概率實驗之分析

高中組數學

省立高雄女子高級中學

製作學生：王家韵　林春鳳

指導老師：邵　文　山

一、本文之目的在於討論「連續投擲一枚硬幣n次，出現正面，反面累積次數的分佈情況」。

二　投擲結果是正面，則在平面上畫斜率是1的單位線段，如果出現反面，則在平面上畫斜率是－1的單位線段，因此連續投擲n次可畫出n個連續線段。如果前r次投擲結果爲a次正面，b次反面，$a+b=r$，　$a-b=y_r$，　則第r線段之終點坐標爲(r, y_r)，即爲第$r+1$線段之起點。

$\therefore y_k - y_{k-1} = \varepsilon_k = \pm 1$（第k次出現正面$\varepsilon_k = 1$，第k次出現反面，$\varepsilon_K = -1$）

$$y_0 = 0 \qquad y_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

三、以上述各線段端之縱坐標（$y_0 y_1 y_2 \cdots\cdots, y_n$）所成之數列表示n次投擲之結果，而稱之爲自（o，o）至（$n_1 y_n$）之一路徑，n爲此路徑之長。

四、n次投擲結果出現正面a次，反面b次（$a+b=n$，$a-b=x$）之情形有$c(n,a)$種，換言之，自（o，o）至（n，x）的路徑

總數爲$c(n,a) = c\left(n, \dfrac{n+x}{2}\right)$

記爲$N_{N,x} = c\left(n, \dfrac{n+x}{2}\right)$

又 n 次投擲，恰出現 a 次正面的概率爲 $P_{n,x}$

$$= 2^{-n} N_{n,x} = 2^{-n} c\left(n, \frac{n+x}{2}\right)$$

五、由上述之敘述，考慮自（o，o）至（n，x）的所有 $N_{n,x}$ 種不同的路徑，可分類爲：

$\begin{cases} \text{I型：路徑除（o，o）外不與 x 軸相交者。} \\ \text{II型：路徑與 x 軸相交者。} \end{cases}$

那麼，A：路徑屬於第 I 類型的概率若干？

對於第 II 類型的路徑又考慮其交點

B：(1)路徑（2 k，y_{2k} = o）發生的概率若干？即 u_{2k} = ？

(2)「（2 k，y_{2k} = o）是第一個交點的路徑」發生的概率若干？

即 h_{2k} = ？

(3)「（2 k，y_{2k} = o）是最後一個交點的路徑」

ℓ 2k，2n = ？發生的概率若干

C：長爲 2 n + 1，「穿過 x 軸 r 次的路徑」發生的概率若干？$\beta_{r,2n+1}$ = ？

六、因爲要解決以上問題，先引入：

〔對稱原理〕 設 A（a，α） B（b，β） a，b，α，$\beta \in N$，自 A 至 B 之所有路徑中與 x 軸相交的個數等於自 A′（a，$-\alpha$）至 B（b，β）的路徑總數。

換言之，即屬於第 II 類型之個數若干？

七、問題 A 之解：

I 型者 = 全部 — II 型者

（利用對稱原理）

(1)自（o，o）至（n，x）而不與 x 軸相交路徑總數 = $N_{n-1,x-1}$

$- N_{n-1,x+1}$

(2)又(1)中　$x=1,2,3,\cdots\cdots n$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}(N_{n-1,x-1},-N_{n-1,x+1})=N_{n-1,0}+N_{n-1,1}$$（加法原理）

答：路徑屬於I者之概率為：

$$\begin{cases}\text{當 } n \text{ 是偶數時為 } P_{n-1,1}\\ \text{當 } n \text{ 是奇數時為 } P_{n-1,0}\end{cases}$$

八、（B之1）。$P\left\{y_{2k}=0\right\}=u_{2k}=2^{-k}c(2k,k)$

九、（B之2）。$P\left\{(y_1\neq 0,y_2\neq 0,y_3\neq 0,\cdots\cdots,y_{2k-1}\neq 0,\right.$

$\left.y_{2k}=0)\right\}=h_{2k}=?$

解答此問題之構想為：

$P\left\{(y_1\neq 0,y_2\neq 0,\cdots\cdots,y_{2k-1}\neq 0,y_{2k}=0)\right\}$

$P\left\{(y_1\neq 0,y_2\neq 0,\cdots\cdots,y_{2k-2}\neq 0)\right\}$

$-P\left\{(y_1\neq 0,y_2\neq 0,\cdots\cdots y_{2k-2}\neq 0,y_{2k-1}\neq 0,\right.$

$\left.y_{2k}\neq 0\right\}$

十、因此想得〔預備定理〕

$P\left\{(y_1\neq 0,y_2\neq 0,\cdots\cdots,y_{2n}\neq 0)\right\}=P\left\{y_{2n}=0\right\}U=_{2n}$。

十一、問題（B之2）之答案為　$h_{2k}=\dfrac{1}{2k-1}u_{2k}$ 是 k 的函數與n無關。

十二、（B之3）。$P\left\{y_{2k}=0,y_{2k+1}\neq 0,y_{2k+2}\neq 0\cdots\cdots,\right.$

$\left.y_{2n}\neq 0\right\}=\ell_{2k,2n}$.

$=P\left\{y_{2k}=0\right\}\times P\left\{y_{2k+1}\neq 0\cdots\cdots,y_{2n}\neq 0\right\}$

$=u_{2k}\cdot u_{2(n-k)}$

十三、討論：一般以爲k愈接近n，$\ell_{2k,2n}$值愈大，事實上是k愈接近（o或n），$\ell_{2k,2n}$值愈大。

十四、（C）長爲2n＋1的路徑，穿過x軸r次的概率，$\beta_{r,2n+1}=?$

因爲　$o\leqq r\leqq n$，$r\in I$；因此以數學歸納法求之。

答案：$\beta_{r,2n+1}=2P_{2n+1,2r+1}$，

附錄：

連續投擲2n次150回的紀錄　　$n=10,20,25$

A、$n=25$時，即投擲7500次出現正面 3806次，$P=\frac{3806}{7500}=0.5074$

B之1：正反面累積次數相同

$\overline{y}=3.56$

$$\rho^2=\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{25}=49.12$$

B之2：第一交點

$\overline{y}=0.16$

$$\rho^2=\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{25}=11.10$$

y＝實驗回數－理論回數

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\Sigma y$$

$$\rho^2=\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{n}$$

B之3：最後交點

$n=10$時，$\overline{y}=0.$　　$\rho^2=17.55$

$n=20$時，$\overline{y}=0.25$　　$\rho^2=10.18$

$n=25$時，$\overline{y}=-0.16$　　$\rho^2=6.88$

C. 穿過r次

$n=10$時，$\overline{y}=0.4$　　$\rho^2=22.8$

$n=20$時，$\overline{y}=0.5$　　$\rho^2=2.21$

$n=25$時，$\overline{y}=0.1$　　$\rho^2=4.46$