

自製軟彈簧研究週期和質量之關係

高中教師組物理科第三名

台灣省立嘉義高級中學

作者：李文堂、潘憲國

一、研究動機

(一)物理學上探討簡諧運動時，最常見的問題是質量 m 的物體繫於一端固定的彈簧的另一端，物體受 $F = -kx$ 的恢復力作用時，簡諧運動週期是多少？高中學生第一個想到的答案是 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ⁽¹⁾

。大一所唸的Halliday著之Physics (1964年版)⁽²⁾ 316 頁第30題作業：“質量 m_s 的彈簧掛上質量 m 的物體時簡諧運動之

週期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ 試證之”。本題作業於1974年版

⁽³⁾已刪除，全國第廿二屆科展曾有證明本公式的作品參展⁽⁴⁾。

(二)作者於全國第十八屆科展參展作品中⁽⁵⁾一條用來測表面張力的自製彈簧，力常數相當小，水平放置時有13.5公分，鉛直吊起，由於本身重量作用，長度達32.45公分，用它測振動週期時，可振動100次仍未停止（阻尼Damping甚小），當不掛任何物體時，測得的週期不但

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 無法解釋，且和

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ 所求得的结果亦相去甚遠，引起作者進一步研究的興趣。

二、研究目的

實驗探討軟彈簧本身質量，懸掛物體質量對振動週期的影響；並

研究軟彈簧鉛直懸掛時作不均匀伸張是否遵守虎克定律；以及研究高中物理課本中所提的兩條力常數分別爲 k_1 ， k_2 的彈簧串聯後，力常數爲 k ，則 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 是否正確？

三、設備器材

(一)彈簧：將粗細分別爲 0.20 mm，0.23 mm，0.25 mm 的不銹鋼絲製成口徑爲 15 mm，13 mm，10 mm，8 mm，5 mm 之不同彈簧，其力常數甚小（和口徑大小、鋼絲粗細、匝數均有關）。
。100 匝的 0.20 mm，內徑 15 mm 的彈簧，水平橫放長度 10 公分，鉛直吊起長 34.70 公分，質量 1.29 克，掛 3.66 克的碼時，全長達 128.89 公分，力常數 $3,807 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ；同樣彈簧 500 匝，水平放置長 50 公分，鉛直吊起達長度 3 公尺餘，仍可恢復原狀。

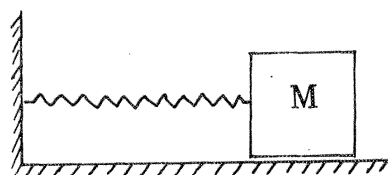
(二)測長度器材：平木板上黏平面鏡，鏡上黏透明米達尺，彈簧在鏡中成像，彈簧上端和尺的零刻度對齊，下端和鏡中像重疊地方尺的刻度爲彈簧的長度，利用此器材，量出物體的長度可準確至 mm，並做 mm 以下一位的估計。

(三)電子錶：量度時間準確至 $\frac{1}{100}$ 秒，若量 100 次振動時間，再求平均值，準確度更高，由於阻尼作用，有的彈簧只振動三十餘下即不明顯，則多次實驗，以求平均值。

(四)天平：可量至 $\frac{1}{100}$ 克。

四、文獻探討

(一)一般物理書上的問題：質量 m 的物體置於光滑水平桌面上，位移距平衡點 x 時，若不計彈簧質量，其簡諧運動週期如何



圖一

？最簡單的解法為利用能量守恒原理，其總能=物體動能+彈簧

$$\text{位能 } E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{m/k} \dots\dots\dots (1)$$

(二)彈簧且質量 (m_s)，運動時亦有動能，所以振動週期會比公式(1)大，研究動機中所提到 Halliday 的 Physics P.316 作業 30. 題的證明法有很多種，A.P. French 的 Vibrations and Waves⁽⁶⁾ 一書中利用積分證明較方便：

圖一中的彈簧原長 L ，距固定端 S ($0 \leq S \leq L$) 及 $s + ds$ 的一小段 ds ，其質量 $dM = \frac{m_s}{L} ds$ ，彈簧振動時 m 之動能為 $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ ，位能 $\frac{1}{2} kx^2$ ，而 dM 具有之動能為

$$dE_k = \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{L} ds \right) \left(\frac{S}{L} \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m_s}{2L^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 s^2 ds$$

在 m 具有位移 X 的瞬間， $\frac{dx}{dt}$ 為定值， \therefore 彈簧動能

$$E_k = \frac{m_s}{2L^3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \int_0^L S^2 ds = \frac{m_s}{6} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

整個系統之總能=物體動能+彈簧動能+彈簧位能

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{m_s}{6} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_s}{3} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{週期 } T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_s/3}{k}} \dots\dots\dots (2)$$

本式的導出，最重要的特點是假設彈簧受力伸張時，彈簧作均勻伸張，所以每一小段單位長度的質量均為 $dM = \frac{m_s}{L} ds$ 。

(三)彈簧伸長時，常有不均勻伸張的情形，尤其是自製的軟彈簧，

350 匝的彈簧，每 50 匝用紅筆做一記號，水平靜置是等長，鉛直掛起時最下方 50 匝的長度 5 公分，最上方的 50 匝因受下方 300 匝彈簧的重力作用，長度達 23.5 公分，可見其伸張有多不均匀。

探討此種不均匀伸長的文獻，American Journal of Physics 共有六篇⁽⁷⁾，Weinstock 研究一端固定的彈簧作圓周運動之週期，Armstrong 認為懸掛質量為 50 克至 500 克間的彈簧週期 $T = 2^{5/2} \left(\frac{m_s + m/2}{k} \right)^{1/2}$ ，Sears 得到的結論

為 $T = 2\pi \left(\frac{m + pm_s}{k} \right)^{1/2}$ ，式中 P 隨 m_s/m 而異，Fox 研

究的結果 $T = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{4m}{4\pi^2} \right)^{1/2}$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$

，Edwards 認為 Fox 的公式應修正為 $\frac{4}{2n+1} \left(\frac{m_s}{k} \right)^{1/2}$ ，

$n = 0, 1, 2, \dots$ ，且適用質量懸掛範圍為 $m = 50$ 克左右者

，Thomas C. Heard 和 Neal D. Newby, Jr. 以偏微分方

程式探討 m_s, m, T 間的關係，其結論為 $T = \frac{2\pi}{Z} \left(\frac{m_s}{k} \right)^{1/2}$

.....(3)， $Z \tan Z = m_s/m$(4)。

五、研究過程

(一)為了確定軟彈簧在彈性限度內是否遵守虎克定律，先在同一彈簧上，分別懸掛不同質量 (m) 的砝碼，測量其伸長量 x ，利用 $F = mg = kx$ (其中 g 為重力加速度)，求 k 值。

(二)高中物理課本常提到兩條力常數分別為 k_1, k_2 的彈簧串聯後力

常數為 k ，則 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ ；將一條 350 匝的軟彈簧每 50

匝用紅筆做記號，然後懸掛 1.00 克的砝碼，測 50 匝、100 匝、150 匝、200 匝、250 匝、300 匝、350 匝的彈簧之 k 值。

(\Rightarrow) 0.20 mm , $\phi\ 10\text{ mm}$, $m_s = 0.80\text{ 克}$, $k = 1.289 \times 10^{-1}\text{ nt/t}$ 的彈簧阻尼最小拉動一次可振動二百餘次，量度質量可從 $0 \sim 10.55\text{ 克}$ ，測 100 次的振動時間再求平均值得到實驗的週

期 T ，將它和公式(1) $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ，公式(2) $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ ，公式(3) $T_3 = \frac{2\pi}{Z} \sqrt{\frac{m_s}{k}}$ 比較。

量出懸掛質量 m ，測出力常數 k ，代入 $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 得 T_1 。

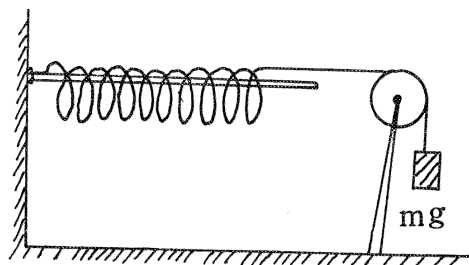
量出懸掛質量 m ，彈簧質量 m_s ，代入 $2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ 得 T_2 。

先求 Z 值： $Z \tan Z = \frac{m_s}{m}$ 利用工程用電子計算機求 $\frac{m_s}{m}$

再利用數學上所謂逼進法可求得 Z 。

六、討 論

(一)本實驗所用彈簧力常數甚小，水平放置時的長度和鉛直懸掛的長度相差甚多，作者曾嘗試以圖二的方式，使彈簧水平放置，掛上砝碼 mg ，使彈簧不受本身重量作用，測其振動週期，唯因彈簧



圖二

和鋼棒間摩擦力太大，彈簧振動次數太少，無法測量。

(二)鉛直吊起的彈簧因本身重量而伸張不均勻，只要不超過彈性限度，仍符合虎克定律，即不超過彈性限度， $F = -kx$ 中 k 值保持定值，不隨懸掛重量改變。

(三)一般物理課本常有下列公式：兩彈簧之力常數分別為 k_1 ， k_2 串

聯後力常數 $k \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ ，實驗結果中，50 匝的 $k = 20.851 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ，另一條相同的彈簧串聯後（變成 100 匝） k 應為 $10.426 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ，150 匝應為 $6.950 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ，200 匝應為 $5.213 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ，350 匝應為 $2.979 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ，實驗結果顯示相差甚多，究其原因，
 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 此式必須在不計彈簧質量下方成立。

(四) 實驗所使用的彈簧阻尼特別小，本身質量小量度質量範圍大，可從 0 ~ 10.55 克，用它測量週期後和 $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ， $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ ， $T_3 = \frac{2\pi}{Z} \left(\frac{m_s}{k} \right)^{1/2}$ （其中 $Z \tan Z = \frac{m_s}{m}$ ）作比較，在不掛砝碼時 $T_1 = 0$ ， $T_2 = 0.2858$ 秒， $T_3 = 0.3151$ 秒，實驗結果 $T = 0.3208$ 秒， T_1 的公式完全無法解釋， T_2 則有 10.91 % 之誤差， T_3 則非常接近。但在懸掛 10.55 克（即 $m \gg m_s$ ）時 T_1 ， T_2 ， T_3 則相差不多。

(五) 實驗所用彈簧本身質量大（3.08 克），力常數小（ $3.570 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ），阻尼大（僅振動 30 次左右），用它測量 $m < m_s$ 的週期，結果顯示下的公式在考慮彈簧質量時，完全不能用。在 $m_s > m$ 的情況下，用 $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ 亦產生較大的誤差，且質量相差愈多，誤差愈大。

(六) 實驗所用彈簧阻力較前者小，在 $m_s < m$ 時 $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m+m_s/3}{k}}$ 產生較大誤差，而在 $m > m_s$ 時誤差較小。

(七) $T_3 = \frac{2\pi}{Z} \left(\frac{m_s}{k} \right)^{1/2}$ 其中 $Z \tan Z = \frac{m_s}{m}$ 是假設彈簧振動時

全部產生縱波的情況下導出來的，實驗時可看到彈簧相伴發生扭

動現象，扭動會消耗部份能量，公式(3)的導出過程並未考慮。

(八)公式(3)的導出過程中亦考慮阻尼，本實驗很明顯的可以看到阻尼作用使得彈簧振幅逐漸減少，所以阻尼對週期的影響必須討論。

彈力 $F = -kx$ ，因本實驗彈簧振動速率緩慢，阻力 $F' =$

$$-\lambda \frac{dx}{dt} \quad (8), \therefore m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0 \dots\dots\dots (5)$$

實驗中，每一彈簧至少振動 30 次以上，屬於低阻尼，其解為

$$x = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\alpha \text{ 爲常數, } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} \dots\dots\dots (6) \text{ 其中 } \gamma = \lambda/2m$$

另外振幅亦受阻尼影響 $A' = Ae^{-\lambda t} \dots\dots\dots (7)$ 式中 A 爲原始振幅， A' 爲經 t 秒後的振幅，以編號 15 的實驗爲例 $m = 3.68$ 克，經 $t = 108.2$ 秒，由 $A = 4$ 公分減至 $A' = 2$ 公分代入(7)

$$2 = 4e^{-\lambda \times 108.2} \Rightarrow \lambda = 6.4 \times 10^{-3} \quad \lambda^2 = 4.1 \times 10^{-5}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} \text{ 中 } \frac{k}{m} = 1.61 \times 10^2, \lambda^2 = 4.1 \times 10^{-5}$$

(可忽略不計)，因此，在振動 100 次的實驗中振動週期不受阻尼影響。

以編號 22 的實驗爲例， $t = 35.08$ 秒，振幅由 4 公分減爲

$$1 \text{ 公分, } m = 1.51, A' = Ae^{-\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 = 1.6 \times 10^{-4} \text{ 和 } \frac{k}{m} =$$

2.4×10^4 相較亦甚小，因此，阻尼對振幅的影響雖大，但對軟彈簧的振動週期可忽略不計。

(九)實驗結果中， $m_s = 1.27$ 克， $k = 3.495 \times 10^{-2} \text{ nt/m}$ ，代入(1)得 $T = 33.609 \text{ m} \quad (1)'$ 代入(2)得 $T = 33.609 \sqrt{m + 4.233 \times 10^{-4}}$

$$\dots\dots\dots (2)', \text{ 代入(3)(4)得 } T = \frac{1.19773}{2} (3)', \quad Z \tan Z =$$

$$\frac{1.27 \times 10^{-3}}{m} \quad (4)' \text{ 以 } T \text{ 爲縱軸, } m \text{ 爲橫軸, 輸入電腦繪得圖三}$$

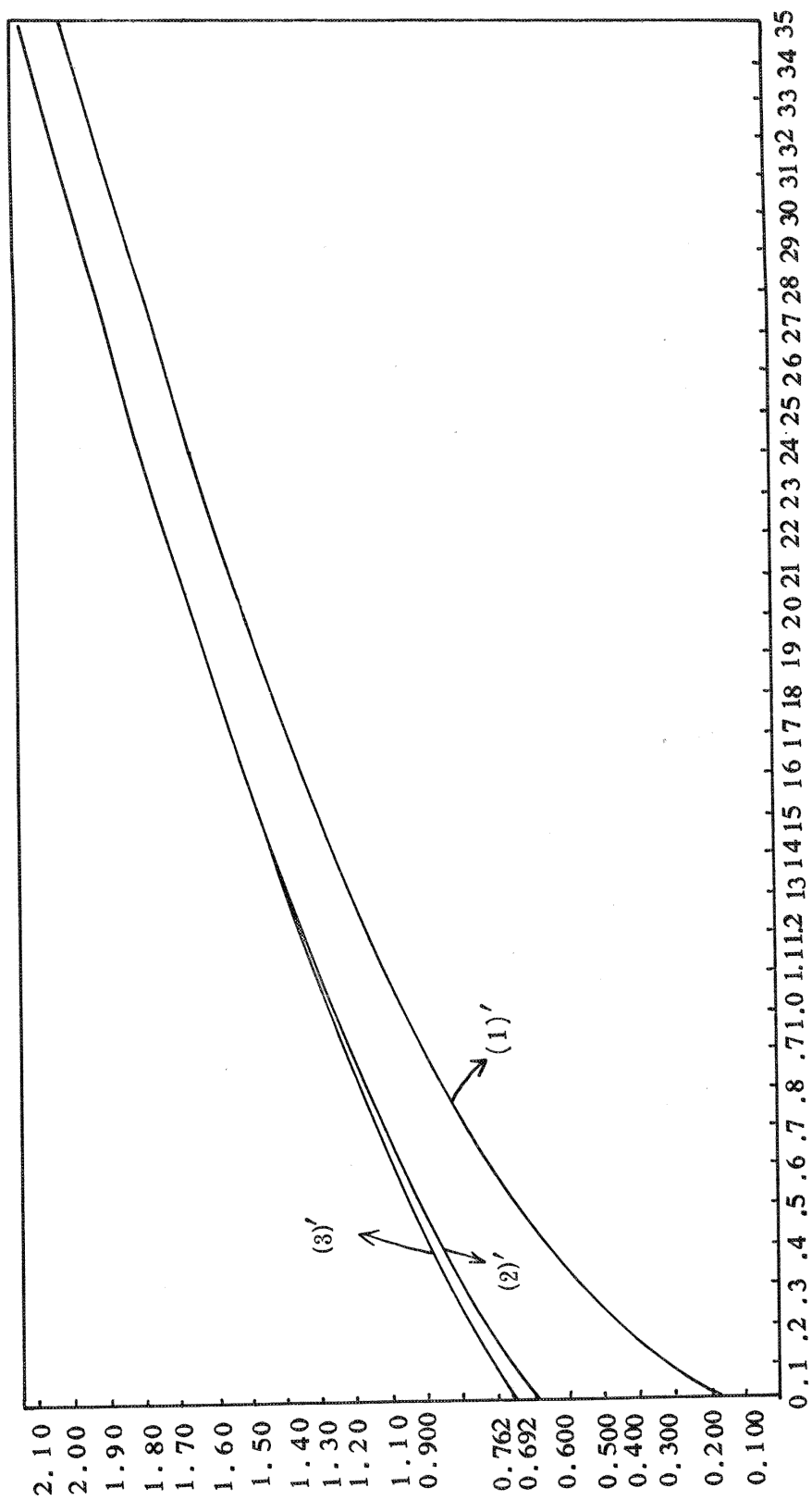


图 三

，由圖可看出公式(2)(3)在 $m < m_s$ 時有較大的誤差，而 $m > m_s$ 時二曲線幾乎重合。

七、結 論

(一)力常數 10^{-1} nt/m 以下的軟彈簧鉛直懸掛時會受本身重量作用，發生不均勻伸張，雖然如此，整條彈簧系統仍遵守虎克定律。

(二)兩彈簧力常數分別為 k_1, k_2 ，串聯後力常數為 k ，若彈簧質量不計時 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 才成立，若考慮彈簧質量，則本式不成立。

(三) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 要在不計彈簧質量時才能用。

(四) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_s/3}{k}}$ 在懸掛質量大於彈簧質量時，可以用來計算週期，但 $m < m_s$ 時誤差較大，尤其 $m = 0$ 時誤差甚多。若不計彈簧質量公式(2)可變成公式(1) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

(五) $T = \frac{2\pi}{Z} \left(\frac{m_s}{k}\right)^{1/2} \dots\dots(3)$ ， $Z \tan Z = \frac{m_s}{m} \dots\dots(4)$ ，在

$m_s \ll m$ 時 $\frac{m_s}{m} \doteq 0 \Rightarrow Z \tan Z = Z^2$ ， $Z^2 = \frac{m_s}{m} \Rightarrow$

$Z \left(\frac{m_s}{m}\right)^{1/2}$ 代入(3)得 $T = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$ 。在彈簧質量忽略不計時，公式(3)亦可變成公式(1)，所以在 $m_s \ll m$ 的情況下(1)仍可用。

(六)若 $m_s \gg m$ (例如彈簧不掛任何物體時) $Z \tan Z = \frac{m_s}{m} = \infty$

$\Rightarrow Z = \frac{\pi}{2}$ 代入(3)得 $T = \frac{2\pi}{\pi/2} \left(\frac{m_s}{k}\right)^{1/2} = 4 \left(\frac{m_s}{k}\right)^{1/2}$ ，

即 $m_s \gg m$ 時 $T = 4 \cdot \left(\frac{m_s}{k} \right)^{1/2}$ ，用它來計算不掛任何物體

的週期很簡便。

(七)簡諧運動是物理學上非常重要的單元，本實驗的器材設備雖很簡單，但尚稱精良，用它來做教具，使得作者所教的學生深深體驗到常以爲“是”的問題，都是值得進一步探討的。

八、參考資料

(一)吳友仁 高級中學物理學 東華書局印行 民國七十三年 頁一八三～一八七。

(二)David Halliday, & Robert Resnick. Fundamental of Physics New York: John Wiley & Sons Inc. 1964.

(三)同上，但爲一九七四年版。

(四)全國第廿二屆中小學科學展覽會參展目錄，彈簧質量對週期的影響，作者黃珍薇等四人，指導教師台中女中盧錦玲老師。

(五)全國第十八屆科學展覽得獎專輯，液體表面張力之測量及應用，作者李文堂，國立台灣科學教育館印行，民國六十七年。

(六)A.P. French, Vibrations and Waves (Norton, New York, 1971) PP.60 ~ 62.

(七)R. Weinstock, Am. J. Phys. 32, 370(1964) ;
F. W. Sears, Am. J. Phys. 37, 645(1969) ;
H. L. Armstrong, Am. J. Phys. 37, 477(1969) ;
J. G. Fox & J. Mahanty, Am. J. Phys. 38, 98(1970);
T. W. Edwards and R. A. Hultsch, Am. J. Phys. 40, 455(1972) ;
Thomas C. Heard and Near D. Dewby Jr. Am. J. Phys. 45, 1102(1977).

(八)Alonso-Finn, Physics (Addison-Wesley Publishing Co. Inc. 1969.) PP.166-168.

評語：實驗技巧精細，參考資料之運用豐富，具實用性，惟較少創意。