

土 木 科

科別：土木科

組別：高職組

作品名稱：橋樑的最佳斷面選擇—紙橋

關鍵詞：慣性矩、截面積、彎矩力

編號：091204

學校名稱：

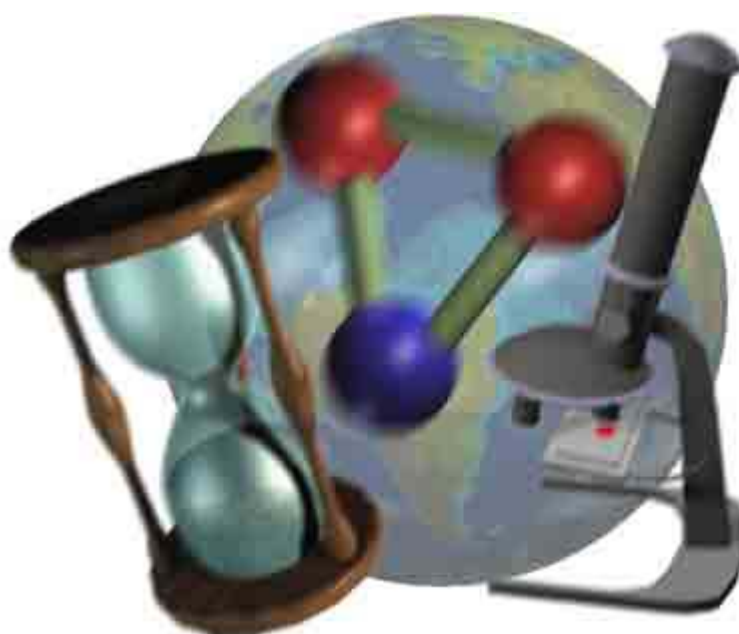
國立彰化師範大學附屬高級工業職業學校

作者姓名：

藍立琳、陳憶菁

指導老師：

張盛進



摘要

本研究主要是利用白膠與西卡紙製作成紙橋，乾燥後以一個人的體重對紙橋作初步測試，紙橋毫髮無傷。最後將三種不同斷面形式的紙橋模型，利用萬能試驗機測得紙橋的最大承載力。

將試驗所得到的數值帶入所推導的力學公式中，求得紙橋三種不同斷面形式的關係。因為桁架的原理，讓紙橋能承受較大的載重，但在我們進一步的推導公式中發現，相同截面積所得到的壓應力應該相等，可是我們實驗所得到的結果並不相等；於是我們又進一步的探討，發現原來是我們所製作的模型並不是單純的桁架構件，所以會產生彎矩力以抵抗載重，此彎矩力相當於偏心載重所產生的彎矩，於是我們將所得數值加以比較，發現當偏心距愈大，所承受的最大承載力也就愈小。不同的斷面形式有不同之極慣性矩，極慣性矩愈大所能承載之彎矩愈大，最大承載力亦愈大。

壹、研究動機

在某次的新聞中得知，由一張薄弱的紙所搭建而成的紙橋，竟能承受幾百公斤的力量。而紙橋製作的方式大致相同，都以圓形為構件，並製作成三角形體。在上力學課時學到有關截面積、慣性矩、壓應力、桁架等知識，知道相同面積所承受之載重是相同的，但不同斷面所提供之極慣性矩不同，可承受之彎矩作用亦不同，如果將圓形構件換成其他形狀，如正方形、三角形等，其承載力是否會改變？改變多少？我們將試著做比較，找出它們的關係。

貳、研究目的

以相同截面積之圓形、正方形、三角形之構件所搭製成的紙橋，在桁架原理中，其破壞時之壓應力應相同，若所構成之三角形體亦相同，則應可承受相同之載重，但因三角形體並非屬於桁架形式，於接點上是鋼接點，會產生彎矩力，因此構件除了承受壓力之外，亦承受彎矩作用。本試驗將利用模型試驗所得之數值，帶入各種形狀所推算之結論中，比較其產生的偏心距(e)之間的差異。

參、研究設備及器材

材料：西卡紙（A₀） 白膠。

設備：美工刀、尺、線鋸機、萬能試驗機(100 噸)。

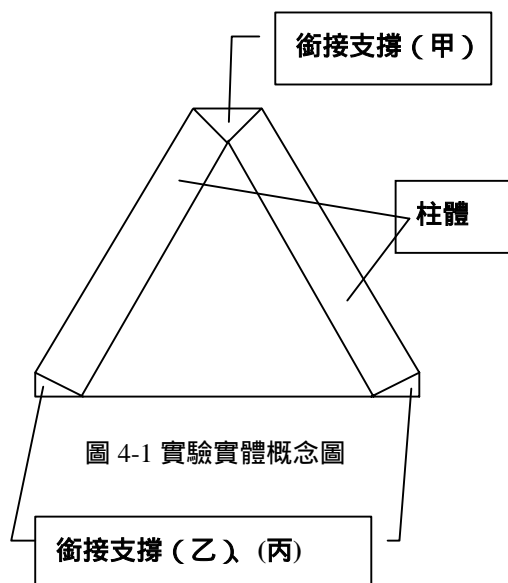
肆、研究過程及方法

桁架的基本構成中，有許多種圖形，三角形是最簡單的形體；所以我們決定以正三角形為構件，做出其下一連串的研究。

我們的研究過程中，目的為找出各種斷面形狀的偏心距(e 值)，並加以比較出何以在控制變因相同下，卻擁有不同的壓應力。

一、構件的共同控制變因：

- (一) 紙的材料-----西卡紙
- (二) 柱體的截面積-----2.07cm²
- (三) 試驗儀器-----100 噸萬能試驗機
- (四) 基本構件-----如右圖



二、符號說明：

圓形(c)			正方形(s)			三角形(t)		
外緣直徑	D_c	cm	外緣直徑	D_s	cm	外緣直徑	D_t	cm
內緣直徑	d_c	cm	內緣直徑	d_s	cm	內緣直徑	d_t	cm
截面積	A_c	cm^2	截面積	A_s	cm^2	截面積	A_t	cm^2
慣性矩	I_c	cm^4	慣性矩	I_s	cm^4	慣性矩	I_t	cm^4
形心至最外緣的距離	y_c	cm	形心至最外緣的距離	y_s	cm	形心至最外緣的距離	y_t	cm
壓應力	σ_{c1}	kg/cm^2	壓應力	σ_{s1}	kg/cm^2	壓應力	σ_{t1}	kg/cm^2
張應力	σ_{c2}	kg/cm^2	張應力	σ_{s2}	kg/cm^2	張應力	σ_{t2}	kg/cm^2
合應力	σ_c	kg/cm^2	合應力	σ_s	kg/cm^2	合應力	σ_t	kg/cm^2
載重壓力	P_c	kg	載重壓力	P_s	kg	載重壓力	P_t	kg
偏心載重	e_c		偏心載重	e_s		偏心載重	e_t	
彎矩力	M_c	kg-cm	彎矩力	M_s	kg-cm	彎矩力	M_t	kg-cm
未知數	X_c		未知數	X_s		未知數	X_t	
未知數	Z_c		未知數	Z_s		未知數	Z_t	
						外緣高	H_t	cm
						內緣高	h_t	cm

表 4-1

三、基本假設：

- (一) 各構件之截面積相同， $A_c = A_s = A_t$ 。
- (二) 各構件所能承受之極限載重相同， $\sigma_c = \sigma_s = \sigma_t$ 。

四、數值推導：

- (一) 圓形斷面(c)：

1. 截面積

$$A_c = \frac{\pi}{4} (D_c^2 - d_c^2) \quad \text{-----1-1}$$

2. 慣性矩

$$I_c = \frac{\pi}{64} (D_c^4 - d_c^4) \quad \text{-----1-2}$$

3. 形心至最外緣的距離

$$y_c = \frac{D_c}{2} \quad \text{-----1-3}$$

4. 壓應力

$$\sigma_{c1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_c}{A_c} \text{ -----1-4}$$

5. 張應力

$$\sigma_{c2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_c \times e_c \times y_c}{I_c \times 4} \text{ -----1-5}$$

6. 合應力

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_{c2} + \sigma_{c1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_c \times e_c \times y_c}{I_c \times 4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_c}{A_c} \\ &= |X_c e_c + Z_c| \text{ -----1-6} \end{aligned}$$

7. 彎矩力

$$M_c = \frac{\sqrt{3}}{4} P_c \times e_c \text{ -----1-7}$$

(二) 正方形斷面(s)：

1. 外緣直徑

$$D_s^2 = \frac{\pi D_c^2}{4} \text{ -----2-1}$$

2. 內緣直徑

$$A_s = D_s^2 - d_s^2 \text{ -----2-2}$$

3. 慣性矩

$$I_s = \frac{D_s^4}{12} - \frac{d_s^4}{12} \text{ -----2-3}$$

4. 形心至最外緣的距離

$$y_s = \frac{D_s}{2} \text{ -----2-4}$$

5. 壓應力

$$\sigma_{s1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_s}{A_s} \text{ -----2-5}$$

6. 張應力

$$\sigma_{s2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_s \times e_s \times y_s}{I_s \times 4} \text{-----2-6}$$

7. 合應力

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \sigma_{s2} + \sigma_{s1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_s \times e_s \times y_s}{I_s \times 4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_s}{A_s} \\ &= |X_s e_s + Z_s| \text{-----2-7} \end{aligned}$$

8. 彎矩力

$$M_s = \frac{\sqrt{3}}{4} P_s \times e_s \text{-----2-8}$$

(三) 三角形斷面(t)：

1. 外緣直徑

$$\frac{\sqrt{3}}{4} D_t^2 = \frac{\pi D_c^2}{4} \text{-----3-1}$$

2. 內緣直徑

$$A_t = \frac{\sqrt{3}}{4} D_t^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} d_t^2 \text{-----3-2}$$

3. 外緣高

$$H_t = \frac{\sqrt{3}}{2} D_t \text{-----3-3}$$

4. 內緣高

$$h_t = \frac{\sqrt{3}}{2} d_t \text{-----3-4}$$

5. 慣性矩

$$I_t = \left(\frac{D_t \times H_t^3}{36} - \frac{d_t \times h_t^3}{36} \right) + A_t \times \left(\frac{1}{6} H \right)^2 \text{-----3-5}$$

6. 形心至最外緣的距離

$$y_t = \frac{D}{3} \text{-----3-6}$$

7. 壓應力

$$\sigma_{t1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_t}{A_t} \text{-----3-7}$$

8. 張應力

$$\sigma_{t2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_t \times e_t \times y_t}{I_t \times 4} \quad \text{-----3-8}$$

9. 合應力

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_{t2} + \sigma_{t1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_t \times e_t \times y_t}{I_t \times 4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_t}{A_t} \\ &= |X_t e_t + Z_t| \quad \text{-----3-9} \end{aligned}$$

10. 彎矩力

$$M_t = \frac{\sqrt{3}}{4} P_t \times e_t \quad \text{-----3-10}$$

五、概念構想

把紙捲成圓形(以 c 為代號)、方形(以 s 為代號)、三角形(以 t 為代號)三種不同形狀，將其柱體組成三角形之邊長，三角形之底邊以紙片固定，並在總體三角形的三個頂點各做出一個三角形，作為柱體之間的銜接支撐點(以甲、乙、丙為代號)。

六、紙橋的設計

而設計方式，則選擇其最佳承受壓應力的三角形，經由運算結果發現由 60 度的正三角形最適合。

七、紙橋的製作過程及方法

(一) 將兩張 A₀ 的西卡紙裁成數張紙條。

10 _{CM} ×1189 _{CM}					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

(1)~(5)...831_{CM}×21.2_{CM}

(6)...剩餘的紙條

表 5-1

10 _{CM} ×1189 _{CM}			
(1)	(2)	(3)	(4)

(1)~(3)...831_{CM}×21.2_{CM}

(4)...剩餘的紙條

表 5-2

(二) 將八張 $831\text{CM}\times 21.2\text{CM}$ 的紙條分別捲成 c、s、t 三種空心柱體。

$21.2\text{CM}\times 6\text{CM}$

表 5-3

圓形空心柱製作示意圖



圖 5-1 圓形空心柱製作過程

(三) 將一張 $10\text{cm}\times 1189\text{cm}$ 的紙條裁成一半, 作成兩個空心直角三角形, 為銜接支撐(乙、丙)。

$10\text{CM}\times 1.47\text{CM}$
$10\text{CM}\times 1.7\text{CM}$
$10\text{CM}\times 0.85\text{CM}$

表 5-4



圖 5-2 直角三角形製作過程

(四) 將一張 $10\text{CM} \times 1189\text{CM}$ 的紙條，作成一個空心等腰三角形，銜接支點(甲)。

$10\text{CM} \times 2\text{CM}$
$10\text{CM} \times 2\text{CM}$
$10\text{CM} \times 3.7\text{CM}$

表 5-5



圖 5-3 三角形製作過程

(五) 切割各種柱體，使其長度相等為 20CM 。



圖 5-4 切割過程

(六) 紙橋搭接：

1. 將柱體以四個為一組，組成為長方體(圓形柱、方形柱)和平行四邊形(三角形)體作為其左右兩側邊。



圖 5-5 組立過程

2. 將兩個銜接於左右的三角柱體和利用剩餘紙條所裁成的四張紙條相黏。



圖 5-6 補強作業

3. 用剩餘的小紙條，纏繞於其較脆弱的的銜接處，使其較為堅固。

4. 製作完成。



圖 5-7 完成品（三角形）



圖 5-8 完成品（圓形&方形）

（七）試驗過程

1. 人為試驗，測驗其強度。



圖 5-9 人為試驗過程

2. 由萬能試驗機壓試，直到紙橋受到極限壓力為止，取其數值比較。



圖 5-10 萬能試驗機試驗過程（圓形）

3. 紙橋破壞後的狀態。



圖 5-11 萬能試驗機試驗後破壞狀況（方形）



圖 5-12 萬能試驗機試驗後破壞狀況（圓形）



圖 5-13 萬能試驗機試驗後破壞狀況（三角形）

伍、研究結果

試驗結果：

經由萬能試驗機試驗後得到值： $P_c = 1515\text{kg}$ ； $P_s = 1400\text{kg}$ ； $P_t = 1125\text{kg}$

在試驗過程中，量測出圓形斷面之內圓直徑及外圓直徑 $D_c = 2.5\text{cm}$ ， $d_c = 1.9\text{cm}$

一、圓形斷面(c)：

（一）截面積

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{\pi}{4}(D_c^2 - d_c^2) \\ &= \frac{\pi}{4}(2.5^2 - 1.9^2) \\ &= 2.07\text{ cm}^2 \quad \text{-----代入 1-1} \end{aligned}$$

（二）慣性矩

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{\pi}{64}(D_c^4 - d_c^4) \\ &= \frac{\pi}{64}(2.5^4 - 1.9^4) \\ &= 1.28\text{ cm}^4 \quad \text{-----代入 1-2} \end{aligned}$$

（三）形心至最外緣的距離

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{D_c}{2} \\ &= \frac{2.5}{2} \\ &= 1.25\text{ cm} \quad \text{-----代入 1-3} \end{aligned}$$

(四) 壓應力

$$\begin{aligned}\sigma_{c1} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_c}{A_c} \\ &= \frac{656.01}{2.07} \\ &= 316.91 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 1-4}\end{aligned}$$

(五) 張應力

$$\begin{aligned}\sigma_{c2} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_c \times e_c \times y_c}{I_c \times 4} \\ &= \frac{656.01 \times e_c \times 1.25}{1.28 \times 4} \\ &= 160.16 e_c \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 1-5}\end{aligned}$$

(六) 合應力

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \sigma_{c2} + \sigma_{c1} \\ &= |160.16 e_c + 316.91| \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 1-6}\end{aligned}$$

以圖形的面積作為基礎求出正方形及三角形的數值

二、正方形斷面(s)：

(一) 外緣直徑

$$\begin{aligned}D_s^2 &= \frac{\pi D_c^2}{4} \\ &= \frac{\pi 2.5^2}{4} \\ &= 4.91 \text{ cm} \quad \text{-----代入 2-1} \\ D_s &= 2.22 \text{ cm}\end{aligned}$$

(二) 內緣直徑

$$\begin{aligned}A_s &= D_s^2 - d_s^2 \\ 2.07 &= 4.91 - d_s^2 \\ d_s^2 &= 2.84 \text{ cm} \quad \text{-----代入 2-2} \\ d_s &= 1.69 \text{ cm}\end{aligned}$$

(三) 慣性矩

$$I_s = \frac{D_s^4}{12} - \frac{d_s^4}{12}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2.22^4}{12} - \frac{1.69^4}{12} \\
&= 1.34 \text{ cm}^4 \quad \text{-----代入 2-3}
\end{aligned}$$

(四) 形心至最外緣的距離

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{D_s}{2} \\
&= \frac{2.22}{2} \\
&= 1.11 \text{ cm} \quad \text{-----代入 2-4}
\end{aligned}$$

(五) 壓應力

$$\begin{aligned}
\sigma_{s1} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_s}{A_c} \\
&= \frac{606.21}{2.07} \\
&= 292.86 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 2-5}
\end{aligned}$$

(六) 張應力

$$\begin{aligned}
\sigma_{s1} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_s \times e_s \times y_s}{I_s \times 4} \\
&= \frac{606.21 \times e_s \times 1.11}{1.34 \times 4} \\
&= 125.54 e_s \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 2-6}
\end{aligned}$$

(七) 合應力

$$\begin{aligned}
\sigma_{s2} &= \sigma_{s2} + \sigma_{s1} \\
&= |125.54 e_s + 292.86| \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 2-7}
\end{aligned}$$

三、三角形斷面(t)：

(一) 外緣直徑

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{4} D_t^2 &= \frac{\pi D_c^2}{4} \\
\frac{\sqrt{3}}{4} D_t^2 &= 4.91 \\
D_t^2 &= 11.34 \text{ cm} \quad \text{-----代入 3-1} \\
D_t &= 3.37 \text{ cm}
\end{aligned}$$

(二) 內緣直徑

$$A_t = \frac{\sqrt{3}}{4} D_t^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} d_t^2$$

$$2.07 = \frac{\sqrt{3}}{4} 3.37^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} d_t^2$$

$$d_t^2 = 6.58 \text{ cm} \quad \text{-----代入 3-2}$$

$$d_t = 2.57 \text{ cm}$$

(三) 外緣高

$$H_t = \frac{\sqrt{3}}{2} D_t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3.37$$

$$= 2.92 \text{ cm} \quad \text{-----代入 3-3}$$

(四) 內緣高

$$h_t = \frac{\sqrt{3}}{2} d_t$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2.57$$

$$= 2.23 \text{ cm} \quad \text{-----代入 3-4}$$

(五) 慣性矩

$$I_t = \left(\frac{D_t \times H_t^3}{36} - \frac{d_t \times h_t^3}{36} \right) + A_t \times \left(\frac{1}{6} H \right)^2$$

$$= \left(\frac{3.37 \times 2.92^3}{36} - \frac{2.57 \times 2.23^3}{36} \right) + 2.07 \times 0.24$$

$$= 2.03 \text{ cm}^4 \quad \text{-----代入 3-5}$$

(六) 形心至最外緣的距離

$$y_t = \frac{D_t}{3}$$

$$= \frac{3.37}{3}$$

$$= 1.12 \text{ cm} \quad \text{-----代入 3-6}$$

(七) 壓應力

$$\sigma_{tl} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_t}{A_t}$$

$$= \frac{487.13}{2.07}$$

$$= 235.33 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 3-7}$$

(八) 張應力

$$\begin{aligned}\sigma_{t2} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} P_t \times e_t \times y_t}{I_t \times 4} \\ &= \frac{1125 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times e_t \times 1.12}{2.03 \times 4} \\ &= 67.19 e_t \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 3-8}\end{aligned}$$

(九) 合應力

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \sigma_{t2} + \sigma_{t1} \\ &= |67.19 e_t + 235.33| \text{ kg/cm}^2 \quad \text{-----代入 3-9}\end{aligned}$$

四、比較：

(一) 偏心距

$$\begin{aligned}\sigma_c = \sigma_s = \sigma_t &\Rightarrow |X_c e_c + Z_c| = |X_s e_s + Z_s| = |X_t e_t + Z_t| \\ \Rightarrow |160.16 e_c + 316.91| &= |125.54 e_s + 292.86| = |67.19 e_t + 235.33|\end{aligned}$$

$$e_c = 0.15 ; e_s = 0.38 ; e_t = 1.57$$

(二) 彎矩力

$$\begin{aligned}M_c &= \frac{\sqrt{3}}{4} P_c \times e_c \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1515 \times 0.15 \\ &= 98.40 \text{ kg-cm} \quad \text{-----代入 1-7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_s &= \frac{\sqrt{3}}{4} P_s \times e_s \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1400 \times 0.38 \\ &= 230.36 \text{ kg-cm} \quad \text{-----代入 2-8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_t &= \frac{\sqrt{3}}{4} P_t \times e_t \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1125 \times 1.57 \\ &= 764.81 \text{ kg-cm} \quad \text{-----代入 3-10}\end{aligned}$$

$$M_c : M_s : M_t = 1 : 2.34 : 7.77$$

(三) 極限壓力

$$P_c = 1515\text{kg} ; P_s = 1400\text{kg} ; P_t = 1125\text{kg}$$

$$P_c : P_s : P_t = 1 : 0.92 : 0.74$$

陸、討 論

- 一、將紙橋的例子應用到現實生活上，需要注意所使用的材料及其施工方法，不同的材料及施工方法將會影響製作出來的強度。
- 二、由於紙橋只是一個簡單的試驗品，所以在製作時所用白膠的多寡及搭接時粘著的位置，都有可能影響到紙橋的強度，但其影響並不大。
- 三、若是將桿件利用整片的紙片包裹，而不是只用幾段紙條包住，其強度可能會更大。
- 四、如果將三角形的排列方式改變，使其不成平行四邊形，而是為平行排列，其所受的強度結果可能會不同。
- 五、如果施加壓力的點不是在正上方，而是由桿件兩邊施加，試驗體將會很容易被破壞。

發現

- 一、經由試驗結果，發現先前的假設--各構件所能承受之極限載重相同， $\sigma_c = \sigma_s = \sigma_t$ -----不成立。
- 二、從這些試驗及計算中可以得知，若截斷面積所產生的彎矩力愈大，就如產生較大之偏心距(e)一樣，使得構件所能承受之載重愈小。

柒、結 論

- 一、經由載重試驗得知圓形、正方形及三角形所能承受之荷重比例如下：
圓形：正方形：三角形 = 1 : 0.92 : 0.74
若以圓形為基準，正方形所能承受的極限壓力是圓形的 92 %，而三角形能承受的極限壓力是圓形的 74 %。
- 二、經由計算結果，圓形、正方形及三角形所產生之彎矩比例如下：
圓形：正方形：三角形 = 1 : 2.34 : 14.65
若以圓形為基準，正方形所產生的彎矩力是圓形的 2.34 倍，三角形所產生的彎矩力是圓形的 14.65 倍。
- 三、在課本中所學到，以相同的材料所製作出的桁架構件，理論上所能承受的極限載重應相同，但其試驗結果卻不同，原因乃是因為不同斷面形狀所產生之彎矩不同所致。

	圓形	正方形	三角形
承受荷重比	1	0.92	0.74
偏心距比	1	2.53	10.47
彎矩比例	1	2.34	7.77

捌、參考資料及其他

- 一、工程力學 & /彭添富/2001 年 5 月。
- 二、工程力學 & /陳宏州/2002 年 7 月初版。
- 三、工程力學 & /谷重光/2002 年 8 月

評語

1. 實驗與理論的相符性有待加強。
2. 斷面影響結構力的研究可提昇學生學習興趣，可經由實作訓練，培養團隊精神。
3. 理論計算之單一斷面與實體合成之斷面其受力行為之差異，宜進一步測試。