三角形三中線、三角平分線及三高及於一點的另一解法
國中組數學第三名

台北市新民國民中學　　　　作　　者：葉婉儀　游靜瑤

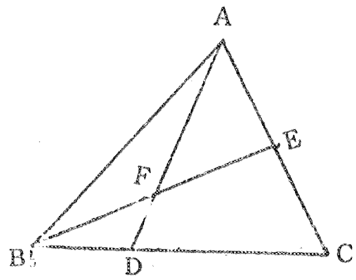
指導老師：鄭進益

一、前言：

由三角形三中線，三角平分線及三高的圖形分析，皆是由頂點引出三射線出來，當一個三角形自頂點任引出三射線，此三射線可交一小三角形出來，我們要研究此小三角形面積對於原有三角形面積之關係，進而對於三中線，三角形分線及三高加以研討。

二、預備知識：

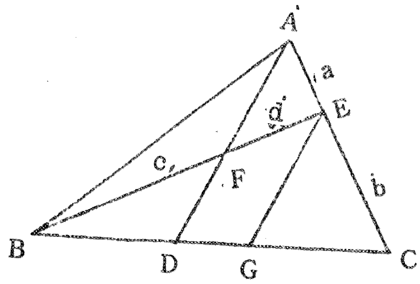
我們學習到如圖㈠E為$\overline{AC}$之中點，F為$\overline{BE}$之中點，則$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BC}$之時，考慮當$\overline{AE}=$？$\overline{AC}$且$\overline{BF}=$？$\overline{BE}$時則$\overline{BD}=\frac{1}{n}\overline{BC}$



1.已知：$\overline{AE}=a$，$\overline{EC}=b$，$\overline{BF}=c$，$\overline{EF}=d$

求證：$\overline{BD}=$？$\overline{BC}$

證明：(1)過E點作平行$\overline{AD}$之直線交$\overline{BC}$於G



(2)△ACD中∵$\overline{AD}\parallel\overline{EG}$

$$\therefore\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{GC}}=\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$$

(3)△BEG中∵$\overline{AD}\parallel\overline{EG}$

$$\therefore\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DG}}=\frac{c}{d}=\frac{ac}{ad}$$

(4)$\therefore\overline{BD}:\overline{DG}=\overline{GC}=ac=ad=bd$

$$\therefore \overline{BD}=\frac{ac}{ac+ad+bd}\times\overline{BC}$$

令 $a=1$，$c=1$，$1+d+bd=n$，$d(b+1)=n-1$，

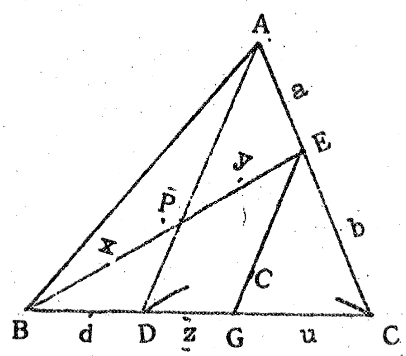
$$d=\frac{n+1}{b+1}$$

$$\therefore \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{1}{1+b}，\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\frac{1}{\frac{n-1}{b+1}+1}$$

$$\therefore \overline{AE}=\frac{1}{1+b}\overline{AC}，\overline{BF}=\frac{1}{\frac{n-1}{b+1}+1}\overline{BE}，則\ \overline{BD}=\frac{1}{n}\overline{BC}$$

2.△ABC中，自AB引射線交於P，若 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{a}{b}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{c}{d}$

則△ABP＝?△ABC



已知：$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{a}{b}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{c}{d}$

求證：△ABP＝?△ABC

證明：(1)作 $\overline{EG}/\!/\overline{AD}$ 令 $\overline{DG}=z$，

$GC=u$

(2)在△BEG中∵ $\overline{PD}/\!/\overline{EG}$

$$\therefore \frac{a}{y}=\frac{d}{z}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(3)在△A$\overline{CD}$中∵ $\overline{EG}/\!/\overline{AD}$ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{z}{u}=\frac{z}{c-z}$

由此合比知 $\frac{a}{a+b}=\frac{z}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(4)(1)×(2)得 $\frac{x}{y}\times\frac{a}{a+b}=\frac{d}{c}$

$$\frac{x}{y}=\frac{d(a+b)}{ac}$$

$$\frac{x}{x+y}=\frac{d(a+b)}{ac+d(a+b)}$$

$$\frac{\triangle ABP}{\triangle ABE}=\frac{x}{x+y}=\frac{d(a+b)}{ac+d(a+b)}$$

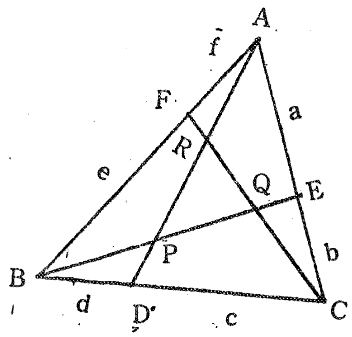
$$\frac{\triangle ABE}{\triangle ABC}=\frac{a}{a+b}$$

$$\therefore\frac{\triangle ABP}{\triangle ABC}=\frac{a}{a+b}\times\frac{d(a+b)}{ac+d(a+b)}$$

$$=\frac{ad}{ac+d(a+b)}=\frac{1}{\frac{c}{d}+\frac{b}{a}+1}$$

3. 已知：$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{a}{b}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=\frac{c}{d}$，$\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{e}{f}$

求證：$\triangle PQR=?\triangle ABC$



證明：(1)$\triangle ABP=\frac{1}{\frac{c}{d}+\frac{b}{a}+1}$

$\triangle ABC$

$\triangle BCQ=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{f}{e}+1}$

$\triangle ABC$

$\triangle ACR=\frac{1}{\frac{e}{f}+\frac{d}{c}+1}\triangle ABC$

(2)$\therefore\triangle PQR=\triangle ABC-\triangle ABP-\triangle BCQ-\triangle ACR$

$$=\left(1-\frac{1}{\frac{c}{d}+\frac{b}{a}+1}-\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{f}{e}+1}\right.$$

$$-\frac{1}{\frac{e}{f}+\frac{d}{c}+1})\triangle ABC$$

三、由△PQR＝0證明三線交於一點

1. 若$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$爲中線時，a＝b，c＝d，e＝f

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=1$$

則$\triangle PQR=\{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\}\triangle ABC=0\times\triangle ABC=0$

△PQR面積爲0，表示三中線交於一點

2. 若$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$爲角平分線時

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{d}{c}，\frac{\overline{CE}}{AE}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{b}{a}，\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{f}{e}，$$

$$\text{則}\triangle PQR=\left[1-\frac{1}{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}+1}-\frac{1}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}+1}-\frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}+1}\right]\triangle ABC$$

$$=\left[1-\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}+\overline{AC}+\overline{AB}}-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}}-\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{BC}}\right]\triangle ABC$$

$$=0\cdot\triangle ABC$$

$$=0$$

△PQR面積爲0表示三角平分線交於一點

3. 若$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$爲高時

△ABC面積以△表示，$\triangle=\frac{1}{2}AD\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{CF}$，

$$\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BE}\times\overline{AC}$$

$$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\frac{4\triangle^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{BC}^2-4\triangle^2}{\overline{BC}^2}$$

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\frac{4\triangle^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{AC}^2\cdot\overline{BC}^2-4\triangle^2}{\overline{BC}^2}$$

$$\frac{c^2}{d^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{\overline{AC}^2\times\overline{BC}^2-4\triangle^2}{\overline{AB}^2\times\overline{BC}^2-4\triangle^2}$$

$$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-\overline{BE}^2=\overline{AB}^2-\frac{4\triangle^2}{\overline{AC}^2}=\frac{\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2-4\triangle^2}{\overline{AC}^2}$$

$$\overline{CE}^2=\overline{BC}^2-\overline{BE}^2=\overline{BC}^2-\frac{4\triangle^2}{\overline{AC}^2}=\frac{\overline{BC}^2\times\overline{AC}^2-4\triangle^2}{\overline{AC}^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{CE}^2}=\frac{\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2-4\triangle^2}{\overline{BC}^2\times\overline{AC}^2-4\triangle^2}$$

$$\overline{BF}^2=\overline{BC}^2-\overline{CF}^2=\overline{BC}^2-\frac{4\triangle^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{BC}^2\times\overline{AB}^2-4\triangle^2}{\overline{AB}^2}$$

$$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2-\overline{CF}^2=\overline{AC}^2-\frac{4\triangle^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{AC}^2\times\overline{AB}^2-4\triangle^2}{\overline{AB}^2}$$

$$\frac{e^2}{f^2}=\frac{\overline{BF}^2}{\overline{AF}^2}=\frac{\overline{BC}^2\times\overline{AB}^2-4\triangle^2}{\overline{AC}^2\times\overline{AB}^2-4\triangle^2}$$

令$\overline{AC}^2\times\overline{BC}^2-4\triangle^2=m^2$，$\overline{AB}^2\times\overline{BC}^2-4\triangle^2=n^2$，

$\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2-4\triangle^2=p^2$

則$\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$，$\frac{a}{b}=\frac{p}{m}$，$\frac{e}{f}=\frac{n}{p}$

$$\triangle PQR=\left(1-\frac{1}{\frac{m}{n}+\frac{m}{p}+1}-\frac{1}{\frac{p}{m}+\frac{p}{n}+1}-\frac{1}{\frac{m}{p}+\frac{n}{m}+1}\right)$$

$\triangle ABC$

$$=\left(1-\frac{1}{\frac{mp+mn+np}{np}}-\frac{1}{\frac{pn+pm+mn}{mn}}-\frac{1}{\frac{mn+pn+pm}{pm}}\right)\triangle ABC$$

$$=\left(1-\frac{np}{mp+mn+np}-\frac{mn}{pn+pm+mn}-\frac{pm}{mn+pn+pm}\right)\triangle ABC$$

$$=0$$

$\triangle PQR$面積為0表示三高交於一點。

四、結論：

我們討論三角形面積之問題，進而對於三中線、三角平分線及三高之交點問題，作一完整探討，對於三線是否交於一點證明，可藉$\triangle PQR$是否為零來證明。

評語：利用三角形的面積關係，求證一個定理，此定理可以應用在三角形的重心，重心、內心的證明，在一般化的證明方法上頗有創意。