圈數字分別為 9,12，(首項=9，公差 d 為 3) **, d=3=y-1**

∴綠圈差值 **d_2=(n-4-1)(4-1)= (n-y-1)(y-1)**

因此我將第一列橫向位置座標[(1,y)(1,y+1)]之總方格數的差值關係，整理如下

[(1,y),(1,y+1)]的取法與[(1,1),(1,2)]的取法做比較，計算兩者之間的總差值設為 dv 且 **dv=(y=1 紫圈中差值 d_1)+(y≥2 圈圈中的差值 d_2)**



∴**dv= (n-1)+(n-y-1)(y-1)**

= (n-1)+(n-y-1)(y-1)

= n-1+ny-n-y^2+y-y+1

= ny-y^2

= y(n-y)

∴總方格數 **f(n, (1,y),(1,y+1)) =[C(n)-n]-dv, dv=y(n-y)**

以 f(7,(1,3),(1,4))為例,總方格數=C(7)-7-3(7-3)=140-7-$12_{(6+6)}$=121

利用上述分析的結果，我可以找到函數式

f(n, (1,y),(1,y+1)) =[C(n)-n]-dv， dv=y(n-y)

利用此函數式驗算 3x3 至 8x8 第一列中每一個值，其結果和先前以刪除法和列舉法所得結果是相同的。

f(n,(1,y),(1,y+1))=(C(n)-n)- dv	dv =y(n-y)
f(3,(1,1),(1,2))=(14-3)-2=9	2=1(3-1)
f(4,(1,1),(1,2))=(30-4)-3=23	3=1(4-1)
f(4,(1,2),(1,3))=(30-4)-4=22	4=2(4-2)
f(5,(1,1),(1,2))=(55-5)-4=46	4=1(5-1)
f(5,(1,2),(1,3))=(55-5)-6=44	6=2(5-2)
f(6,(1,1),(1,2))=(91-6)-5=80	5=1(6-1)
f(6,(1,2),(1,3))=(91-6)-8=77	8=2(6-2)
f(6,(1,3),(1,4))=(91-6)-9=76	9=3(6-3)
f(7,(1,1),(1,2))=(140-7)-6=127	6=1(7-1)
f(7,(1,2),(1,3))=(140-7)-10=123	10=2(7-2)
f(7,(1,3),(1,4))=(140-7)-12=121	12=3(7-3)
f(8,(1,1),(1,2))=(204-8)-7=189	7=1(8-1)
f(8,(1,2),(1,3))=(204-8)-12=184	12=2(8-2)
f(8,(1,3),(1,4))=(204-8)-15=181	15=3(8-3)
f(8,(1,4),(1,5))=(204-8)-16=180	16=4(8-4)

【B. 公式證明】f(n, (1,y),(1,y+1)) =[C(n)-n]-y(n-y)

由上述分析可得公式為 f(n,(1,y),(1,y+1))=C(n)-n-y(n-y)

由一般函數之橫向 DV 可知

f(n,(1,y),(1,y+1)) =f(n,(1,y+1))-DV

=f(n,(1,y+1))-y……….①

由取單一方格之總扣除數 D(n,(x,y))公式可知

f(n,(1,y+1))=C(n)-D(n,(1,y+1))

$$=C(n)-2\sum_{k=1}^{1}k^2-2\sum_{k=2}^{y+1}k-(n-2y-2)(y+1) \quad \cdots\cdots\cdots②$$

∵由①②可知

$$∴f(n,(1,y),(1,y+1))=C(n)-2\sum_{k=1}^{1}k^2-2\sum_{k=2}^{y+1}k-(n-2y-2)(y+1)-y$$

$=C(n)-2-(y+3)y-ny-n+2y^2+3y+2$

$=C(n)-n+y^2-ny$

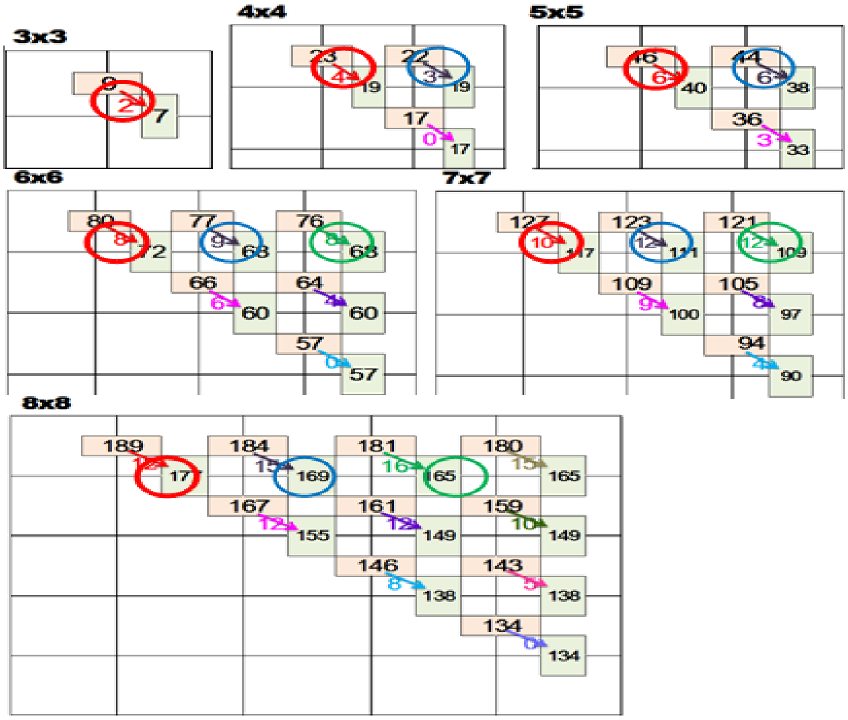
=C(n)-n-y(n-y)

(2) 第二列之後的斜向等差關係探討，由於在分析縱向和橫向的數字時，無法找到相同的等差關係，所以我將其分成縱向和橫向來探討。

A. 縱向連二方格：x>1 ,[(x,y-1),(x,y)] → [(x,y),(x+1,y)] 之探討

【a. 數字分析】

座標位置方格從 [(x,y-1),(x,y)]至[(x,y),(x+1,y)] 之總方格數差值 dv，在邊長數 n 不同的情況下，存在一種等差的關係。如下圖表所示：



在研究過程二中發現，任取一個方格，在 x>1 時其所包含總方格數為 f(n(x,y)) = f(n(x-1,y-1))- (n-x-y+2)(x+y-1)，因此我想利用相同的函數求法，探討任取縱向連二方格之函數式。

<分析 1>在 n= 3,4,5,6,7,8 從(1,1)(1,2)→(1,2)(2,2) 其差值 dv 分別為 2,4,6,8,10,12(如上圖中 紅圈所示)，其公差 d 為 2

<分析 2>在 n=4,5,6,7,8 從(1,2)(1,3)→(1,3)(2,3) 其差值 dv 分別為 3,6,9,12,15(如上圖中 藍圈所示)，其公差 d 為 3

<分析 3>在 n=6,7,8 從(1,3)(1,4)→(1,4)(2,4) 其差值 dv 分別為 8,12,16(如上圖中 綠圈所示)，其公差 d 為 4

觀察上圖表中總方格數字的等差關係，整理如下表，並嘗試找尋其規律性及函數式

X>1	等差規則 dv	分析綠色紅色數字和 x，y 之關係	
x=1 y=2	f(n,(1,2),(2,2))= f(n,(1,1),(1,2))-(n-2)2	2=1+2-1	2=y
x=1 y=3	f(n,(1,3),(2,3))= f(n,(1,2),(1,3))-(n-3)3	3=1+3-1	3=y
x=1 y=4	f(n,(1,4),(2,4))= f(n,(1,3),(1,4))-(n-4)4	4=1+4-1	4=y
x=2 y=3	f(n,(2,3),(3,3))= f(n,(2,2),(2,3))-(n-4)3	4=2+3-1	3=y
x=2 y=4	f(n,(2,4),(3,4))= f(n,(2,3),(2,4))-(n-5)4	5=2+4-1	4=y
x=3 y=4	f(n,(3,4),(4,4))= f(n,(3,3),(3,4))-(n-6)4	6=3+4-1	4=y
…	…	……	……
x=x y=y	f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))–(n-p)q	p=x+y-1	q=y
x=x y=y	f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv dv=(n-x-y+1)y		

在此等差關係下，找尋到差值 dv 為 **dv=(n-x-y+1)y**，因此我以斜向的等差關係來找尋第二列之後任取縱向連二方格的總方格數，如果要計算 f(n,(x,y),(x+1,y))時，就以 f(n,(x,y-1),(x,y))來做基礎，減去其間的差值 dv 即可。驗算此函數式在 3x3 至 8x8 方塊，其計算結果和先前以刪除和列舉法所得結果是相同的

f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv	dv=(n-x-y+1)y
[(1,2),(2,2)]	
f(3,(1,2),(2,2))=f(3,(1,1),(1,2))-2=7 f(4,(1,2),(2,2))=f(4,(1,1),(1,2))-4=19 f(5,(1,2),(2,2))=f(5,(1,1),(1,2))-6=40 f(6,(1,2),(2,2))=f(6,(1,1),(1,2))-8=72 f(7,(1,2),(2,2))=f(7,(1,1),(1,2))-10=117 f(8,(1,2),(2,2))=f(8,(1,1),(1,2))-12=177	2=1x2 4=2x2 6=2x3 8=2x4 10=2x5 12=2x6
[(1,3),(2,3)]	
f(5,(1,3),(2,3))=f(5,(1,2),(1,3))-6=38 f(6,(1,3),(2,3))=f(6,(1,2),(1,3))-9=68 f(7,(1,3),(2,3))=f(7,(1,2),(1,3))-12=111 f(8,(1,3),(2,3))=f(8,(1,2),(1,3))-15=169	6=2x3 9=3x3 12=4x3 15=5x3
[(1,4),(2,4)]	
f(6,(1,4),(2,4))=f(6,(1,3),(1,4))-8=68 f(7,(1,4),(2,4))=f(7,(1,3),(1,4))-12=109 f(8,(1,4),(2,4))=f(8,(1,3),(1,4))-16=165	8=2x4 12=3x4 16=4x4
[(2,3),(3,3)]	
f(6,(2,3),(3,3))=f(6,(2,2),(2,3))-6=60 f(7,(2,3),(3,3))=f(7,(2,2),(2,3))-9=100 f(8,(2,3),(3,3))=f(8,(2,2),(2,3))-12=155	6=2x3 9=3x3 12=4x3
[(2,4),(3,4)]	
f(6,(2,4),(3,4))=f(6,(2,3),(2,4))-4=60 f(7,(2,4),(3,4))=f(7,(2,3),(2,4))-8=97 f(8,(2,4),(3,4))=f(8,(2,3),(2,4))-12=149	4=1x4 8=2x4 12=3x4
[(3,4),(4,4)]	
f(6,(3,4),(4,4))=f(6,(3,3),(3,4))-0=57 f(7,(3,4),(4,4))=f(7,(3,3),(3,4))-4=90 f(8,(3,4),(4,4))=f(8,(3,3),(3,4))-8=134	0=0x4 4=1x4 8=2x4

由此規則可以推出，在 x>1 任取縱向連二方格，其所包含總方格數應為 **f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-(n-x-y+1)y**

【b. 公式證明】f(n,(x,y)(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv

證明：**dv=(n-x-y+1)y**

由上述公式可得 dv= f(n,(x,y-1),(x,y))- f(n,(x,y)(x+1,y))

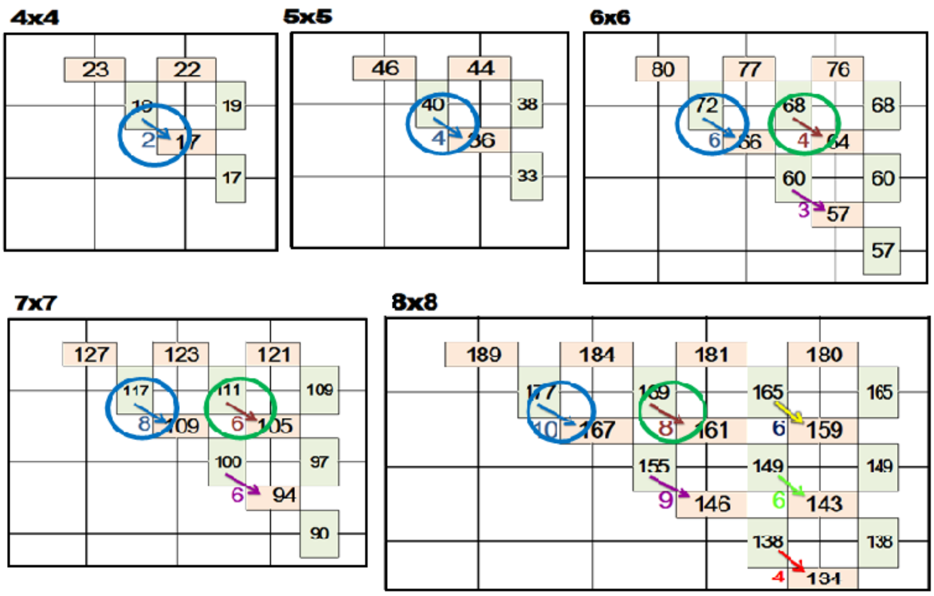
利用任取相鄰兩個方格之一般函數法的公式可知

$$
\begin{aligned}
dv &= f(n,(x,y-1),(x,y)) - f(n,(x,y)(x+1,y)) \\
&= [f(n,(x,y)) - x(y-1) + \sum_{k=1}^{x-1} k\ ] - [f(n,(x+1,y)) - \sum_{k=1}^{x} k] \\
&= [C(n) - D(n,(x,y)) - x(y-1) + \sum_{k=1}^{x-1} k\ ] - [\ C(n) - D(n,(x+1,y)) - \sum_{k=1}^{x} k \\
&= D(n,(x+1),y)) - D(n,(x,y)) + \frac{x^2+x}{2} - xy + \frac{x^2-x}{2} + x \\
&= D(n,(x+1),y)) - D(n,(x,y)) + x^2 - xy + x \\
&= 2\sum_{k=1}^{x+1} k^2 + 2\sum_{k=x+2}^{y} (x+1)k + y(n-2y)(x+1) \quad - 2\sum_{k=1}^{x} k^2 - 2\sum_{k=x+1}^{y} xk - xy(n-2y) + x^2 - xy + x \\
&= 2(x+1)^2 + (x+y+2)(y-x-1)(x+1) - (x+y+1)(y-x)x + y(n-2y) + x^2 - xy + x \\
&= 2(x+1)^2 + (x+y+2)(y-2x-1) + (y-x)x + y(n-2y) + x(x-y) + x \\
&= 2(x+1)^2 + (x+y+2)(y-2x-1) + y(n-2y) + x \\
&= 2x^2 + 4x + 2 + xy - 2x^2 - x + y^2 - 2xy - y + 2y - 4x - 2 + ny - 2y^2 + x \\
&= -x - xy - y^2 + y + ny + x \\
&= (n-x-y+1)y
\end{aligned}
$$

B. 橫向連二方格：x>1 ,[(x-1,y),(x,y)]→[(x,y),(x,y+1)] 之探討

【a. 數字分析】

座標位置方格[(x-1,y),(x,y)]至[(x,y),(x,y+1)]之總方格數差值 dv，在邊長 n 不同的情況下，存在一種等差的關係。如下圖所示：



<分析一>在 n=4,5,6,7,8 從[(1,2),(2,2)]→[(2,2),(2,3)] 其差值 dv 分別為 2,4,6,8,10 (如上圖中 藍圈所示)，其公差為 2

<分析二>在 n=6,7,8 從[(1,3),(2,3)]→[(2,3),(2,4)]其差值 dv 分別為 4,6,8(如上圖中 綠圈所示)，其公差為 2

觀察上圖表中總方格數字的等差關係，整理如下表，並嘗試找尋其規律性及函數式

X>1	等差規則 dv	分析綠色紅色數字和 x , y 之關係	
x=2 y=2	f (n,(2,2),(2,3))= f(n,(1,2),(2,2))-(n-3)2	3=2+2-1	2=x
x=2 y=3	f (n,(2,3),(2,4))= f(n,(1,3),(2,3))-(n-4)2	4=2+3-1	2=x
x=3 y=3	f (n,(3,3),(3,4))= f(n,(2,3),(3,3))-(n-5)3	5=3+3-1	3=x
...	...	.....	.....
x=x y=y	f (n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x-1,y),(x,y))--(n-p)q	p=x+y-1	q=x
x=x y=y	f (n,(x,y),(x,y+1))=f (n,(x-1,y),(x,y))-dv dv=(n-x-y+1)x		

在此等差關係下，找尋到差值設為 **dv= (n-x-y+1)x**，因此我以斜向的等差關係來找尋第二列之後任取橫向連二方格的 f(n,(x,y),(x,y+1))公式，如果要計算 f(n,(x,y),(x,y+1))時，就以 f(n,(x-1,y),(x,y))來做基礎，減去其間的差值 dv 即可。

所以其公式為 **f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))- (n-x-y+1)x**

驗算此函數式在 3x3 至 8x8 方塊，其結果和先前以刪除和列舉法所得結果是相同的。

f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x-1,y),(x,y))-dv	dv=(n-x-y+1)x
[(2,2),(2,3)]	
f(5,(2,2),(2,3))=f(5,(1,2),(2,2))-4=36	4=2x2
f(6,(2,2),(2,3))=f(6,(1,2),(2,2))-6=66	6=3x2
f(7,(2,2),(2,3))=f(7,(1,2),(2,2))-8=109	8=4x2
f(8,(2,2),(2,3))=f(8,(1,2),(2,2))-10=167	10=5x2
[(2,3),(2,4)]	
f(6,(2,3),(2,4))=f(6,(1,3),(2,3))-4=64	4=2X2
f(7,(2,3),(2,4))=f(7,(1,3),(2,3))-6=105	6=3x2
f(8,(2,3),(2,4))=f(8,(1,3),(2,3))-8=161	8=4x2
[(3,3),(3,4)]	
f(6,(3,3),(3,4))=f(6,(2,3),(3,3))-3=57	3=1x3
f(7,(3,3),(3,4))=f(7,(2,3),(3,3))-6=94	6=2x3
f(8,(3,3),(3,4))=f(8,(2,3),(3,3))-9=146	9=3x3

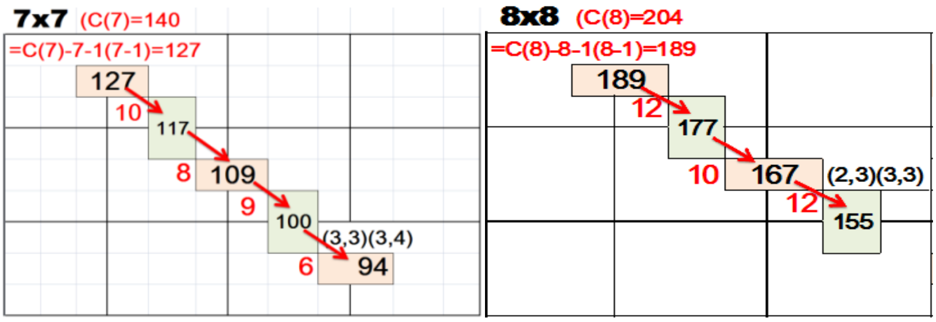
【b. 公式證明】f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv , dv=(n-x-y+1)x

同縱向連二方格公式，橫向連二方格公式也可以相同方式得證。

(3) 綜合以上二種等差關係，以遞迴的規律性，求得之函數為

第一列	x=1 , f(n,(1,y),(1,y+1))=(C(n)-n)-dv	dv=y(n-y)
橫向	x>1 , f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x-1,y),(x,y))-dv	dv=x(n-x-y+1)
縱向	x>1 , f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv	dv=y(n-x-y+1)

應用此遞迴函數之關係，舉例如下：



橫向 f(7,(3,3),(3,4))=f(7,(2,3),(3,3))-3(7-3-3+1)=f(7,(2,3),(3,3))-6

=f(7,(2,2),(2,3))-3(7-2-3+1)-6= f(7,(2,2),(2,3))-9-6

=f(7,(1,2),(2,2))-2(7-2-2+1)-9-6= f(7,(1,2),(2,2))-8-9-6

=f(7,(1,1),(1,2))-2(7-1-2+1)-8-9-6= f(7,(1,1),(1,2))-10-8-9-6

=(140-7)-1(7-1)-10-8-9-6= 94

縱向 f(8,(2,3),(3,3))= f(8,(2,2),(2,3))-3(8-2-3+1)= f(8,(2,2),(2,3))-12

=f(8,(1,2),(2,2))-2(8-2-2+1)-12= f(8,(1,2),(2,2))-10-12

=f(8,(1,1),(1,2))-2(8-1-2+1)-10-12= f(8,(1,1),(1,2))-12-10-12

=(204-8)-1(8-1)-12-10-12= 155

(五) 一般函數法以及遞迴函數法的檢驗

一般函數

橫向	$f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x,y+1))-xy+\sum_{k=1}^{x-1}k$
縱向	$f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x+1,y))-\sum_{k=1}^{x}k$

遞迴函數

第一列	x=1 , f(n,(1,y),(1,y+1))=(C(n)-n)-dv	dv=y(n-y)
橫向	x>1 , f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x-1,y),(x,y))-dv	dv=x(n-x-y+1)
縱向	x>1 , f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv	dv=y(n-x-y+1)

檢驗兩種方法的公式所算出的總方格數是否相同,以 n>8 為例:

1. 一般函數法：

例 1: f(9,(4,4),(4,5))=f(9,(4,5)) – 4x4+ $\sum_{k=1}^{3}k$ =205-16+6=195

例 2: f(11,(3,5),(4,5))=f(11,(4,5))- $\sum_{k=1}^{3}k$ =386-6=380

2. 遞迴函數法：

例 1: f(9,(4,4),(4,5))

=f(9,(3,4),(4,4))-4(9-4-4+1)
=f(9,(3,3),(3,4))-4(9-3-4+1)-8
=f(9,(2,3),(3,3))-3(9-3-3+1)-12-8
=f(9,(2,2),(2,3))-3(9-2-3-1)-12-12-8
=f(9,(1,2),(2,2))-2(9-2-2+1)-15-12-12-8
=f(9,(1,1),(1,2))-2(9-1-2+1)-12-15-12-12-8
=[(285-9)-1(9-1)]-14-12-15-12-12-8= 195

例 2: f(11,(3,5),(4,5))

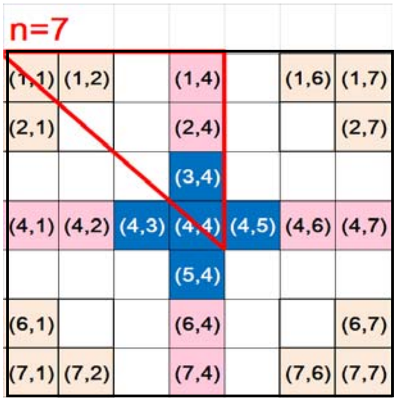
=f(11,(3,4),(3,5))-5(11-3-5+1)
=f(11,(2,4),(3,4))-3(11-3-4+1)-20
=f(11,(2,3),(2,4))-4(11-2-4+1)-15-20
=f(11,(1,3),(2,3))-2(11-2-3-1)-24-15-20
=f(11,(1,2),(1,3))-3(11-1-3+1)-14-24-15-20
=[(506-11)-2(11-2]-24-14-24-15-20 =380

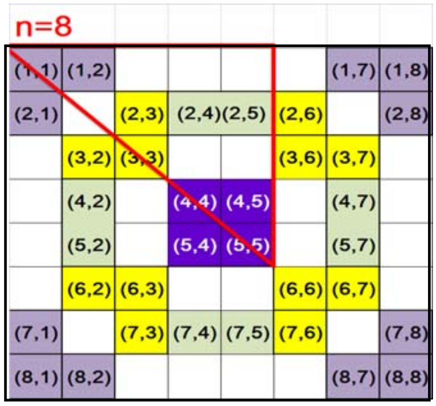
我發現以兩種公式所算出的總方格數是相同的。

(六) <u>求 f(n,(x,y),(x,y+1)) 、f(n,(x,y),(x+1,y)) 所有位置座標的轉換規則</u>

在探討取二個方格的方法時，我主要是以紅色三角形區塊內之位置方格為研究對象，但是如果任取不在此三角形內的方格時，其與三角形內的方格之間應該要有一個互相對應的關係。以 n=7 和 n=8 為例

由下圖可知，以下這些座標可互相對應





n=7

[(1,1),(1,2)]=[(1,1),(2,1)]=[(1,6),(1,7)]=[(6,1),(7,1)]
=[(1,7),(2,7)]=[(7,1),(7,2)]=[(6,7),(7,7)]=[(7,6),(7,7)]
[(1,4),(2,4)]=[(4,1),(4,2)]=[(4,6),(4,7)]=[(6,4),(7,4)]
[(3,4),(4,4)]=[(4,3),(4,4)]=[(4,4),(4,5)]=[(4,4),(5,4)]

n=8

[(1,1),(1,2)]=[(1,1),(2,1)]=[(1,7),(1,8)]=[(7,1),(8,1)]
=[(1,8),(2,8)]=[(8,1),(8,2)]=[(7,8),(8,8)]=[(8,7),(8,8)]
[(2,3),(3,3)]=[(3,2),(3,3)]=[(2,6),(3,6)]=[(6,2),(6,3)]
=[(3,6),(3,7)]=[(6,3),(7,3)]=[(6,6),(6,7)]=[(6,6),(7,6)]
[(2,4),(2,5)]=[(4,2),(5,2)]=[(4,7),(5,7)]=[(7,4),(7,5)]
[(4,4),(4,5)]=[(4,4),(5,4)]=[(4,5),(5,5)]=[(5,4),(5,5)]

1. 將橫向連二方格 f(n,(x,y),(x,y+1)) 或 縱向連二方格 f(n,(x,y),(x+1,y))
   1≦x≦n 1≦y≦n 轉換為紅色三角形區塊內之對稱位置

2. 如何轉換二個座標(x,y) to (x',y') 使得 $x' \le y' < \frac{n+3}{2}$

3. 【轉換規則】

轉換步驟:
f(n,(x,y),(x,y+1)) or f(n,(x,y)(x+1,y)) 設k=n+1
(t1) if x>y→ 交換 (x,y) to (y,x)
(t2) if x>$\frac{n}{2}$+1→ x'=k-x if y>$\frac{n}{2}$+1→y'=k-y
(t3) 交換 [(x,y+1)(x,y)] to [(x,y)(x,y+1)] 或 [(x+1,y)(x,y)] to [(x,y)(x+1,y)]
優先權 t1 > t2 > t3

4. 優先權 **t1 > t2 > t3** 說明：

   以 f(7,(6,6),(6,7))為例,若無優先權之訂定，將會造成二種轉換的路徑，雖然轉換結果相同，但不符合函數 1-1 之性質，因此訂定優先權

   f(7,(6,6),(6,7))t2→(8-6,8-6),(8-6,8-7)=(2,2),(2,1)t3→(2,1),(2,2)t1→(1,2),(2,2)

   f(7,(6,6),(6,7))t2→(8-6,8-6),(8-6,8-7)=(2,2),(2,1)t1→(2,2),(1,2)t3→(1,2),(2,2)

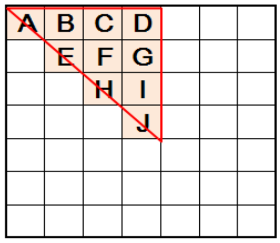
5. 利用此轉換規則，舉例如下：

   f(8,(6,3),(7,3))t1→(3,6),(3,7)t2→(3,9-6),(3,9-7)=(3,3),(3,2)t1→(3,3),(2,3)t3→(2,3),(3,3)

伍、 研究結果及結論

一、 在 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格的方法數。

因為在任取單一方格 n^2 個所有取法中，會有對稱的重覆問題，而我發現只要取圖中的紅色三角形區域中之方格，即可包含所有的取法。



(一) 邊長 n 為奇數時，其取法數公式為：

$$1+2+\dots\dots+\frac{n+1}{2}=\frac{(n+1)(n+3)}{8}$$

(二) 邊長 n 為偶數時，其取法數公式為：

$$1+2+\dots\dots+\frac{n}{2}=\frac{n(n+2)}{8}$$

二、 在 nxn 的正方形方塊中，任取一個方格後，所包含的總方格數之規律性及函數關係探討及所有位置座標的轉換規則。

(一) 首先我用<u>列舉</u>及<u>刪除</u>兩種方法計算出在 3x3~8x8 的方塊中，任取一個置方格(x,y)後，其所包含總方格數，並驗證其值是相同的 (以 7x7 和 8x8 為例)。

7x7

133	128	125	124
	118	112	110
		103	100
			96

8x8

196	190	186	184
	178	170	166
		158	152
			144

(二) 接著我試著將上表各組數字進行分析，尋找數字間是否存在某種規律性及函數，我試著以遞迴及一般的二種規律，求得總方格數 f(n , (x,y))之函數。

1. <u>一般函數法</u>：主要是找尋最終單一的函數式

利用刪除法，分析總扣除數 D(n ,(x, y)) 之值，再以 C(n) - D(n ,(x, y))來計算 f(n,(x,y)) 之值，並和之前用刪除及列舉法所計算出的正確數值，進行交叉比對，其結果完全相同。

一般函數 $n\in N$ 且 $x\le y\le \frac{n+1}{2}$
$$f(n,(x,y))=C(n)-D(n,(x,y))$$ $$D(n,(x,y))=2\sum_{k=1}^{x}k^2+2\sum_{k=x+1}^{y}xk+(n-2y)xy$$

2. <u>遞迴函數法</u>：主要在找尋二位置方格之間的函數關係

在 nxn 的方塊中，取出位置方格(x,y)後，其所包含的總方格數。經過分析後發現總方格數字中存在二種等差的關係。

(1) 第一列橫向之等差關係(x=1)，我可以利用 f(n,(1,y)) =[C(n)-n]-(n-y)(y-1) 的函數式，計算出第一列中的每一個值。

(2) 第二列之後的斜向等差關係(x>1)，我可以利用 f(n,(x-1,y-1))來做基礎，減去其間的差值 dv，即可計算出 f(n,(x,y))之值。

綜合(1)(2)之分析結果，列出下表之遞迴函數，完整計算出在 3x3~8x8 方塊中，任取一個位置方格(x,y)後，其所包含總方格之數值，並和之前用刪除及列舉法所計算出的正確數值，進行交叉比對，其結果完全相同。

遞迴函數　n∈N 且 $x \le y \le \frac{n+1}{2}$
if x=1 , f(n,(1,y))=(C(n)-n)-dv **dv=(n-y)(y-1)**
if x>1 , f(n,(x,y))=f(n,(x-1,y-1))-dv **dv=(n-x-y+2)(x+y-1)**

(三) <u>f(n, (x,y)) 所有位置的座標之轉換規則</u>

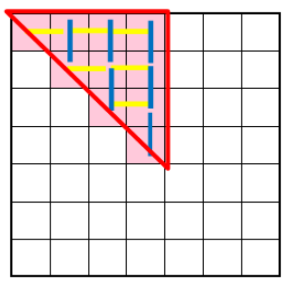
在探討任取一個方格的方法時，主要是以紅色三角形區塊內之位置方格為研究對象，如果任取不在此三角形內的其它方格時，其與紅色三角形區塊內的方格之間，必須訂立了一個互相對應的轉換關係。

轉換步驟:
f(n,(x,y)) 設k=n+1 (t1) if x> y → 交換 (x,y) to (y,x) (t2) if x> $\frac{k}{2}$ → x'=k-x　if y> $\frac{k}{2}$ → y'=k-y

利用此轉換規則，計算 f(11,(7,8))時，先經由 **t2**(12-7,12-5)轉換成 f(11,(5,4))，再經由 **t1** 轉換成 f(11,(4,5))。∴ f(11,(7,8))= f(11,(4,5))

三、 在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格的方法數。

同樣地，我發現只要取圖中的紅色三角形區域中之方格，即可包含所有的取法



(一)　邊長為奇數時，其取法數公式為：

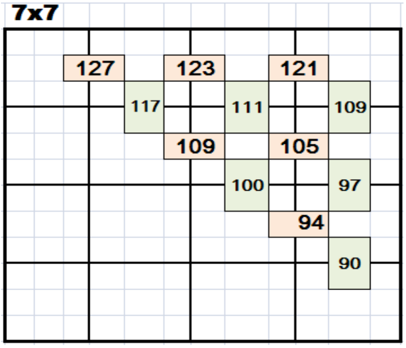
$$2(1+2+\dots\dots+\frac{n-1}{2})=\frac{n^2-1}{4}$$

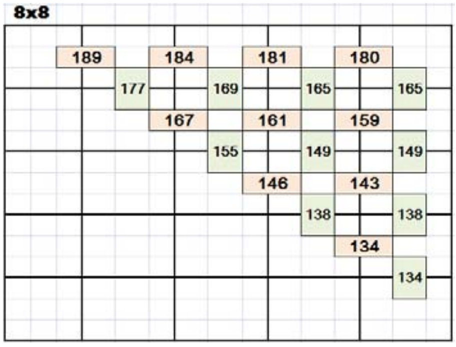
(二)　邊長為偶數時，其取法數公式為：

$$2(1+2+\dots\dots+\frac{n}{2})=\frac{n^2+2n}{4}$$

四、 在 nxn 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格後，所包含的總方格數之規律性及函數關係探討及所有位置座標的轉換規則。

(一) 同樣的我先用列舉及刪除兩種方法，完整計算出在 nxn 方塊中，任取相鄰二個位置方格 <u>橫向[(x,y), (x,y+1)]</u> 或 <u>縱向[(x,y),(x+1,y)]</u> 後，其所包含總方格數，並驗證其值是相同的。(以 7x7 和 8x8 為例)





(二) 接著我試著將上表中各組數字進行分析，尋找其數字間是否和取單一方格時，同樣存在相似的規律性及函數式，我仍以遞迴及一般的二種規律性，探討 **<u>f (n , (x,y) ,(x,y+1))</u>** 和 **<u>f (n , (x,y) ,(x+1,y))</u>** 之函數式。

1. **一般函數法**：主要是找尋最終單一的函數式

我嘗試利用研究過程二，以一般函數法求任取單一位置方格的總方格數之函數式當基礎，延伸至求任取相鄰兩位置方格總方格數之函數式。我以相鄰位置方格之**(第二格座標)**為比較點，找尋其間之差值 **DV**，經研究後發現 DV 值和 n 值無關，且和 x, y 之關係式為:

橫向 **DV**= xy $-\sum_{k=1}^{x-1} k$ 縱向 **DV**= xy $-\sum_{k=1}^{x} k$ ，函數式結果整理如下表：

橫向	$f(n,(x,y),(x,y+1)) = f(n,(x,y+1)) - xy + \sum_{k=1}^{x-1} k$
縱向	$f(n,(x,y),(x+1,y)) = f(n,(x+1,y)) - \sum_{k=1}^{x} k$

2. **遞迴函數法**：主要在找尋二位置方格之間的函數關係

經研究後發現總方格數字中，的確存在同取單一方格相似的等差關係，研究過程中，我將各組數據分類為第一列橫向之等差關係以及第二列之後的斜向等差關係，而斜向關係又分為橫向及縱向二種。結果如下：

第一列	x=1 , f(n,(1,y),(1,y+1))=(C(n)-n)-dv	dv=y(n-y)
橫向	x>1 , f(n,(x,y),(x,y+1))=f(n,(x-1,y),(x,y))-dv	dv=x(n-x-y+1)
縱向	x>1 , f(n,(x,y),(x+1,y))=f(n,(x,y-1),(x,y))-dv	dv=y(n-x-y+1)

3. 遞迴函數式在取單一和連二方格之相似性比較**(紅色部分為相異處)**

	任取單一方格之遞迴函數式	任取連二方格之遞迴函數式
x=1	f(n,(1,y))=(C(n)-n)-(y-1)(n-y)	f(n,(1,y),(1,y+1))=(C(n)-n)-y(n-y)
x>1	f(n,(x,y))= f(n,(x-1,y-1))-(n-x-y+2)(x+y-1)	橫向 f(n,(x,y),(x,y+1))= f(n,(x-1,y),(x,y))-(n-x-y+1)x 縱向 f(n,(x,y),(x+1,y))= f(n,(x,y-1),(x,y))-(n-x-y+1)y

4. 接著我利用遞迴及一般的二種函數，完整計算總方格之數值，並和之前用刪除及列舉法所計算出的正確數值，進行交叉比對，其結果完全相同。

(三) <u>求 f(n,(x,y),(x,y+1)) 、f(n,(x,y),(x+1,y)) 所有位置坐標之轉換規則</u>

在探討取二個方格的方法時，主要是以紅色三角形區塊內之位置方格為研究對象，如果任取不在此三角形內的其它方格時，其與紅色三角形區塊內的方格之間，必須訂立了一個互相對應的轉換關係。

轉換步驟:

f(n,(x,y),(x,y+1)) or f(n,(x,y)(x+1,y)) 設k=n+1

(t1) if x>y → 交換 (x,y) to (y,x)

(t2) if $x>\frac{n}{2}+1$ → x'=k-x if $y>\frac{n}{2}+1$ → y'=k-y

(t3) 交換 [(x,y+1)(x,y)] to [(x,y)(x,y+1)] 或 [(x+1,y)(x,y)] to [(x,y)(x+1,y)]

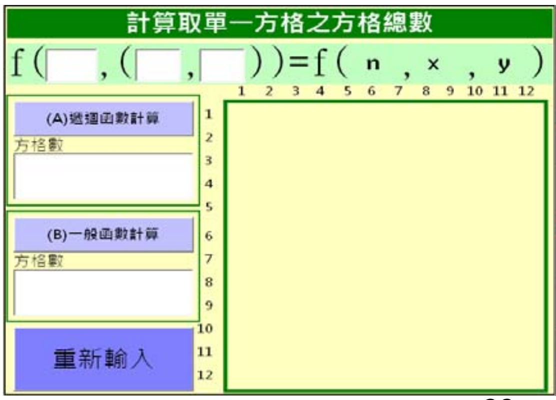
優先權 t1 > t2 > t3

五、 兩種方法的優缺點比較：

	遞迴函數法	一般函數法
優點	● 可以利用相鄰項之間的關係，求得第 n 項**[(x,y) ,(x,y+1)] [(x,y) ,(x+1,y)]** 之值 ● 可以觀察出在 nxn 的方格區內，n 和總方格數之間存在等差的關係	● 可直接將數字帶進公式中，一個步驟就能算出
缺點	● 一般項 f(n,(x,y))不能直接求得，計算較大 n 值的方格數時,計算較費時，需迴返步驟 x+1 次，不適合由計算機直接求值，較適合編寫電腦程式利用迴圈的方式計算	● 無法觀察出在 nxn 的方格區內，n 和總方格數之間存在等差的關係

六、 **檢驗函數式之正確性:**

為了證明在較大 n 值時，二種函數式所計算出的結果為一致的，我藉由 Visual Basic 程式，將函數式輸入程式內，由電腦執行大量計算，因而設計下列二種程式介面。

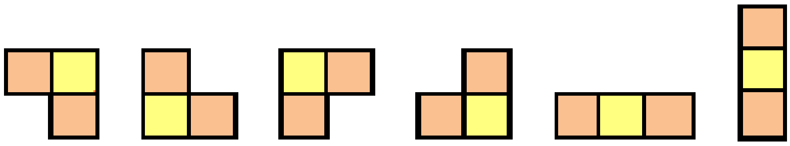


我選擇了 11 個較大 n 值進行計算，發現數據是相同的，如下表所示

任取單一方格		遞迴函數式計算結果	一般函數式計算結果
座標未轉換前	座標轉換後		
f(150,(45,9))	f(150,(45,52))	934975	934975
f(250,(150,234))	f(250,(17,101))	4983707	4983707
f(350,(150,300))	f(350,(51,150))	12859525	12859525
f(500,(300,399))	f(500,(102,201))	35994852	35994852
f(700,(599,399))	f(700,(102,302))	102641356	102641356
f(900,(699,780))	f(900,(121,202))	226910672	226910672
任取連二方格		遞迴函數式計算結果	一般函數式計算結果
座標未轉換前	座標轉換後		
f(100,(56,57),(56,58))	f(100,(43,45),(44,45))	254904	254904
f(250,(159,160),(160,160))	f(250,(91,91),(91,92))	4155451	4155451
f(350,(150,300),(151,300))	f(350,(51,150),(51,151))	12850600	12850600
f(500,(300,399),(301,399))	f(500,(102,200),(102,201))	35979603	35979603
f(700,(429,388),(430,388))	f(700,(271,313),(272,313))	88216618	88216618

陸、　未來發展

一、 由於篇幅和時間的限制，目前研究完成了任取一個及兩個相鄰方格的總方格數之規律及函數式，本希望能將研究延伸至任取三格以上相鄰方格的探討，但是光是三連方格的變化圖形，就有六種(如下圖所示)，導致取法數很多，而且會有很多旋轉後重複的問題，十分複雜，深具挑戰性，所以希望可以做為未來研究的後續目標。



二、 我亦思考另一個問題，對於在 n x n 的正方形方塊中，任取相鄰二個方格之條件是否可以延伸至任取不相鄰的二個方格 **[(x_1,y_1)(x_2,y_2)]**，並探討其和任取兩次單一方格函數式之關聯性為何?

三、 此外在研究完成 **n x n** 正方形方塊中任取一格及二格相鄰位置方格後的總方格數之函數式後，也想將研究延伸至 **m x n** 的長方形方塊，是否可視此長方形方塊為一種 (缺列) 的 **n x n** 正方形方塊，並探索其和 **n x n** 方塊之差異性，希望也可做為未來研究的另一個目標。

柒、　參考資料

一、 王思文編著 (民 92)。數列與級數。台北市：健興文化事業有限公司。

二、 顏啟麟編輯 (民 97)。JHMC 數國中數學競賽歷屆試題暨詳解。台北市：九章。

三、 蔡正發著(民 89)。Visual Basic 6.0 視窗軟體程式設計。台灣：松崗圖書。

【評語】030404

本作品充分利用函數關係，包括直接建構與遞迴關係來計算有缺塊的正方形方格中所具有的總方格數，推理井然有序，內容正確而且有創意，因此強力推薦此作品為第一名。