

彈簧「預力」的研究暨 「機械能守恒實驗」設計

高中教師組物理科第二名

台北市立成功高中

作者：沈嘉祥

一、研究動機

數年來，指導學生做「位能之變化」實驗時，總感覺誤差太大，而且不論是怎麼要求細心操作，實驗結果仍是甚難合乎「機械能守恒」原理，幾經探究，終於找出原因，原來這都是因為現代的拉力螺旋彈簧（tension coil spring）大都灌有「預力」即「初拉力」（initial tension）的結果，為了讓學生理論與實際配合，故做此研究。

二、研究目的

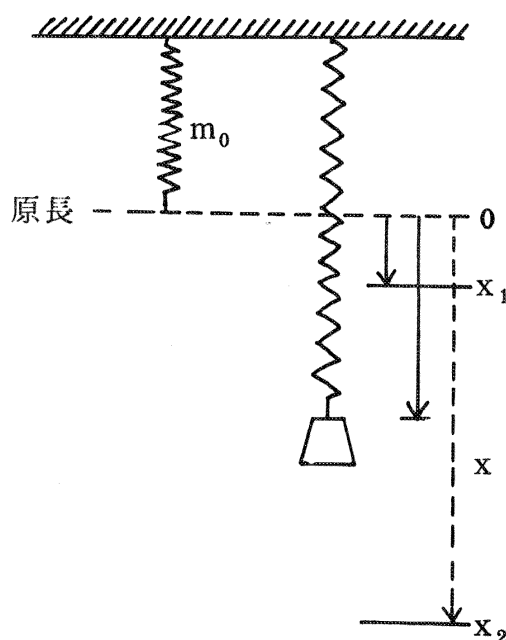
- (一)探討影響「位能之變化」實驗的原因。
- (二)探討彈簧「預力」的成因及用途。
- (三)研擬「機械能守恒實驗」的新設計。

三、原理

設 m ：重錘質量

m_0 ：彈簧質量

k ：彈簧之彈性係數。



彈 力 位 能	重力位能	動能	總 機 械 能
0	0		
$\frac{1}{2} k x_1^2$	$-mgx_1$	0	$\frac{1}{2} k x_1^2 - mgx_1$
$\frac{1}{2} k x_2^2$	$-mgx_2$	0	$\frac{1}{2} k x_2^2 - mgx_2$

(一)簡諧運動的上下兩端的總機械能：

$$\frac{1}{2} k x_1^2 - mgx_1 = \frac{1}{2} k x_2^2 - mgx_2$$

$$\frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 = -[(-mgx_2) - (mgx_1)]$$

$$\Delta U_s = -\Delta U_g$$

(二)動能不為零的總機械能：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k x^2 - mgx + \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} k x_1^2 - mgx_1 \\ &= \frac{1}{2} k x_2^2 - mgx_2 \end{aligned}$$

(三)彈簧本身質量的影響：

$$F = \left(m + \frac{1}{2} m_0 \right) g = k \cdot \Delta x$$

$$k = \frac{m + \frac{1}{2} m_0}{\Delta x} g$$

當 $m \gg m_0$ 時

$$k = \frac{mg}{\Delta x}$$

四、研究設備器材

見圖一。

五、研究過程

(一)「位能之變化」的改良：

1. 彈簧「真原長」及彈性係數的測量：

(1) 在彈簧下端加一指針，並掛一輕盤。

(2) 以輕砝碼加入輕盤中當作施力下，記錄彈簧長度 x 。

(3) 逐漸增加砝碼，測出 $F - x$ 的函數關係並作關係曲線。

(4) 由 $F - x$ 關係圖中，推測彈簧之「真原長」及彈性係數 k 。

2. 彈簧位能與重力位能之互換：

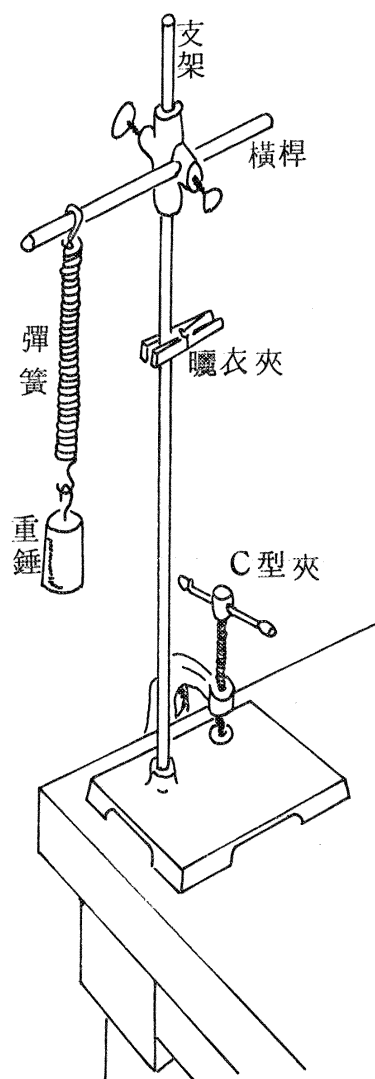
(1) 以晒衣夾在鐵架上標出彈簧的「真原長」。

(2) 在彈簧下端懸掛 1 公斤的重錘，以手執之，使彈簧伸長約 5 公分，以另一晒衣夾標記，再釋放重錘，使之振動，彈簧下端所能達到之最低位置，再用另一晒衣夾標記，重複數次以確定最低位置。

(3) 計算重錘振動的上下兩端重力位能之損失及彈力位能的增加。

(4) 重複以上步驟，但改變重錘下落前彈簧的伸長量約為 10 公分，並記錄各相關數據。

(5) 改懸 0.5 公斤的重錘，重複上述步驟。



圖一

- (6) 檢驗彈力位能的變化量 ΔU_s 與重力位能的變化量 ΔU_g 的關係。

(二)「機械能守恒實驗」的設計：

1. 裝置如圖二；步驟如(一) 2，只是增加電動計時器，紙帶一端黏在重錘上，並標示彈簧「真原長」的對應位置。
2. 釋放重錘時啓動電動計時器。
3. 當重錘達到最低點時切斷計時器電源。
4. 分析紙帶，測出重錘速度 v 對彈簧長度 x 的函數關係，並作重錘動能 E_k 與 x 的關係函數圖形。
5. 作彈力位能 U_s 與重力位能 U_g 對 x 的關係函數圖。
6. 綜合步驟 4、5 的函數圖綫，並作總機械能對 x 的關係函數圖。

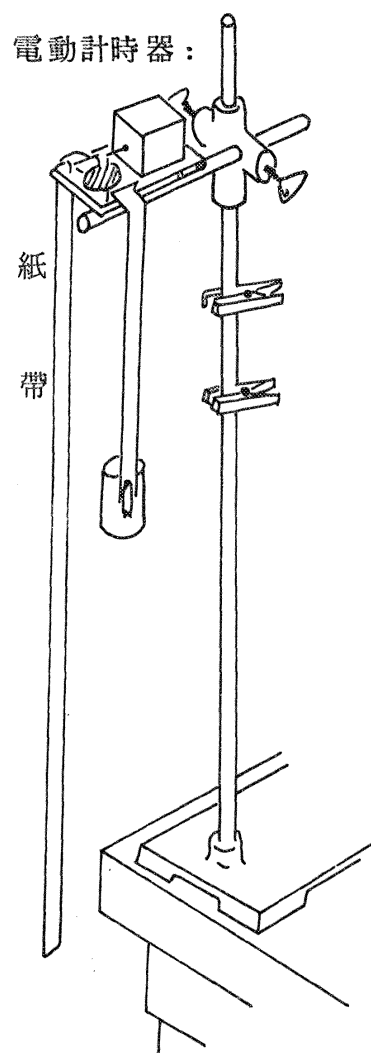


圖 二

六、實驗結果及討論

(一)「位能之變化」：

1. 拉力螺旋彈簧大多是實施常溫成形，其時即已有預力即初拉力了，亦即是已存有一些彈力位能在內。虎克定律不再那麼單純了。
2. 經找出「真原長」予以修正後實驗誤差大為改善，學生心中的疑惑減少甚多。
3. 究其原因主要來自於彈力位能 U_s 與彈簧伸長量 x 成平方正比，故其位能零點必需選在無位能的「真原長」處，才不致造成 ΔU_s 的不準，至於重心位能零點因與 x 成一次正比，零點不論選於何

處均不影響 ΔU_g 。

4. 從理論上看見圖三、四，要證明 $\Delta U_s = \Delta U_g$ ，則應有

$$\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = mg(x_2 - x_1)$$

若 x_1, x_2 非由「真原長」處量起，而是由「視原長」處量起，設 $x_0 = \text{「視原長」} - \text{「真原長」}$

$$x_1' = x_1 - x_0, \quad x_2' = x_2 - x_0$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \frac{1}{2}k[(x_2' + x_0)^2 - (x_1' + x_0)^2] \\ = mg[(x_2' + x_0) - (x_1' + x_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{1}{2}k[(x_2'^2 - x_1'^2) + 2x_0(x_2' - x_1')] \\ = mg(x_2' - x_1') \end{aligned}$$

$$\text{則 } \frac{1}{2}k(x_2'^2 - x_1'^2) < mg(x_2' - x_1')$$

即彈力位能會無端端地少算了

$$\frac{1}{2}k \times 2x_0(x_2' - x_1') = kx_0(x_2' - x_1')$$

\therefore 干擾本實驗不準的原因即是出於此了。

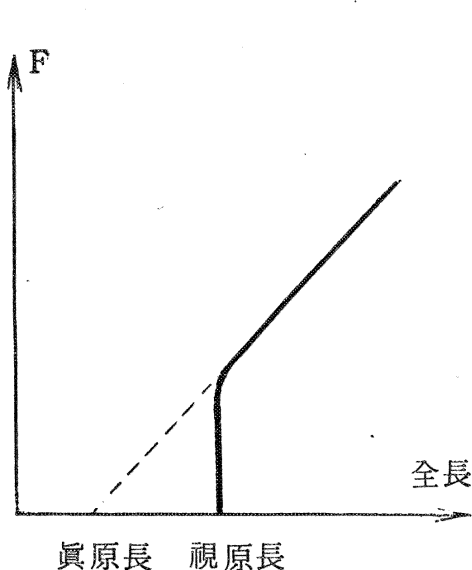


圖 三

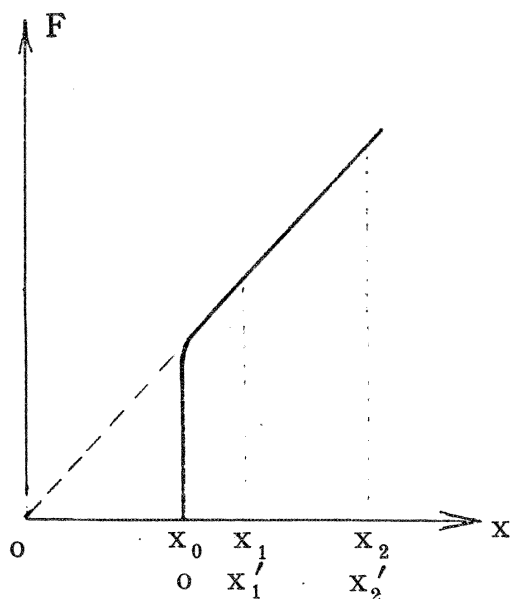


圖 四

5. 由掛重與伸長量的關係圖形分析之，對一條具有預力而不考慮的彈簧而言，若以視原長為彈力位能零點，則

$$\Delta U_s = \frac{1}{2} k x_2'^2 - \frac{1}{2} k x_1'^2$$

實為圖五中斜綫部分 A 的面積。

若考慮預力的存在而找出真原長來，並以之為彈力位能零點，則

$$\Delta U_s = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

為圖六中斜綫部分 B 的面積。

故若不考慮預力而直接計算彈力位能的變化量時，將少算了圖五中 C 的面積，即 $k x_0 (x_2' - x_1')$ 的值。

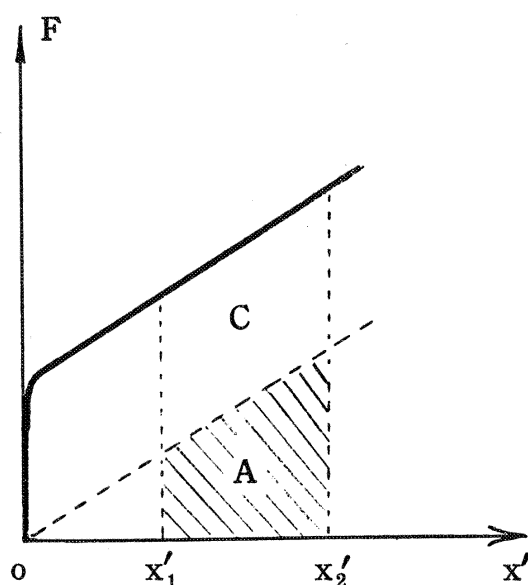


圖 五

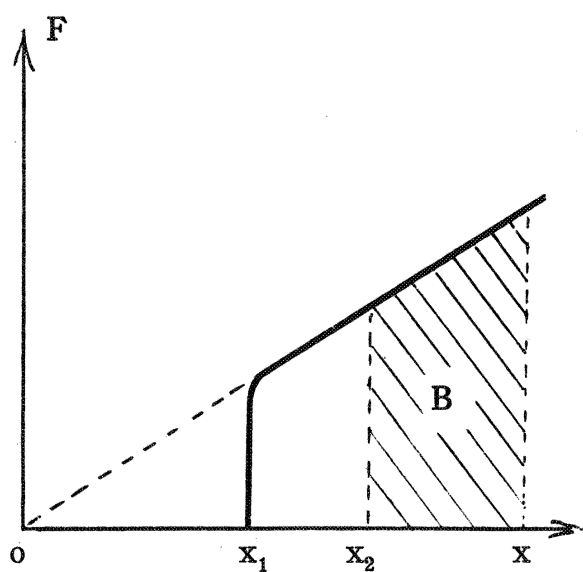


圖 六

6. 預力的大小與「真原長」有關，但與彈性係數無關，即用同規格之鋼綫繞製同口徑，同視原長的彈簧，應用不同的方式製成預力不同，則預力愈大，真原長愈短，但彈性係數相同。見圖七。
7. 欲消除此誤差，除了找出「真原長」予以修正外，另可故意將彈簧用略超過彈性限度的拉力將之略拉長以消除預力，惟此法

並不妥當，易給學生誤以爲是壞了的彈簧，而且保管時容易數條彈簧纏繞一起，不易維護。

8. 預力的存在對彈簧的保管、運送甚有助益，至少不會數條彈簧纏成一團，而且彈簧更有力，即欲造成同樣的伸長量，預力大者，需施力愈大。

9. 本實驗可確實獲得 $\Delta U_s = -\Delta U_g$ 的結果。

(二)「機械能守恒實驗」：

1. 原有利用單擺做此實驗時，誤差常由於擺錘的運動軌跡不是直線，故用電動計時器打紙帶來記錄時，易造我大誤差。
2. 改用彈簧來做的話，誤差極小，而且兼能探討彈力位能與重力位能及總位能間的關係。
3. 若定彈簧「真原長」處爲位能零點，則實驗結果如圖八。

U_s ：彈力位能

U_g ：重力位能

E_k ：動能

U ：總位能 ($U_s + U_g$)

E ：總能 ($U + E_k$)

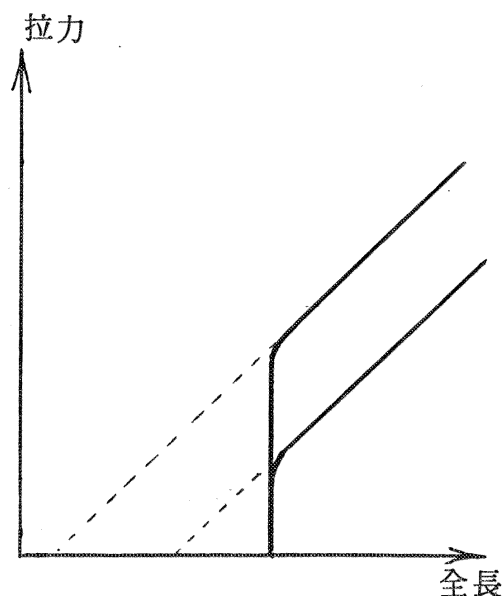


圖 七

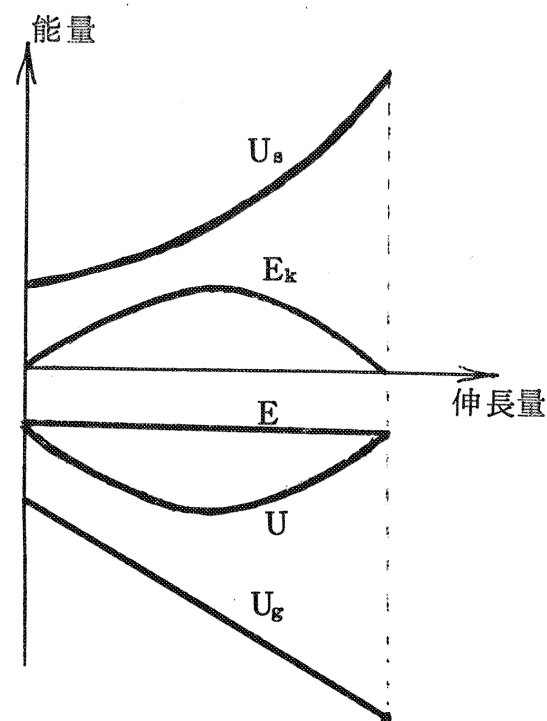


圖 八

七、結 論

(一)一般學校用彈簧大多由儀器公司供應以工業用彈簧，若不深入了

解，實驗結果常與理論相去甚遠，爲了減少學生誤解，宜做適當修正。

- (二)拉力螺旋彈簧的預力存在有甚多優點，例如(一)無間隙，不易與別的彈簧纏繞一起，較便維護保存。(2)有預力的彈簧更有力，其預力可隨設計而「注入」。
- (三)日常生活裏有甚多具有「預力」的彈簧，例如鑰匙圈、腳踏車的座墊彈簧、機車的腳架彈簧等，其預力的形成是在彈簧成形時故意設計成「螺距」較彈簧鋼綫的口徑爲小。

八、參考資料

- (一)「機械元件設計」，譯者關昌揚，中華民國五十九年六月三十日初版，徐氏基金會出版，科學圖書文庫。
- (二)「機械設計」下冊，楊健生編著，六十三年一月再版，大中國圖書公司。
- (三)「機械力學」，楊世賢編著，六十六年八月初版，東大圖書公司。
- (四)「物理實驗」上冊，任家勤、林重信編著，六十七年六月五版，
- (五)「物理實驗」上冊，方聲恒、陳愛蘭、歐陽鐘仁編著，七十二年四月台修五版，正中書局。

評語：對考慮彈簧原非自由長度之觀點及其解決有創意。理論分析尚須加強，但對實際教學有助益。