魔術方塊解法的數學理論

國中組數學科第一名

台中縣立大雅國民中學　　作　　者：王俊欽、社培基
等四人
指導敎師：王子宏

一、研究動機

民國七十年初，一股智慧性的旋風席捲歐美，進入台灣，這就是"魔術方塊"，它是由廿六個小立方塊很巧妙的砌合在一起，使我們能夠把其中任一層沿著適當的方向自由轉動。它有六種顏色，當我們隨意轉動幾次之後就很難將它轉回原來每面同色的型態。

當時我們年紀還小，轉了很久的一段日子，也只能轉出一面同色而已，無法再突破。那時電視上更舉辦魔術方塊的復原比賽。有人居然能在極短的二分鐘內迅速的完成六面同色，眞令人羡慕！如今它無聲無息了，正像一股旋風，過後煙消雲散，但它卻深印在我們心中。

暑假時，幸運地參加學校的數學研習營，它又活生生的出現在我們眼前，三天的研習活動，使我們對它有更深一層的認識。尤其是研習營結束前老師的幾句話，更激發我們更上一層樓的決心。老師說：數學是一種很有用的工具，很多事物都能以數學模式來解釋，甚至於能由數學應用演變成日常生活的應用。魔術方塊的解法原理，或許也能用數學模式去探討，希望同學們能利用漫長的暑假，多讀些書，去思考如何建立起魔術方塊的數學模式，經過半年時間的砌磋研究，我們得到一些心得，現在我們把它報告如下：

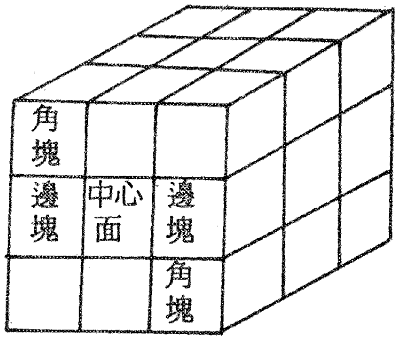
二、方塊簡介

構成魔術方塊的可見面有26 個立方體，分成三類：

㈠中心面：共6個，代表6種顏色面。

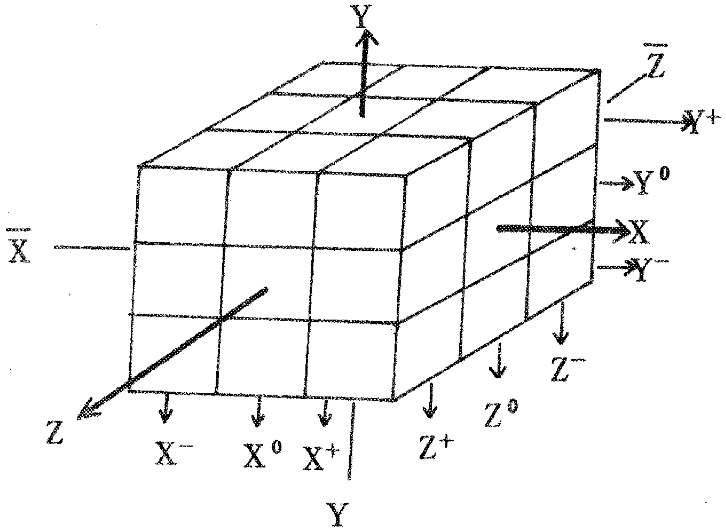
㈡邊塊：共12 個，每邊中間的小立方體，每個邊塊具有兩種顏色。

㈢角塊：共８個，每個頂尖位置的小立方體，每個角塊具有三種顏色。

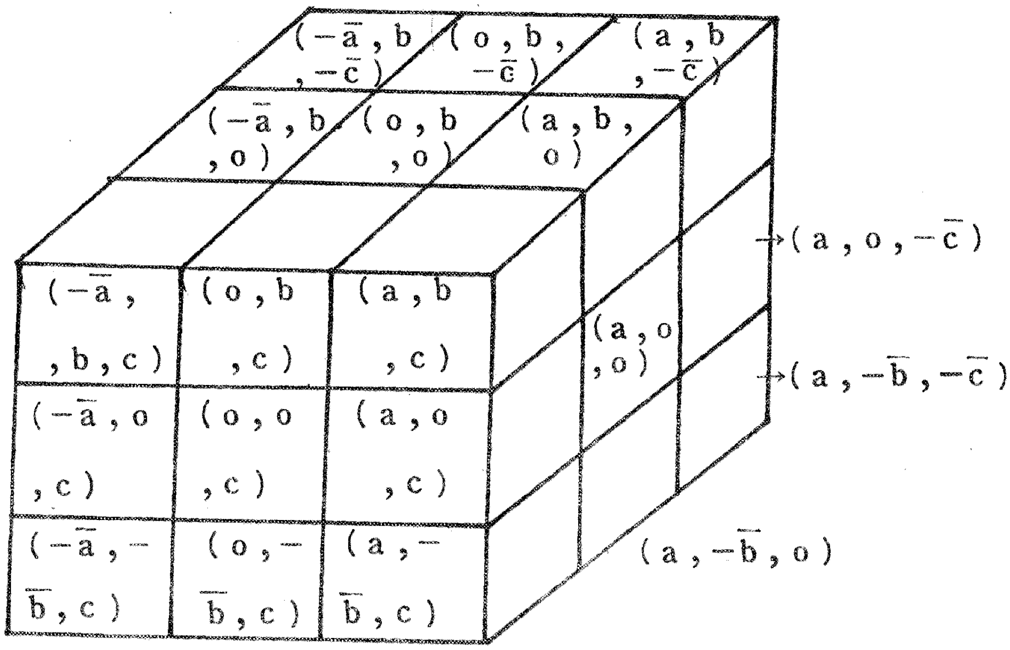


三、坐標結構

（定義１）把魔術方塊看成 $X-Y-Z$ 三個互相垂直軸，再規定如下：（圖一）



（定義２）把魔術方塊六面顏色以 a、$\bar{a}$、b、$\bar{b}$、c、$\bar{c}$ 代表，則 26 個小立方塊的坐標結構如圖二所示。



四、旋轉定義

（定義3）以X為主軸，而由Y面向下轉至Z面的 90° 旋轉以代號 i^{+x}_{yz} 表示則（如圖三）。

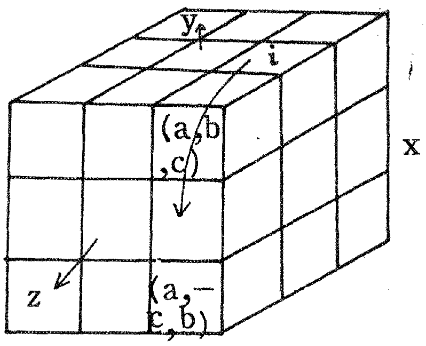
㈠ i^{+x}_{yz}（a，b，c）＝（a，$-c$，b），即X坐標不變，Y與Z坐標互換，Y坐標變號。

㈡ i^{+x}_{yz}（$-a$，b，c）＝（$-a$，b，c），因為旋轉的是X的正層，所以負層的方塊不變。

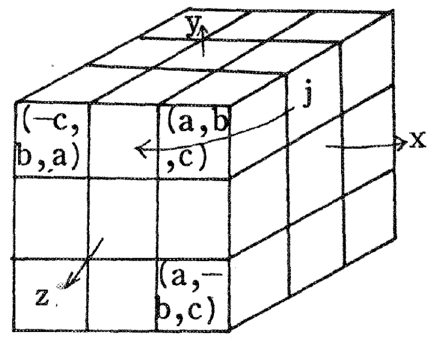
（定義4）以Y軸為主軸，旋轉上層由X面向左轉至Z面的 90° 旋轉以符號 j^{+y}_{xz} 表示之則（如圖四）。

㈠ j^{+y}_{xz}（a，b，c）＝（$-c$，b，a）即Y坐標不變，X與Z互換，X坐標變號。

㈡ j^{+y}_{xz}（a，$-\overline{b}$，c）＝（a，$-\overline{b}$，c）即因為旋轉Y的正層，故負層方塊不變。

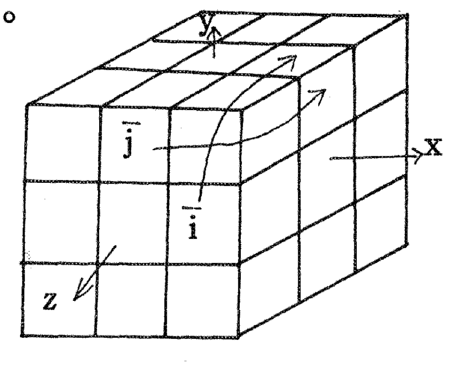


圖三



圖四

（定義5）為了較易觀察與分辨，我們定義 i^{+x}_{yz} 的逆轉 i^{+x}_{zy} 為 i ，而 j^{+y}_{xz} 的逆轉 j^{+y}_{zx} 為 $\overline{j}$ ，即① $\overline{i}^{+x} = i^{+x}_{zy}$ ；② $\overline{j}^{+y} = j^{+y}_{zy}$（如圖五）。

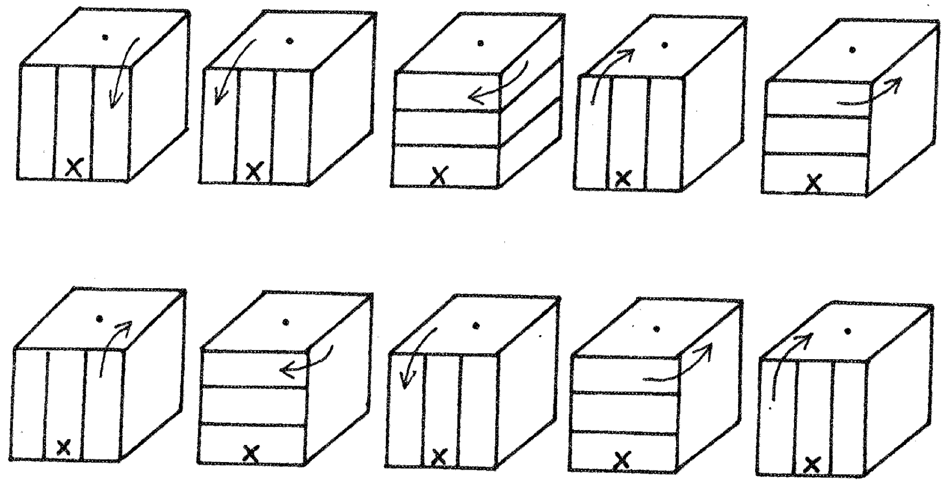


圖五

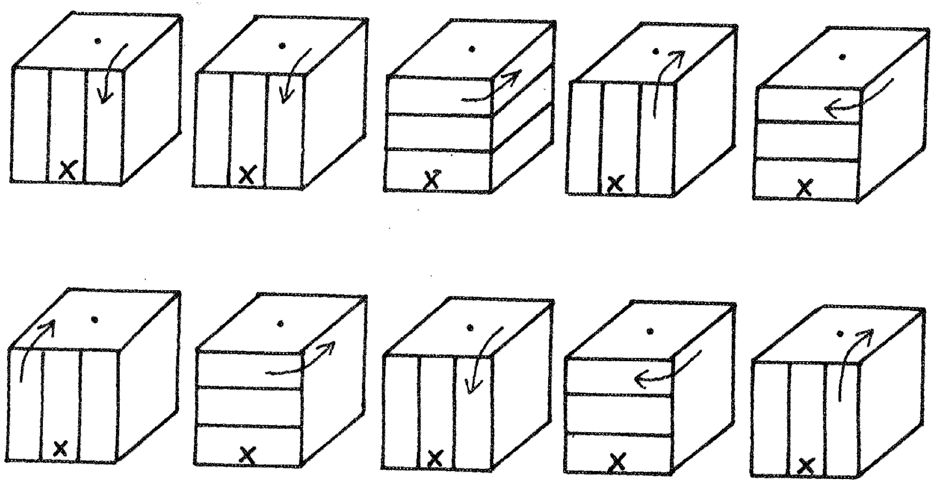
五、組合運算

㈠由於一次的旋轉，移動太多方塊，爲了避免這種情形，由十個旋轉定義組合成下列四種組合運算。

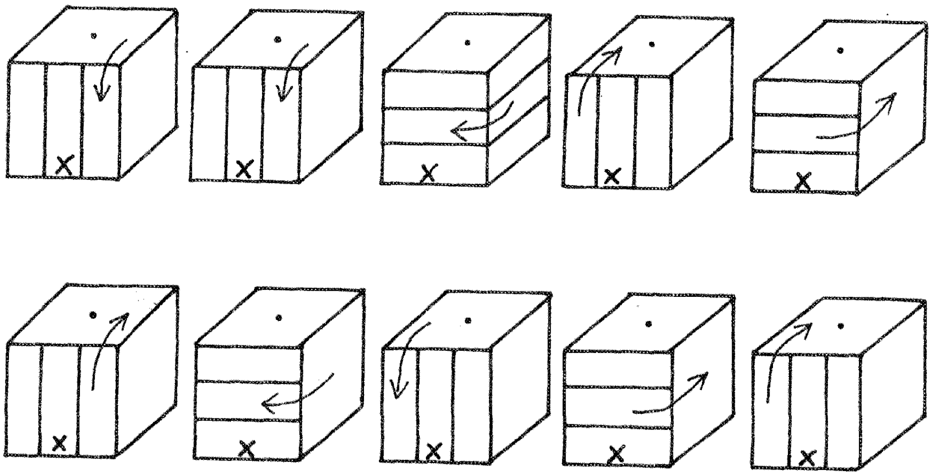
$A = i^{+x}_{yz} \to i^{-x}_{yz} \to j^{+y}_{zx} \to i^{-x}_{zy} \to j^{+y}_{zx} \to i^{+x}_{zy} \to j^{+y}_{xz} \to i^{-x}_{yz} \to j^{+y}_{zx}$
$\to i^{-x}_{zy}$



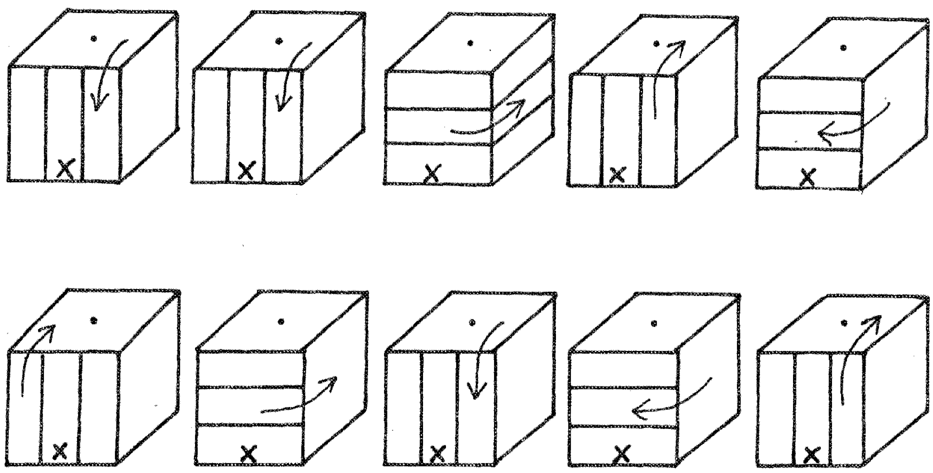
$\breve{A} = i^{+x}_{yz} \to i^{-x}_{yz} \to j^{+y}_{zx} \to i^{+x}_{zy} \to j^{+y}_{xz} \to i^{-x}_{zy} \to j^{+y}_{zx} \to i^{+x}_{yz} \to j^{+y}_{xz}$
$\to i^{+x}_{zy}$



$B = i^{+x}_{yz} \to i^{-x}_{yz} \to j^{0x}_{yz} \to i^{-x}_{zy} \to j^{0y}_{zx} \to i^{+x}_{zy} \to j^{0y}_{xz} \to i^{-x}_{yz} \to j^{0y}_{zx}$
$\to i^{-x}_{zy}$



$$\overline{B}= i^{+x}_{yz} \rightarrow i^{-x}_{yz} \rightarrow j^{0y}_{zx} \rightarrow i^{+x}_{zy} \rightarrow j^{0y}_{xz} \rightarrow i^{-x}_{zy} \rightarrow j^{0y}_{zx} \rightarrow i^{+x}_{yz} \rightarrow j^{0y}_{xz}$$
$$\rightarrow i^{+x}_{zy}$$



(二)可以把A、$\overline{A}$、B、$\overline{B}$寫成十個旋轉定義的“合成”：

$$A= i^{-x}_{zy} \cdot j^{+y}_{zx} \cdot i^{-x}_{yz} \cdot j^{+y}_{xz} \cdot i^{+x}_{zy} \cdot j^{+y}_{zx} \cdot i^{-x}_{zy} \cdot j^{+y}_{xz} \cdot i^{-x}_{yz}$$
$$\cdot\ i^{+x}_{yz}$$
$$= \overline{i}^{-x} \cdot \overline{j}^{+y} \cdot i^{-x} \cdot j^{+y} \cdot \overline{i}^{+x} \cdot \overline{j}^{+y} \cdot \overline{i}^{-x} \cdot j^{+y} \cdot i^{-x}$$
$$\cdot\ i^{+x}$$

$$\overline{A}= i^{+x}_{zy} \cdot j^{+y}_{xz} \cdot i^{+x}_{yz} \cdot j^{+y}_{zx} \cdot i^{-x}_{zy} \cdot j^{+y}_{xz} \cdot i^{+x}_{zy} \cdot j^{+y}_{zx} \cdot i^{-x}_{yz}$$
$$\cdot\ i^{+x}_{yz}$$
$$= \overline{i}^{+x} \cdot j^{+y} \cdot i^{+x} \cdot \overline{j}^{+y} \cdot \overline{i}^{-x} \cdot j^{+y} \cdot \overline{i}^{+x} \cdot \overline{j}^{+y} \cdot i^{-x}$$
$$\cdot\ i^{+x}$$

$$B= i^{-x}_{zy} \cdot j^{0y}_{zx} \cdot i^{-x}_{yz} \cdot j^{0y}_{xz} \cdot i^{+x}_{zy} \cdot j^{0y}_{zx} \cdot i^{-x}_{zy} \cdot j^{0y}_{xz} \cdot i^{-x}_{yz} \cdot i^{+x}_{yz}$$

$$= \overline{i}^{-x} \cdot \overline{j}^{0y} \cdot i^{-x} \cdot j^{0y} \cdot \overline{i}^{+x} \cdot \overline{j}^{0y} \cdot i^{-x} \cdot j^{0y} \cdot i^{-x} \cdot i^{+x}$$

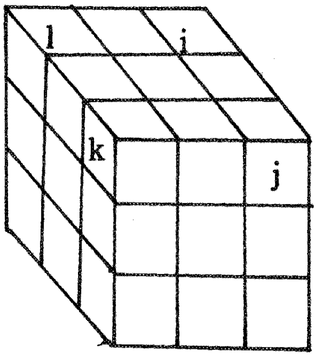
$$\overline{B} = i^{+x}_{zy} \cdot j^{0y}_{xz} \cdot i^{+x}_{yz} \cdot j^{0y}_{zx} \cdot i^{-x}_{zy} \cdot j^{0y}_{xz} \cdot i^{+x}_{zy} \cdot j^{0y}_{zx} \cdot i^{-x}_{yz}$$

$$\cdot\ i^{+x}_{yz}$$

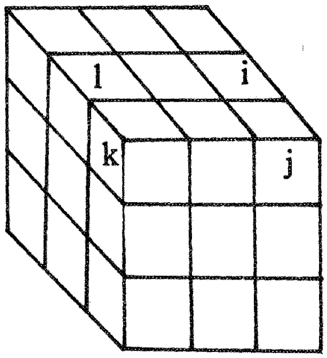
$$= \overline{i}^{+x} \cdot j^{0y} \cdot i^{+x} \cdot \overline{j}^{0y} \cdot \overline{i}^{-x} \cdot j^{0y} \cdot \overline{i}^{+x} \cdot \overline{j}^{0y} \cdot i^{-x}$$

$$\cdot\ i^{+x}$$

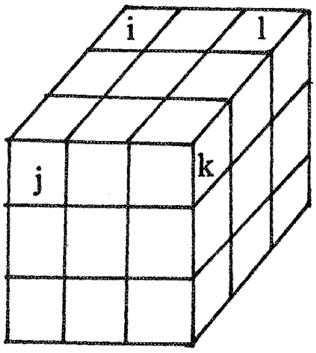
這四個組合運算的作用如下圖所示（圖六）（圖七）（圖八）（圖九）。



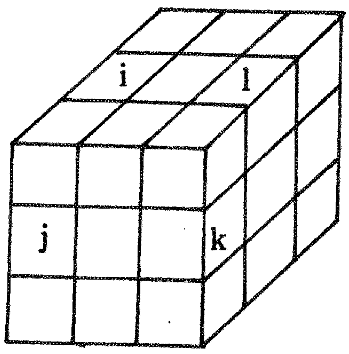
A（圖六）



B（圖七）



A（圖八）



B（圖九）

因爲上式的組合運算太長了，運算很痲煩且實際操作上，我們知道每一種組合運算都只調動三個小方塊，其餘均不受影響，因此我們得到四個組合運算定理。

〔組合定理〕

$A = \left[\begin{array}{cc} \ell & i \\ k & j \end{array} \right]$ 其中 i j 是旋轉定義，$k = \overline{i} \cdot \overline{j}$，$\ell$ 是不動。

$B=\begin{bmatrix} \ell & i \\ k & j \end{bmatrix}$ 同上。

$\bar{A}=\begin{bmatrix} i & \ell \\ \bar{j} & k \end{bmatrix}$ $k=\bar{i}\cdot j$，ℓ是不動，$\bar{j}$是逆旋轉定義。

$\bar{B}=\begin{bmatrix} i & \ell \\ \bar{j} & k \end{bmatrix}$ 同上。

例：
$$A\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, -\bar{c}) & (a, b, -\bar{c}) \\ (-\bar{a}, b, c) & (a, b, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \ell\cdot(-\bar{a}, b, -\bar{c}) & i\cdot(a, b, -\bar{c}) \\ k\cdot(-\bar{a}, b, c) & j\cdot(a, b, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, -\bar{c}) & (c, \bar{a}, b) \\ (c, b, a) & (a, \bar{c}, b) \end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, 0) & (a, b, 0) \\ (-\bar{a}, 0, c) & (a, 0, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \ell\cdot(-\bar{a}, b, 0) & i\cdot(a, b, 0) \\ k\cdot(-\bar{a}, 0, c) & j\cdot(a, 0, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, 0) & (c, \bar{a}, 0) \\ (-c, 0, a) & (a, 0, b) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, -\bar{c}) & (a, b, -\bar{c}) \\ (-\bar{a}, b, c) & (a, b, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} i\cdot(-\bar{a}, b, -\bar{c}) & \ell\cdot(a, b, -\bar{c}) \\ j\cdot(-\bar{a}, b, c) & k\cdot(a, b, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-c, a, -b) & (a, b, -\bar{c}) \\ (-\bar{a}, \bar{c}, b) & (c, b, \bar{a}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, 0) & (a, b, 0) \\ (-\bar{a}, 0, c) & (a, 0, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} i\cdot(-\bar{a}, b, 0) & \ell\cdot(a, b, 0) \\ j\cdot(-\bar{a}, 0, c) & k\cdot(a, 0, c) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-c\,,a\,,0)(a\,,b\,,0)\\(-\overline{a}\,,0\,,b)(c\,,0\,,\overline{a})\end{bmatrix}$$

有了這四個組合定理，我們就可以進行完成六面同色。

六、實際操作

步驟：㈠底層排列；㈡上層四角定位；㈢上層邊塊完成；㈣中層邊塊完成。

㈠底層排列：先把底面完成同色且底層的邊塊各方向之顏色均與中心面同色。

原則：連續應用 i 與 j 旋轉幾次即可完成，若有不想被移動的小正方體，應先轉到平行的另一層。

㈡上層四角定位：**1.**先把上層 b 顏色完成。**2.**再處理周邊的顏色。

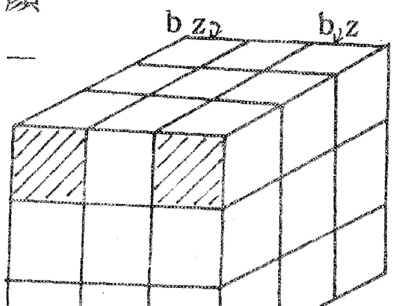
1.把上層 b 顏色完成：（因 b 色上調，不討論周邊色，故簡化如下。）

觀察 b 顏色所在的位置，會有下列四種情況：

(1) b 色均在周邊不在上層，此情況只有二種類型：

ㄅ. $\begin{bmatrix}b_z & b_z\\ b_z & b_z\end{bmatrix}$ 其解法爲 $\overline{A}\cdot A\cdot A$

會使 b 顏色在 Y 軸，b_z 代表 b 顏色在 Z 軸方向，運算過程中＋、－號省略。



$$\overline{A}\cdot A\cdot A\begin{bmatrix}b_z & b_z\\ b_z & b_z\end{bmatrix}$$

$$=\overline{A}\cdot A\begin{bmatrix}\ell\cdot b_z & i\cdot b_z\\ k\cdot b_z & j\cdot b_z\end{bmatrix}$$

$$=\overline{A}\cdot A\begin{bmatrix}b_z & b_x\\ b_x & b_y\end{bmatrix}=\overline{A}\begin{bmatrix}\ell\cdot b_x & i\cdot b_x\\ k\cdot b_z & j\cdot b_y\end{bmatrix}$$

$$=\overline{A}\begin{bmatrix}b_z & b_y\\ b_y & b_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\cdot b_z & \ell\cdot b_y\\ \overline{j}\cdot b_y & k\cdot b_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_y & b_y\\ b_y & b_y\end{bmatrix}$$

ㄆ. $\begin{bmatrix} b_x & b_z \\ b_x & b_z \end{bmatrix}$ 其解法爲 $A \cdot j \cdot A \cdot A$ 會使 b 顏色在 Y 軸（以下因限篇幅省略作用過程）。

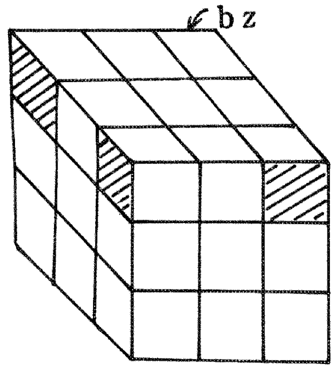
$$A \cdot j \cdot A \cdot A \begin{bmatrix} b_x & b_z \\ b_x & b_z \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot j \cdot A \begin{bmatrix} b_x & b_y \\ b_x & b_y \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot j \cdot \begin{bmatrix} b_x & b_y \\ b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$= A \begin{bmatrix} b_y & b_z \\ b_x & b_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$$



(2) b 色有一在上層，其餘在周邊，此情況亦有二類型：

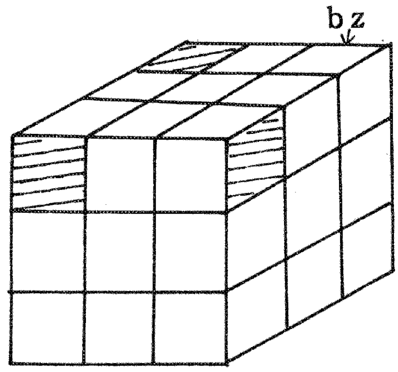
ㄅ. $\begin{bmatrix} b_y & b_z \\ b_z & b_x \end{bmatrix}$ 其解法爲 $\overline{A} \cdot \overline{j} \cdot A$ 會使 b 色在 Y 軸。

$$\overline{A} \cdot \overline{j} \cdot A \begin{bmatrix} b_y & b_z \\ b_z & b_x \end{bmatrix}$$

$$= \overline{A} \cdot \overline{j} \begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_z & b_y \end{bmatrix}$$

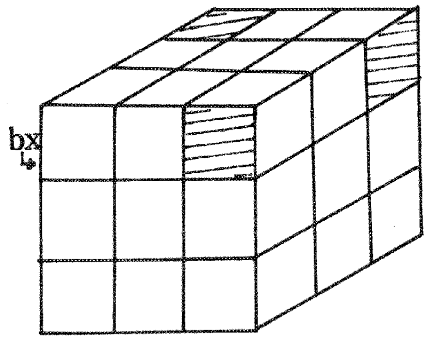
$$= \overline{A} \begin{bmatrix} b_z & b_y \\ b_y & b_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$$



ㄆ. $\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_x & b_z \end{bmatrix}$ 其解法爲 $A \cdot j \cdot \overline{A} \cdot j$ 會使 b 色在 Y 軸。

$$A \cdot j \cdot \overline{A} \cdot j \begin{bmatrix} b_y & b_z \\ b_x & b_z \end{bmatrix}$$



$$=A\cdot j\cdot\overline{A}\begin{bmatrix} b_z & b_y \\ b_x & b_z \end{bmatrix}=A\cdot j\begin{bmatrix} b_x & b_y \\ b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$=A\begin{bmatrix} b_y & b_z \\ b_x & b_y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$$

(3) b 色有 2 個在上層面，其餘在周邊，此情況有三類型。

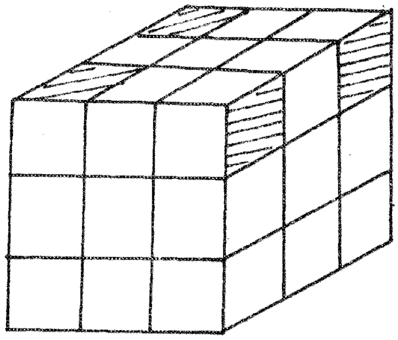
ㄅ. $\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_y & b_x \end{bmatrix}$ 其解法爲 $\overline{A}\cdot j\cdot\overline{A}$ 會使 b 色在 Y 軸。

$$\overline{A}\cdot\overline{j}\cdot\overline{A}\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_y & b_x \end{bmatrix}$$

$$=\overline{A}\cdot j\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_z & b_y \end{bmatrix}$$

$$=A\begin{bmatrix} b_z & b_x \\ b_y & b_x \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$$

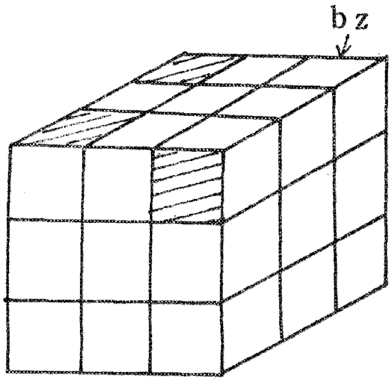


ㄆ. $\begin{bmatrix} b_y & b_z \\ b_y & b_z \end{bmatrix}$ 其解法爲 $A\cdot A$ 可使 b 色在 Y 軸。

$$A\cdot A\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$=A\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_x & b_y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$$

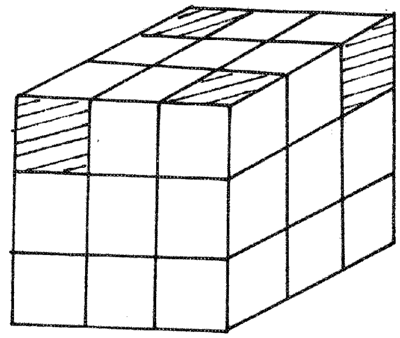


ㄇ. $\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_z & b_y \end{bmatrix}$ 其解法爲 $\overline{A}\cdot\overline{j}$ 可使 b 色在 Y 軸。

$$\overline{A}\cdot\overline{j}\begin{bmatrix} b_y & b_x \\ b_z & b_y \end{bmatrix}=\overline{A}\cdot\begin{bmatrix} b_z & b_y \\ b_y & b_x \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$$

(4) b 色四角均在上層即 $\begin{bmatrix} b_y & b_y \\ b_y & b_y \end{bmatrix}$



2. 處理周邊顏色：其歸納有下列三種情況

(1)周邊全部與中心面同色。例

$$\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, -\bar{c})(a, b, -\bar{c}) \\ (-\bar{a}, b, c)(a, b, c) \end{bmatrix}$$ 是四角定位完成。

(2)周邊有一邊同色：例如

$\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, -\bar{c})(c, b, -a) \\ (-a, b, \bar{c})(c, b, \bar{a}) \end{bmatrix}$中$\begin{bmatrix} (c, b, -a) \\ (c, b, \bar{a}) \end{bmatrix}c$

同色，則以同色邊向右，以 $\bar{j}\cdot\bar{A}\cdot j\cdot A\cdot A$完成之。

$$\bar{j}\cdot\bar{A}\cdot j\cdot A\cdot A\cdot\begin{bmatrix} (-\bar{a}, b, \bar{c})(c, b, -a) \\ (a, b, \bar{c})(c, b, \bar{a}) \end{bmatrix}$$

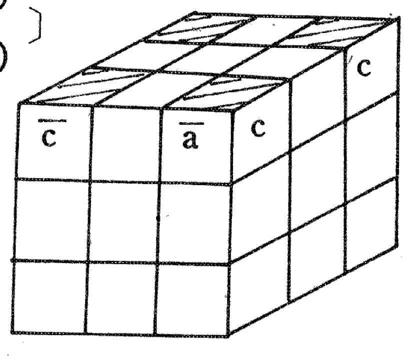
$$=\bar{j}\cdot\bar{A}\cdot j\cdot A\begin{bmatrix} (\bar{a}, b, \bar{c})(\bar{c}, a, b) \\ (\bar{a}, b, c)(c, a, b) \end{bmatrix}$$

$$=\bar{j}\cdot\bar{A}\cdot j\begin{bmatrix} (\bar{a}, b, \bar{c})(c, \bar{a}, b) \\ (b, a, c)(\bar{c}, b, a) \end{bmatrix}$$

$$=\bar{j}\cdot\bar{A}\begin{bmatrix} (c, a, b)(\bar{c}, b, \bar{a}) \\ (a, b, \bar{c})(b, \bar{a}, c) \end{bmatrix}$$

$$=\bar{j}\begin{bmatrix} (c, b, \bar{a})(\bar{c}, b, \bar{a}) \\ (c, b, a)(\bar{c}, b, a) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (\bar{a}, b, \bar{c})(a, b, \bar{c}) \\ (-\bar{a}, b, c)(a, b, c) \end{bmatrix}$$



（註：運算過程中，＋、—號省略）

(3)周邊皆不同色：例如

$\begin{bmatrix} (\bar{a}, b, \bar{c})(\bar{a}, b, c) \\ (a, b, \bar{c})(a, b, c) \end{bmatrix}$則以 $j\cdot\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot j\cdot j\cdot A$

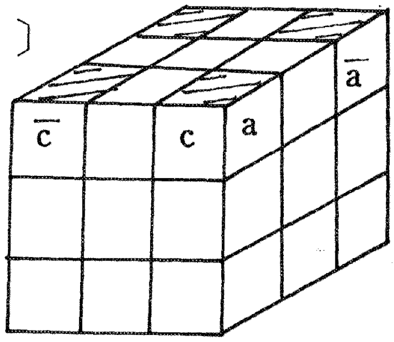
解決之。

$$j\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot j\cdot j\cdot A\left[\begin{matrix}(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ \overline{c})(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ c)\\(a\ ,\ b\ ,\ \overline{c})(a\ ,\ b\ ,\ c)\end{matrix}\right]$$

$$=j\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot j\cdot j\left[\begin{matrix}(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ \overline{c})(\overline{c}\ ,\ a\ ,\ b)\\(c\ ,\ b\ ,\ a)(\overline{a}\ ,\ c\ ,\ b)\end{matrix}\right]$$

$$=j\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\left[\begin{matrix}(\overline{a}\ ,\ c\ ,\ b)(c\ ,\ b\ ,\ a)\\(\overline{c}\ ,\ a\ ,\ b)(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ \overline{c})\end{matrix}\right]$$

$$=j\cdot\overline{A}\left[\begin{matrix}(\overline{c}\ ,\ \overline{a}\ ,\ b)(c\ ,\ b\ ,\ a)\\(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ c)(b\ ,\ a\ ,\ \overline{c})\end{matrix}\right]$$

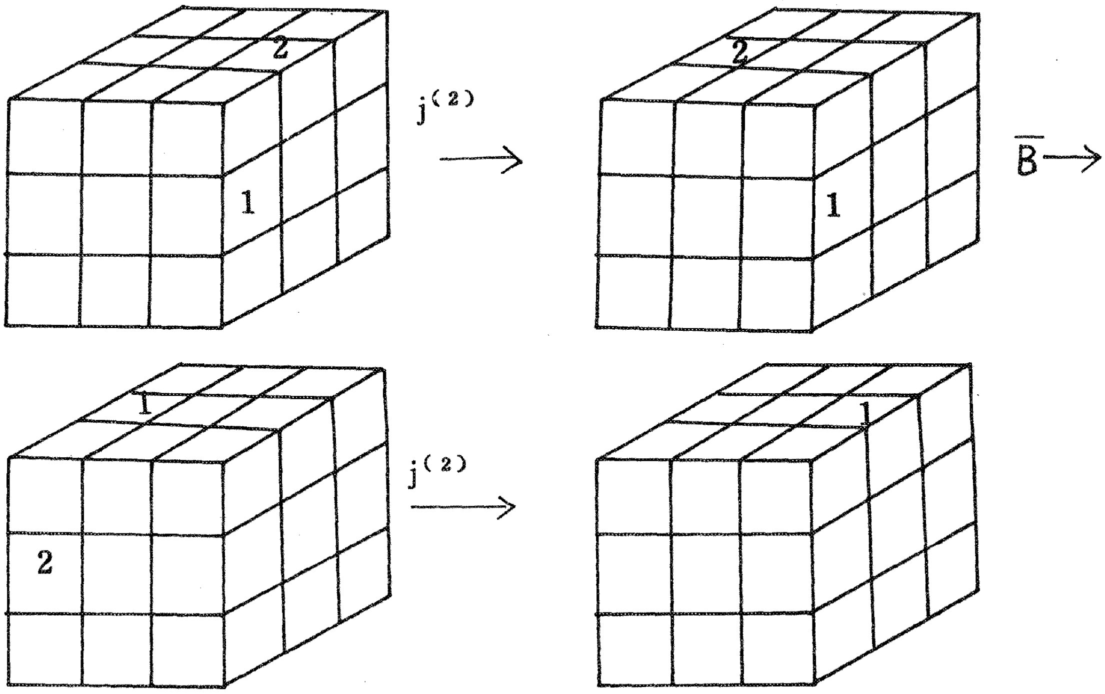


$$=j\left[\begin{matrix}(\overline{c}\ ,\ b\ ,\ a)(c\ ,\ b\ ,\ a)\\(\overline{c}\ ,\ b\ ,\ \overline{a})(c\ ,\ b\ ,\ \overline{a})\end{matrix}\right]$$

$$=\left[\begin{matrix}(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ \overline{c})(a\ ,\ b\ ,\ \overline{c})\\(\overline{a}\ ,\ b\ ,\ c)(a\ ,\ b\ ,\ c)\end{matrix}\right]$$

㈢上層邊塊完成：（註：只完成三個，保留一缺口，以調動中層邊塊）可分成兩種情形：1.中層邊塊直接調至上層。2.由上層邊塊調至中層再調至上層。

1.由中層邊塊直接調至上層：可利用 B 或 $\overline{B}$ 一次完成。（ $j^{(2)}$ 表 $j\cdot j$ ）



上圖顯示⑴調到⑵面的過程。

下列式中（ $\overline{a}$, b , c ）（ a , b , c ）是四角的坐標作爲參考坐標。

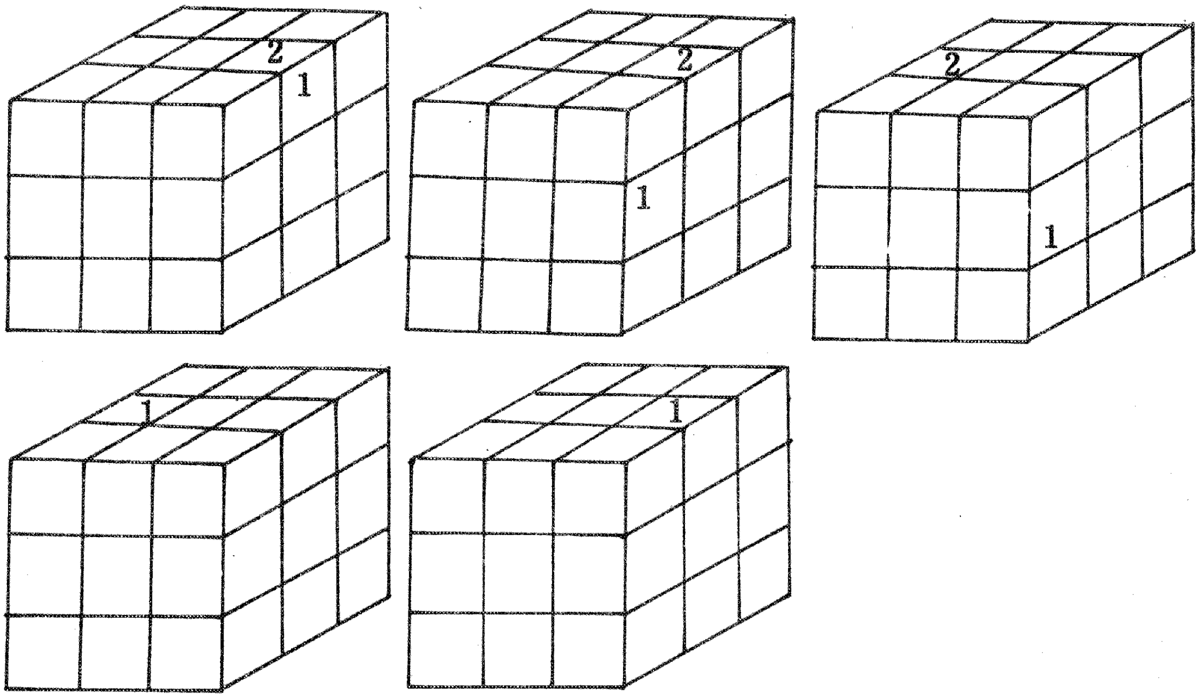
$$j^{(2)}\circ\overline{B}\cdot j^{(2)}\left[\begin{array}{l}(\overline{a},b,0)(\overline{a},c,0)\\(\overline{a},b;c)(a,b,c)\\(c,0,a)(b,0,a)\end{array}\right]$$

$$=j^{(2)}\circ\overline{B}\left[\begin{array}{l}(\overline{a},c,0)(\overline{a},b,0)\\(a,b,\overline{c})(\overline{a},b,\overline{c})\\(c,0,a)(b,0,a)\end{array}\right]$$

$$=j^{(2)}\left[\begin{array}{l}(a,b,0)(\overline{a},b,0)\\(a,b,\overline{c})(a,b,\overline{c})\\(\overline{a},0,c)(a,0,c)\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{l}(\overline{a},b,0)(a,b,0)\\(\overline{a},b,c)(a,b,c)\\(\overline{a},0,c)(a,0,c)\end{array}\right]$$

2. 由上層調至中層再調至上層：用 B 及 $\overline{B}$ 各一次完成。



上圖顯示(1)面調到(2)面的過程。

$$j^{(2)}\circ\overline{B}\cdot j^{(2)}\circ B\circ\left[\begin{array}{l}(\overline{a},b,0)(b,a,0)\\(\overline{a},b,c)(a,b,0)\\(\overline{c},0,a)(\overline{a},0,c)\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \qquad (\bar{a}, b, 0)(a, \bar{c}, 0) \\ = j^{(2)} \cdot \bar{B} \cdot j^{(2)} \left[(\bar{a}, b, c)(a, b, c) \right] \\ \qquad (c, 0, \bar{a})(b, 0, a) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (a, \bar{c}, 0)(\bar{a}, b, 0) \\ = j^{(2)} \cdot \bar{B} \cdot \left[(a, b, \bar{c})(\bar{a}, b, \bar{c}) \right] \\ \qquad (c, 0, a)(b, 0, a) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (a, b, 0)(\bar{a}, b, 0) \\ = j^{(2)} \left[(a, b, \bar{c})(a, b, c) \right] \\ \qquad (a, 0, \bar{c})(\bar{a}, 0, c) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (\bar{a}, b, 0)(a, b, 0) \\ = \left[(\bar{a}, b, c)(a, b, c) \right] \\ \qquad (a, 0, \bar{c})(\bar{a}, 0, c) \end{array}$$

(四)中層邊塊完成：以上層缺口將中層三邊塊定位後，可能剛好完成，也可能上中層各留一缺口。留下兩缺口的解法爲$B \cdot j^{(2)} \cdot \bar{B} \cdot j^{(2)}$。

$$\begin{array}{l} \qquad (\bar{a}, b, 0)(b, a, 0) \\ B \cdot j^{(2)} \cdot \bar{B} \cdot j^{(2)} \left[(\bar{a}, b, c)(a, b, c) \right] \\ \qquad (\bar{a}, 0, c)(c, 0, a) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (b, a, 0)(\bar{a}, b, 0) \\ = B \cdot j^{(2)} \cdot \bar{B} \left[(a, b, \bar{c})(\bar{a}, b, \bar{c}) \right] \\ \qquad (\bar{a}, 0, c)(c, 0, a) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (a, c, 0)(\bar{a}, b, 0) \\ = B \cdot j^{(2)} \left[(a, b, \bar{c})(\bar{a}, b, \bar{c}) \right] \\ \qquad (b, 0, a)(c, 0, \bar{a}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (\bar{a}, b, 0)(a, c, 0) \\ = B \cdot \left[(\bar{a}, b, c)(a, b, c) \right] \\ \qquad (a, 0, a)(c, 0, \bar{a}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad (\bar{a}, b, o)(a, b, o) \\ = \left[(\bar{a}, b, c)(a, b, c) \right] \\ \qquad (\bar{a}, o, c)(a, o, c) \end{array}$$

七、結　論

(一)我們採用的解法，只有結合 A、$\overline{A}$、B、$\overline{B}$ 相互運而而已，費時約五分鐘左右，當然還有別的方法，但不在我們研究範圍內。

(二)這次研究是利用數學模式來研究魔術方塊，我們爲了使魔術方塊的旋轉數學化，所以設立了一些符號來運算。

(三)我們本來以 x_{yz}^{+1} 定義 x^+ 爲主軸，由 y 向 z 旋轉， y_{xz}^{+1} 定義 y^+ 爲主軸，由 x 向 z 旋轉，但是不合實際運算需要，所以用 i_{yz}^{+x} 和 j_{xz}^{+y} 來表示原來的狀況。並適時加入 k 與 ℓ 的運算定義，以符合實際運算之需要。

(四)本來 i_{yz}^{+x} 的逆運算是 i_{zy}^{+x} ，但較難分辨，所以改用 $\overline{i}=i_{zy}^{+x}$ 。

(五)因爲 A‧$\overline{A}$ 運算上層只有三個角塊在變動，所以改用

$A=\begin{bmatrix} \ell & i \\ k & j \end{bmatrix}$，$\overline{A}=\begin{bmatrix} i & \ell \\ \overline{j} & k \end{bmatrix}$ 來表示運算上層的四個角塊。

(六)當我們拿到魔術方塊，而想把它“數學模式化”時，從無到有之間的歷程中，使我們深深的體會到，數學最大的奧妙是在建立實用且易於了解的符號，再操作這些抽象的符號去顯示實際的結果。

(七)經由這次“魔術方塊解法”的研究，我們經歷了“定義的設立”、“定理的組成”及“定理的運算過程”三個階段的數學模式，讓我們領略到“數學理論”嚴謹的一面。

評　語

(一)將魔術方塊的操作轉化成數學的運算，並以這些運算破解魔術方塊的問題。

(二)對於魔術方塊的問題作了完整的歸類，以提出破解每一類問題的運算公式。

(三)國中學生對於問題能有如此寬密之分析，實屬難能可貴。