奇妙的數字——數位相加之研究

國小敎師組數學

台北市景美國民小學　　　　製作：廖文隆　劉瓊華

六年級上學期，我們曾學了3，9，11等合數之因數的識別法，覺得這些方法實在很妙，但卻不曾見到有其他數的識別法，（如7，13，19等）而且也不知道3，9，11的識別法是怎樣來的。

在這裏，首先讓我們看看3，9，11的多項乘法表：

〔表一〕

$3\times1=3$ ………………………………… 3

$3\times2=6$ ………………………………… 6

$3\times3=9$ ………………………………… 9

$3\times4=12$ ……………………… $1+2=3$

$3\times5=15$ ……………………… $1+5=6$

………………………………

$3\times18=54$ ……………………… $5+4=9$

………………………………

$3\times43=129$ …………………… $1+2+9=12$

> 由表一的最後一列數，很明顯的，每個數目，數位相加，其和必定仍爲3的倍數。

由此表，可以推導出3的識別法，至於9與11我們亦可用同樣的手續推出。其次，我們再看看其他的乘法表：

〔表二〕

$7\times1=7$ ………………………………… 7

$7\times2=14$ ························ $1+4=5$

$7\times3=21$ ························ $2+1=3$

$7\times4=28$ ························ $2+8=10$

$7\times5=35$ ························ $3+5=8$

$7\times6=42$ ························ $4+2=6$

$7\times7=49$ ························ $4+9=13$

$7\times8=56$ ························ $5+6=11$

$7\times9=63$ ························ $6+3=9$

〔表三〕

$13\times1=13$ ····················· $1+3=4$

$13\times2=26$ ····················· $2+6=8$

$13\times3=39$ ····················· $3+9=12$

$13\times4=52$ ····················· $5+2=7$

$13\times5=65$ ····················· $6+5=11$

$13\times6=78$ ····················· $7+8=19$

$13\times7=91$ ····················· $9+1=10$

$13\times8=104$ ················ $1+0+4=5$

$13\times9=117$ ················ $1+1+7=9$

難怪沒有7和13的識別法！原來從那面看，它們都找不出一個規律性來，但我們再看看表二的最後一列，假如再將它們做數位相加，會有什麼結果？

〔表二A〕

7 ······································ 7

5 ······································ 5

3 ······································ 3

10 ······························ $1+0=1$

8 ······································ 8

6 ······································ 6

13 ······························ $1+3=4$

11 ······························ $1+1=2$

9 ······································ 9

現在就比原來的那一列數好看多了，但是9以後又怎樣呢？

我們再從 7 ×10開始做：

〔表二B〕

7 ×10＝ 70	7 ＋ 0 ＝ 7		7
7 ×11＝ 77	7 ＋ 7 ＝14	1 ＋ 4 ＝ 5	5
7 ×12＝ 84	8 ＋ 4 ＝12	1 ＋ 2 ＝ 3	3
7 ×13＝ 91	9 ＋ 1 ＝10	1 ＋ 0 ＝ 1	1
7 ×14＝ 98	9 ＋ 8 ＝17	1 ＋ 7 ＝ 8	8
7 ×15＝105	1 ＋ 0 ＋ 5 ＝ 6		6
7 ×16＝112	1 ＋ 1 ＋ 2 ＝ 4		4
7 ×17＝119	1 ＋ 1 ＋ 9 ＝11	1 ＋ 1 ＝ 2	2
7 ×18＝126	1 ＋ 2 ＋ 6 ＝ 9		9

…………………………………………

得到的結果 7，5，3，1，8，6，4，2，9之後仍是7，5，3，1，8，6，4，2，9……再做繼續的乘法，發現7如此的連續下去，所得之數，數位相加所得之結果(限於1—9之間)，必然有一規律的循環性，即為 7，5，3，1，8，6，4，2，9； 7，5，3，1，8，6，4，2，9；7，5，3，1，8，6，4，2，9…… 先為奇，再為偶之循環。如此做，對我們有沒有什麼幫助呢？目前它只是一個很好看的循環數列，但是似乎無法從此數列去找個什麼什麼識別法，別的數字同樣的這樣做，會不會有類似的結果呢？我們再回頭看看表三：

〔表三A〕

4	4	13×10＝130	1＋3＋0＝ 4		4
8	8	13×11＝143	1＋4＋3＝ 8		8
12……1＋2＝ 3	3	13×12＝156	1＋5＋6＝12	1＋2＝ 3	3
7	7	13×13＝169	1＋6＋9＝16	1＋6＝ 7	7
11……1＋1＝2	2	13×14＝182	1＋8＋2＝11	1＋1＝ 2	2
15……1＋5＝6	6	13×15＝195	1＋9＋5＝15	1＋5＝ 6	6
10……1＋0＝1	1	13×16＝208	2＋0＋8＝10	1＋6＝ 1	1
5	5	13×17＝221	2＋2＋1＝ 5		5
9	9	13×18＝234	2＋3＋4＝ 9		9

…………………………………………

…………………………………………

同樣的，我們得到，由4開始：4 8 3 7 2 6 1 5 9，4 8 3 7 2 6 1 5 9………的循環數列。

爲了便於下面說明起見，首先定義一個名詞：

4 8 3 5 1………4＋8＋3＋5＋1＝21………2＋1＝3

我們稱這個3爲4 8 3 5 1的數底，所以每個數的數底必爲1～9之間，然後再研究每個數乘法表之數底。

〔表四〕

(一) 1×1，1×2，1×3…………

數底爲：1，2，3，4，5，6，7，8，9，1，2，3，4，5，6，7，8，9………

(二) 2×1，2×2，2×3，2×4………

數底爲：2 4 6 8 1 3 5 7 9 2 4 6 8 1 3 5 7 9………

(三) 3×1，3×2，3×3…………

數底爲：3 6 9，3 6 9，3 6 9…………………………………

(四) 4×1，4×2，4×3………………

數底爲：4 8 3 7 2，6 1 5 9，4 8 3 7 2 6 1 5 9………

(五) 5×1，5×2，5×3………………

數底爲：5 1 6 2 7 3 8 4 9，5 1 6 2 7 3 8 4 9…………

(六) 6×1，6×2，6×3………………

數底爲：6 3 9，6 3 9，6 3 9…………………………………

(七) 7×1，7×2，7×3………………

數底爲：7 5 3 1 8 6 4 2 9，7 5 3 1 8 6 4 2 9…………

(八) 8×1，8×2，8×3………………

數底爲：8 7 6 5 4 3 2 1 9 8 7 6 5 4 3 2 1………………

(九) 9×1，9×2，9×3………………

數底爲：9 9 9 9 9…………………………………………

上列之數底數列很明顯的，均爲循環數列，可以得到下列一個表：

〔表四A〕

√	★	⊙	※	※	⊙	★	√	
一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

由此縱表列看：

三、六相類似；一、八相類似；一爲增、八爲減。

二、七相類似；二爲增、七爲減。

四、五相類似；四爲減、五爲增。

說明了每個數的乘法表所得之結果，沒有規律，但至化成數底形態都有一個特定的規律性。

再研究10以下的乘法表發現：

10和1，11和2，12和3，13和4，14和5，15和6，16和7，17和8，18和9，19和1………的數底數列完全相同，我們又可以得到一個表：

〔表五〕

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	
28	29	30	31	32	33	32	33	34	（橫稱行、直稱列）
………									
………									
………									

上表每列有它獨立的特性：

(一)每列中的任一數的數底，其結果必等於其列的第一個數字（1～9）（看例1）。

(二)每列中的任一數做連續乘積的數底，其結果都相同(看例2)。

（例1） 6的那一列

6………………………………6

15………………………………1+5=6

33………………………………3+3=6

114………………………………1+1+4=6

（例2） 7的那一列（25和7同一列）

7：7 5 3 1 8 6 4 2 9，7 5 3 1 8 6 4 2 9…………

25×1 = 25………………………………7

25×2 = 50………………………………5

25×3 = 75………………………………3

25×4 =100………………………………1

25×5 =125………………………………8

25×6 =150………………………………6

25×7 =175………………………………4

25×8 =200………………………………2

25×9 =225………………………………9

並由(1)，我們知道任一被9除，其餘數必等於此數之數底例如：

例如： 32…………………………………… 3 + 2 = 5

32 ÷ 9 = 3 ………………………餘 5

172……… 1 + 7 + 2 = 10……… 1 + 0 = 1

172 ÷ 9 = 19………………………餘 1

我們得到這些數列表和結果很好玩，但是它有沒有什麼用處呢？

有的，它可以推導出一種簡便的乘加驗證法，爲了便於說明我們先看結果，再用上表證明它：

一、加法：

〔例〕

48320…4+8+3+2+0=17…1+7=8

+53412…5+3+4+1+2=15…1+5=6 > 8+6=14…1+4=5

101732…1+0+1+7+3+2=14………………………1+4=5

即是任兩數相加，此二數數底和之數底，必與其原數和之數底相等（見上例）

假如不相等，則此加法必有誤。

〔證明〕

由表五知 48320 是屬於8那一例的，由表我們可以看出它每加（減）9（如48329），仍然屬於8那一例，數底不會有所改變而53412被9除，得5934餘6。由例即是48320加5934次的9外加一次6，由此我們很易知道，只有最後加的那個6會改變它所在列位置（因每加9，列位置不變），即由8往後移6，8 + 6 = 14 …… 1 + 4 = 5即移至5那一列的位置以次兩數(48320和53412)之和之數底等於5，（由表五特性(1)）如此運算結果才爲正確。

由上述的兩數相加，用相同的方法，我們可以推導出許多數相加的驗證，在此不再做證明，僅舉一例：

			9
4 8 3 2 1	……4+8+3+2+1=18……	1 + 8 = 9	6
6 5 7 0 6	……6+5+7+0+6=24……	2 + 4 = 6	6
4 3 2 7 8	……4+3+2+7+8=24……	2 + 4 = 6	4
9 5 4 3 1	……9+5+4+3+1=22……	2 + 2 = 4	2
6 7 2 5 0	……6+7+2+5+0=20……	2 + 0 = 2	+ 9
			36
			3
+ 4 3 8 2 1	……4+3+8+2+1=18……	1 + 8 = 9	+ 6
3 6 3 8 0 7	……3+6+3+8+0+7=27……	2+7= 9	9

各數數底和之數底爲 9，原數數底和亦爲 9，故此運算無誤。綜合上述，可得一結論：

任意數相加，各數數底和之數底，必等於原數和之數底。

二、乘法：

〔例〕

$$\begin{array}{rl} 3567 & \cdots 3+5+6+7=21\cdots 2+1=3 \\ \times\quad 358 & \cdots\cdots\ 3+5+8=16\cdots 1+6=7 \\ \hline 28136 & \\ 17835\ \ & \\ 10701\quad\ & \\ \hline 127696 & \cdots 1+2+7+6+9+8+6=39\cdots 3+9=12\cdots 1+2=3 \end{array} \quad 3\times 7=21\cdots 2+1=3$$

由上例，任兩數相乘，所得積之數底，必等於二數數底相乘積之數底假如不等，則此乘法必然有誤：

〔證明〕

(1)首先我們要知道任一數乘9，則所得數之數底必爲9(由表四(9))由此可知，所得之數亦必在的那一列。（表五）

(2)再看358被 9 除得39餘 7（即358＝ 9 ×39＋ 7 ）則3567×358＝（3567×9）×39＋3567×7
3567×9×39有9爲因素，由(1)及表四和表五知 3567×9×39必在 9 那一列（表五）。

(3)目前尚有3567× 7 來決定積之位置，即是3567× 9 ×39連續加 7 次3567，而每加3567，它實際的位移僅有3(因3567被 9 除得396餘3)所以3567×7之影響，即爲從表五，9那一列往後移7次 3，即 3 × 7 ＝21，移21次，再用 9 除21，很明顯的，我們得到眞正從 9 後移動只有 3，即是所得積之數底，必應等於 3 。

由上例反證明，亦可用同樣的方法推導出許多數相乘的驗證，在此不再證明，僅舉一例：

$$\begin{array}{ccccccccc} 48 & \times & 32 & \times & 65 & \times & 72 & \times & 113 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{\begin{array}{l}4+8=12\\1+2=3\end{array}} & & \boxed{3+2=5} & & \boxed{\begin{array}{l}6+5=11\\1+1=2\end{array}} & & \boxed{7+2=9} & & \boxed{1+1+3=5} \end{array}$$

＝812298240………8＋1＋2＋2＋9＋8＋2＋4＋0＝36
3＋6＝ 9

3 × 5 × 2 × 9 × 5 ＝1350……………1＋3＋5＋0＝ 9

原積數底爲 9，各數底相乘積之數底亦爲 9，故此運算無誤由上述，綜合乘法得一結論：

任意數相乘，所得積之數底必與各數數底相乘積之數底相等