中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：骰子與棋盤

關鍵詞：路徑、落單、最大最小值

編號：030411

學校名稱：

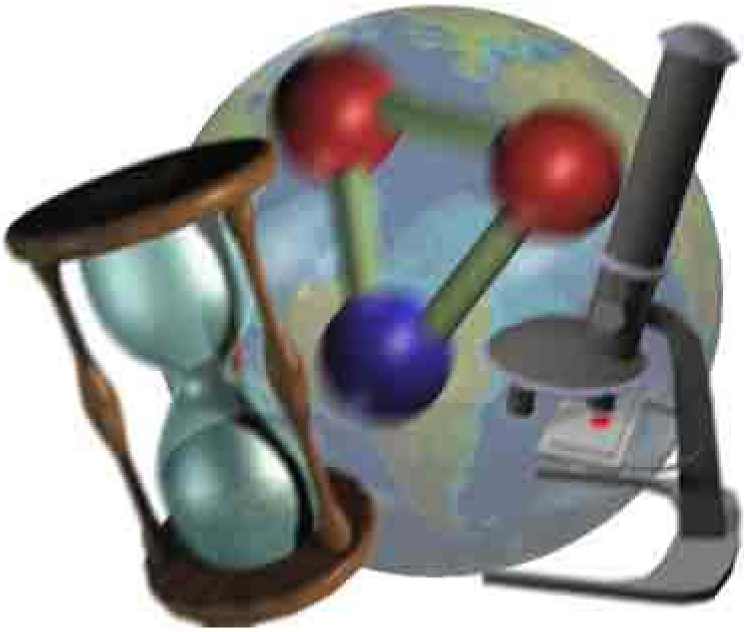
國立台灣師範大學附屬高級中學

作者姓名：

黃上恩、翁鈺博

指導老師：

杜威仕、鄭靜梅



摘要

在一個 $m \times n$ 的方格棋盤中，用手將一顆邊長與棋盤一小格邊長相同的正立方體骰子，從棋盤左下角以骰子的一條稜為軸，沿著棋盤向右或向上翻入相鄰方格而滾動到棋盤的右上角。在每一次操作過程中，把骰子和棋盤接合那面的點數記錄下來並算其總和，求這些操作所得總和的最大值及最小值，並探討當發生最大值或最小值時，骰子位於起點的最初擺放面向為何。

壹、研究動機

在我們準備國中盃數學能力競賽時，無意間看到八十九年建國中學主辦的國中盃數學能力競賽中有關滾骰子的問題(第一次口試的第二題)，當時我們覺得這個題目很有趣，但經過驗算後我們發現建國中學所提供的標準答案的數值雖然正確，但解題過程卻『怪怪的』（詳見「玖、參考資料及其他」），於是興起想找出更為合理解答之念，試著將其推廣到更為一般化的情形(方格棋盤大小為 $m \times n$，m、n 為任意自然數)，並再進一步探討骰子初始面向的問題。

貳、研究目的

一、當棋盤大小為 40×40 時，計算操作所得總和的最大、最小值及骰子初始面向；

二、當棋盤大小為 $m \times n$ 時，$m, n \in N$，計算操作所得總和的最大、最小值及骰子初始面向；

三、研究在 m 及 n 皆大於某數時，是否不論骰子的初始面向為何，一定可以找到一個路徑使得總和為最大、最小值？

四、撰寫電腦程式以方便驗算及演示；

參、研究設備器材

一、紙：計算及列印資料用；

二、筆：計算及用來記錄研究資料；

三、電腦：

(一)把研究資料儲存到電腦裡並印出研究報告；

(二)用 GSP 動態幾何軟體繪製圖片；

(三)用 Visual Basic 撰寫程式，用以模擬骰子滾動的情況。

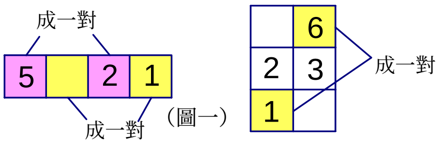
肆、研究過程或方法

一、研究想法

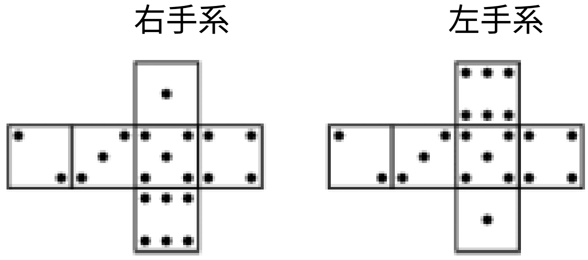
首先我們對 1×1、1×2、…、1×10、2×1、2×2、2×3、…、10×10 的方格棋盤，按

照遊戲規則，用真正的骰子來實際操作，把所有可能路徑都走過一次（註：本文所謂之路徑均指最短路徑），並算出所有可能路徑出現點數總和的最大、最小值，接著再從這些數值中來尋找規律，加以分析並找出符合之公式。

在實際操作的過程中，我們發現骰子作直線滾動時，在路徑上的任何一個格子其相鄰的左右格子上的點數和都為 7，若骰子滾動的路徑有轉彎時，轉彎處兩旁方格上的點數和也是 7。為了方便起見，不妨將兩個方格的和為 7 的那兩格，稱它們為『一對』（如圖一），不成一對者則稱之為『落單』的格子。首先，我們須注意的一個自然存在的現象是骰子上相對的兩面其數字之和都是 7，分別是(1，6)、(2，5)和(3，4) 三對。



（圖一）



（圖二）

（圖二：右手系和左手系的骰子的展開圖的相異之處）

性質一：骰子滾動的過程中至多有三個落單的格子。

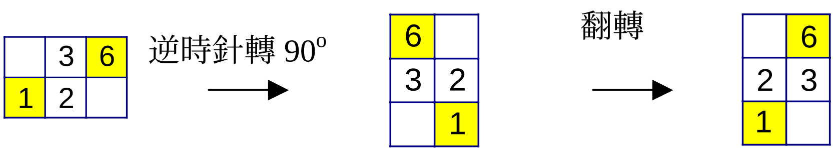
事實上，在骰子滾動的過程中，不可能有多於三個以上的格子沒能湊成一對的，因為滾骰子時不可以走回頭路（只能像上或向右），在滾三格之內不可以有重複的點數（骰子至少要滾動一圈後才能再度出現相同的點數）。且若出現四個落單的格子，必定有四個不相同的對，根據鴿籠原理，產生矛盾。

性質二：使用左手系及右手系的骰子效果一樣。

事實上，將左手系骰子滾動的路徑對棋盤的對角線做鏡像會同等於右手系骰子滾動的路徑，即路徑上的點數相同，故我們可以略去左手系的情況只考慮右手系的情況（之後本文所有骰子的討論一律使用右手系的骰子）。

性質三：路徑經過翻轉或旋轉點數總和不變。

就如圖三所示，無論棋盤經過翻轉或旋轉，棋盤上點數的相對位置都未改變，因此路徑經過翻轉或旋轉可以得到相同的總和（註：路徑經翻轉後，可視為路徑對棋盤的對角線做鏡像或骰子之手系改變）。

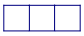
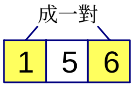


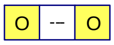
（圖三：路徑經過翻轉和旋轉後的總和相同）

我們研究此問題時所採用的解題策略是先從『落單』的格子開始填寫最大值或最小值，接著再按照所走路徑推論出所有格子的點數，最後再以骰子實際走過一次。

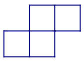
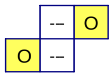
二、研究過程

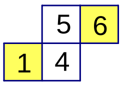
（一）可出現一對以上的情形如下：

1. 骰子沿直線滾動三格  ：由於骰子是沿著一直線滾動，兩端的格子會成一對，如：

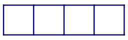
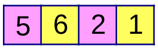
我們用記號 

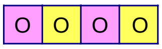
表示，其中「O」代表「已經和另一格相互配成一對」，記號「—」代表「並未與其它格子配成一對，也就是落單的格子」，所以總和一定為 7＋x，其中 x 為中間格子之點數。

2. 骰子滾動路徑為  ：由於兩側的格子恆會呈現一對，用記號表示：

如 

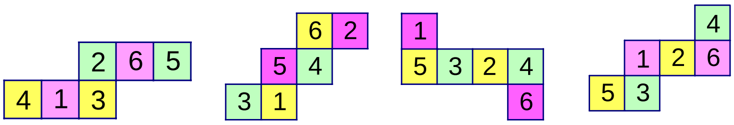
，其總和為 $7+x_1+x_2$，其中 $x_1 \neq x_2$， $x_1+x_2 \neq 7$， $x_1, x_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (即 x_1, x_2 是從剩下兩對中各取的一個數)。

3. 骰子沿直線滾動四格  ：由於骰子沿直線滾動四格，恰好繞一圈，共可配出兩對，如 

，用記號 

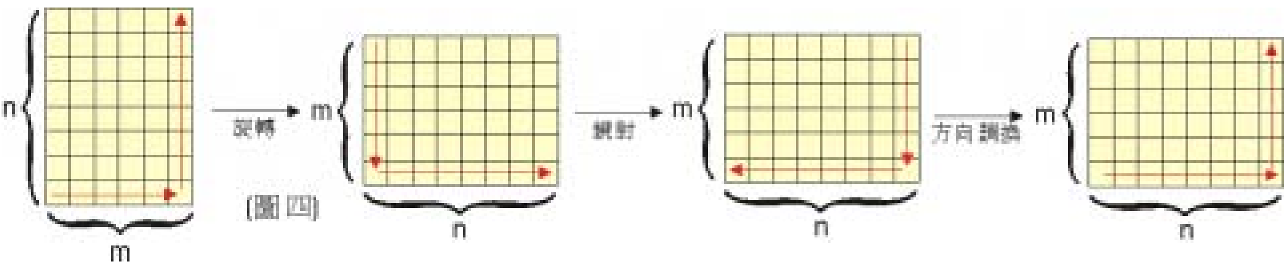
表示，所以總和必為 14。

4. 此外，所有猶如正立方體展開圖的路徑都可配成為三對，所以總和皆為 21：



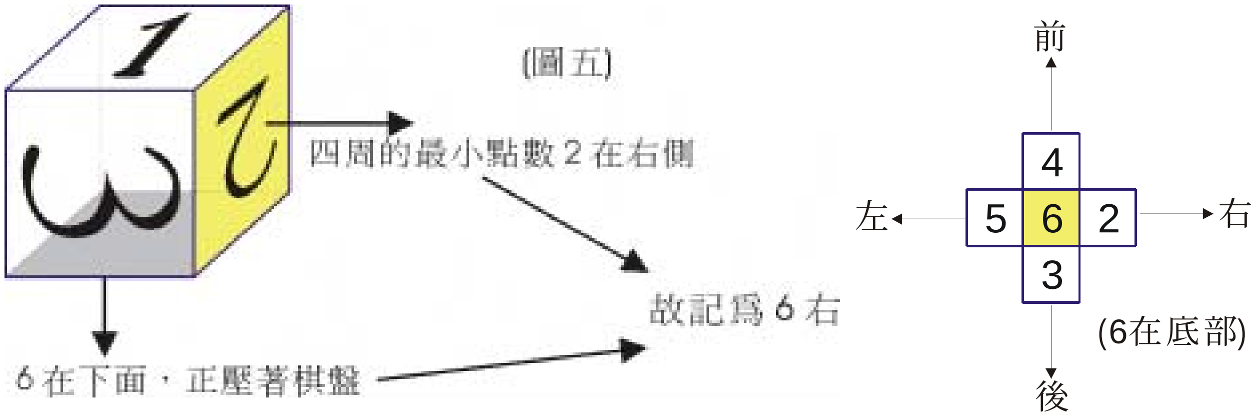
……等等。

（二）由於圖形經過旋轉、翻轉後骰子滾動路徑上的點數總和仍不變，且成對的格子相對位置也不變，所以棋盤大小為 $m \times n$ 時的點數總和最大值等於 $n \times m$ 時的最大值(如圖四)。(因為 $m \times n$ 的情況與 $n \times m$ 的情況相同，不失一般性，我們可以只考慮 $n \geq m$ 時的情況)



(圖四)

（三）為有效描述骰子的滾動及初始面向問題，我們定義：記號「x 右(或左、前、後)」中的 x 代表最初在棋盤左下角格子上骰子底面的數字，「右」、「左」、「前」或「後」則表示骰子四周(非底面)最小點數的面向。（如圖五）



（四）$1\times n$ 的情形：由於骰子是直線滾動沒有轉彎的餘地，只能往右滾。(詳細操作及說明請見附錄(一))

1. 由於骰子印在棋盤上的數字成一列時，骰子每滾四格它的點數重複一次，所以可以看得出它的規律。
   (1)當 $n=4k$，骰子滾了 k 圈，最大值或最小值都是 $14k$，初始面向則不限；
   (2)當 $n=4k+1$，骰子滾了 k 圈又一格，此格與第一格數字相同，最大值為 $14k+6$，初始面向為「6 任意」，最小值為 $14k+1$，初始面向為「1 任意」；
   (3)當 $n=4k+2$，骰子滾了 k 圈又兩格，我們可以把這兩格取最大值 6、5、最小值 1、2。所以最大值為 $14k+11$，初始面向為「6 左」或「5 左」；最小值為 $14k+3$，初始面向為「1 右」或「2 右」；
   (4)當 $n=4k+3$ 時，骰子滾了 k 圈又三格，倒數第二格為落單，故最大值為 $14k+13$，骰子的面向可以是「2 左」、「3 左」、「4 左」、「5 左」(不可以是 1 或 6)，最小值為 $14k+8$，骰子的面向可以是「5 右」、「4 右」、「3 右」、「2 右」。
2. 我們發現：**當 $m=1$ 的時候最大值的初始面向與最小值的初始面向恰恰相反：數字之和為 7，面向剛好相反**(左變右，右變左)。

（五）$2\times n$ 的情形：(詳細操作及說明請見附錄(二))

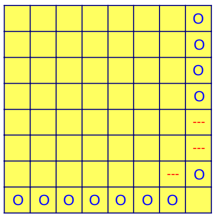
1. 當 $n=4k$ 時，路徑總格數為 $4k+1$ 格，一定只有一個落單，故最大值 $14k+6$，初始面向「2 後」、「3 後」、「4 後」、「5 後」、「2 左」、「3 左」、「4 左」、「5 左」、「6 任意」；最小值 $14k+1$，初始面向「5 前」、「4 前」、「3 前」、「2 前」、「5 右」、「3 右」、「4 右」、「2 右」、「1 任意」；
2. 當 $n=4k+1$ 時，可以找出有二格落單的路徑，故最大值 $14k+11$，初始面向「6 後」、「5 後」、「6 左」或「5 左」；最小值 $14k+3$，初始面向「1 前」、「2 前」、「1 右」或「2 右」；
3. 當 $n=4k+2$ 時，可以找出有二格落單的路徑，最大值 $14k+15$，初始面向「6 後」、「5 左」、「4 後」；最小值 $14k+6$，初始面向「1 右」、「2 前」、「3 右」；
4. 當 $n=4k+3$ 時，可以找出有二格落單的路徑，所以最大值 $14k+11$，初始面向「6 左」、「5 左」、「4 後」或「3 左」；最小值 $14k+3$，初始面向「1 右」、「2 右」、「3

右」或「4 前」。

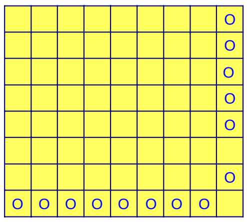
（六）$3\times n$、$4\times n$、$5\times n$、$6\times n$、$7\times n$ 的詳細操作及說明請見附錄(三)　(七)。

（七）$8\times n$ 的情形：

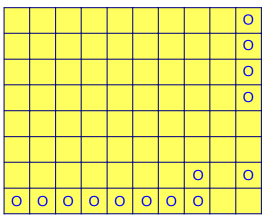
1. 8×8 的情況：路徑總格數為 8＋8－1＝15 格，由於可以找出三格落單的路徑，取最大值 6、5、4，最小值 1、2、3。又至少有 6 對，所以總和的最大值為 42＋15＝57，最小值 42＋6＝48。有三格落單的路徑有很多條。

   例如：此圖的路徑有三格落單，總和為最大值時骰子初始面向可以是「6 後」、「4 後」、「5 左」；最小值時骰子初始面向可以是「1 右」、「3 右」、「2 前」。

2. 8×9 的情況：路徑總格數為 8＋9－1＝16 格，由於可以找出二格落單的路徑，取最大值 6、5，最小值 1、2。又至少有 7 對，所以總和的最大值為 49＋11＝60，最小值 49＋3＝52。

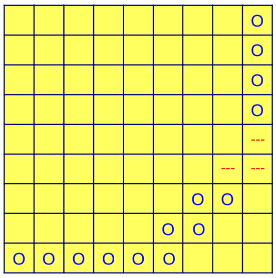
   例如：此圖的路徑有二格落單，總和為最大值的時候骰子初始面向可以是「4 後」、「3 左」；最小值時骰子初始面向可以是「4 前」、「3 右」。

3. 8×10 的情況：路徑總格數為 8＋10－1＝17 格，由於可以找出二格落單的路徑，取最大值 6、5、4，最小值 1、2、3。又至少有 7 對，所以總和的最大值為 49＋15＝64，最小值 49＋6＝55。

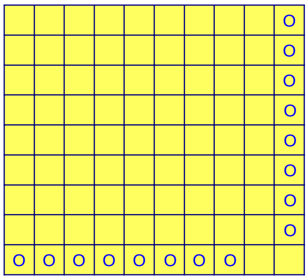
   例如：此圖的路徑有三格落單，總和為最大值的時候骰子初始面向可以是「6 後」、「4 後」、「5 左」；最小值時骰子初始面向可以是「1 右」、「3 右」、「2 前」。

（八）九列　：$9\times n$

1. 9×9 的情況：路徑總格數為 9＋9－1＝17 格，由於可以找出二格落單的路徑，取最大值 6、5、4，最小值 1、2、3。又至少有 7 對，所以總和的最大值為 49＋15＝64，最小值 49＋6＝55。

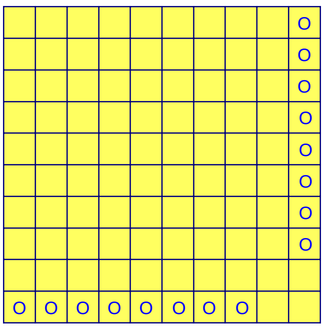
例如：此圖的路徑有三格落單，總和為最大值的時候骰子初始面向可以是「6 後」、「4 後」、「5 左」；最小值時骰子初始面向可以是「1 右」、「3 右」、「2 前」。

2. 9×10 的情況：路徑總格數為 9＋10－1＝18 格，由於可以找出二格落單的路徑，取最大值 6、5，最小值 1、2。又至少有 8 對，所以總和的最大值為 56＋11＝67，最小值 56＋3＝59。

例如：此圖的路徑有二格落單，總和為最大值的時候骰子初始面向可以是「6 左」、「5 左」；最小值骰子初始面向可以「1 右」、「2 右」。

（九）十列　：10×n 的情形

1. 10×10 的情況：路徑總格數為 10＋10－1＝19 格，由於可以找出三格落單的情形，取最大值 6、5、4，最小值 1、2、3。又至少有 8 對，故總和的最大值為 56＋15＝71，最小值 56＋6＝62。

例如：此圖的路徑有三格落單，總和為最大值時骰子初始面向可以是「6 後」、「4 後」、「5 左」；最小值時骰子初始面向可以是「1 右」、「3 右」、「2 前」。

伍、研究結果

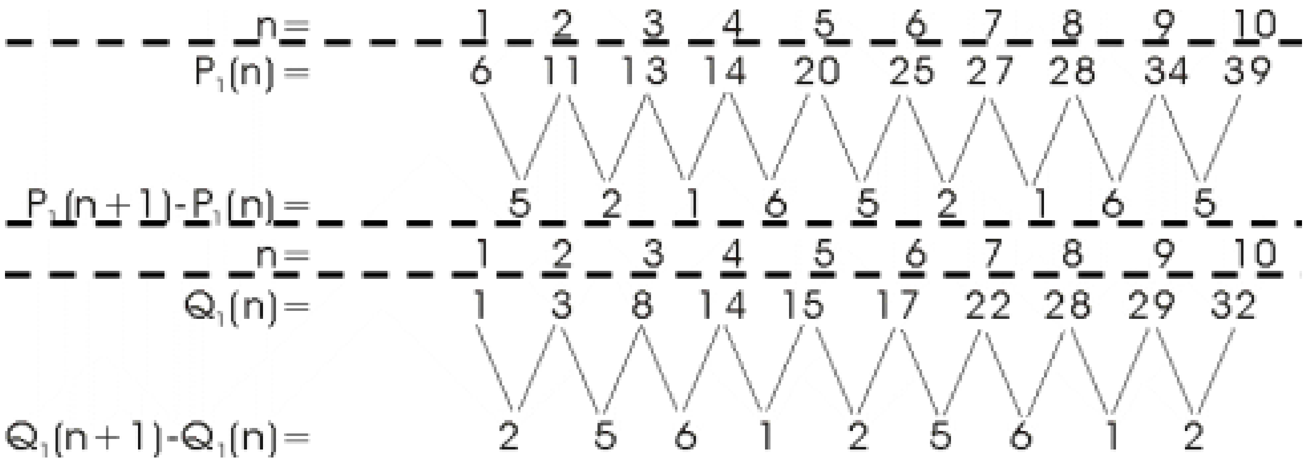
一、由於骰子在點數 6 的對面是點數 1，點數 5 的對面是點數 2，點數 4 的對面是點數 3，根據對偶原理，落單處的總和最小值＋落單處的總和最大值＝落單的格子數×7。舉例：若有二格落單，則落單處的最小值為 1＋2，落單處的最大值為 6＋5，落單處的總和最小值＋落單處的總和最大值＝1＋2＋6＋5＝2×7＝落單的格子數×7。

二、為了使骰子所經過之路徑得到最大值或最小值，應讓滾動之路徑造成較多個的落單，如此在落單處填入最大或最小數字即可。有一個落單數時填 6 或 1，兩個落單數時填 6、5 或 1、2，有三格落單數時填 6、5、4 或 1、2、3。

三、m 和 n 分別是 10 以下時各種情況所得出的最大值/最小值：

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6/1	11/3	13/8	14/14	20/15	25/17	27/22	28/28	34/29	39/31
2		15/6	18/10	20/15	25/17	29/20	32/24	34/29	39/31	43/34
3			20/15	25/17	29/20	32/24	36/27	39/31	43/34	46/38
4				29/20	32/24	36/27	39/31	43/34	46/38	50/41
5					36/27	39/31	43/34	46/38	50/41	53/45
6						43/34	46/38	50/41	53/45	57/48
7							50/41	53/45	57/48	60/52
8								57/48	60/52	64/55
9									64/55	67/59
10										71/62

四、$1\times n$ 的情形：我們以 $P_1(n)$表示最大值，以 $Q_1(n)$表示最小值，可得到下表：



（一）仔細分析上表我們發現：

1.$P_1(n+1) - P_1(n)$ 依照 5,2,1,6,5,2,1,6,…之規律循環，所以我們可以知道：

(1) $P_1(4k-2) - P_1(4k-3) = 5$ （k 為任意自然數)

(2) $P_1(4k-1) - P_1(4k-2) = 2$

(3) $P_1(4k) - P_1(4k-1) = 1$

(4) $P_1(4k+1) - P_1(4k) = 6$

2. $Q_1(n+1)- Q_1(n)$ 依照 2,5,6,1,2,5,6,1,…之規律循環，所以我們可以知道：

(1) $Q_1(4k-2) - Q_1(4k-3) = 2$ (k 為任意自然數)

(2) $Q_1(4k-1) - Q_1(4k-2) = 5$

(3) $Q_1(4k) - Q_1(4k-1) = 6$

(4) $Q_1(4k+1) - Q_1(4k) = 1$

3. $P_1(n) + Q_1(n) = 7n$

4. $[P_1(n+1) - P_1(n)]+[Q_1(n+1)- Q_1(n)]=7$

（二）接著我們利用上述四點來找出 $P_1(n)$和 $Q_1(n)$的公式。由於 $P_1(n+1) - P_1(n)$ 及 $Q_1(n+1)- Q_1(n)$ 的值每四個重複一次，所以分 $n=4k$、$n=4k+1$、$n=4k+2$、$n=4k+3$ 的情況討論。

1.$n=4k$：因為骰子正好滾 k 圈，總和必為 $14k$，所以 $P_1(n)=Q_1(n)=14k$ （或 $P_1(n)=Q_1(n)=\frac{7}{2}n$），初始面向不限。

2.$n=4k+1$：骰子滾了 k 圈又一格，令這一格為最大值 6 或最小值 1，故 $P_1(n)=14k+6$ （或 $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+6$），$Q_1(n)=14k+1$ （或 $Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+1$），最大值的初始面向為「6 任意」，最小值的初始面向為「1 任意」。

3.$n=4k+2$：骰子滾了 k 圈又兩格，令這兩格為最大值 6、5 或最小值 1、2，故 $P_1(n)=14k+11$(或 $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-2)+11$)，$Q_1(n)=14k+3$ （或 $Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-2)+3$），最大值的初始面向為「6 左」或「5 左」，最小值的初始面向為「1 右」或「2 右」。

4.$n=4k+3$：骰子滾了 k 圈又三格，第一、三格配成一對，令第二格為最大值 6 或最小值 1，故 $P_1(n)=14k+13$(或 $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-3)+7+6=\frac{7}{2}(n-1)+6$)，$Q_1(n)=14k+8$ （或 $Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-3)+7+1=\frac{7}{2}(n-1)+1$），最大值的初始面向一定是「2 左」、「3 左」、「4 左」、「5 左」，最小值的初始面向一定是「5 右」、「4 右」、「3 右」、「2 右」。

五、$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$、$5\times n$ 的情形的詳細分析及說明請見附錄(八) (十一)。

六、對於 $m\times n$ 其中 $m>5, n>5$ 的情形，最大值 $P_m(n)$ 與最小值 $Q_m(n)$ 都有以下規律：

（一） $P_m(n+1) - P_m(n)$

1. 當 m，n 皆為奇數時，差為 3；
2. 當 m 為奇數，n 為偶數時，差為 4；
3. 當 m 為偶數，n 為奇數時，差為 4；
4. 當 m，n 皆為偶數時，差為 3。

（二） $Q_m(n+1) - Q_m(n)$

1. 當 m，n 皆為奇數時，差為 4；
2. 當 m 為奇數，n 為偶數時，差為 3；

3. 當 m 為偶數，n 為奇數時，差為 3；

4. 當 m，n 皆為偶數時，差為 4。

（三）由於路徑總共有 $n+m-1$ 格

1.當 m，n 皆為奇數時，路徑有奇數格，取落單數為 3，故成對數有 $\frac{n+m-4}{2}$ 對

2.當 m 為奇數，n 為偶數時，路徑有偶數格，取落單數為 2，故成對數有 $\frac{n+m-3}{2}$ 對

3.當 m 為偶數，n 為奇數時，路徑有偶數格，取落單數為 2，故成對數有 $\frac{n+m-3}{2}$ 對

4.當 m，n 皆為偶數時，路徑有奇數格，取落單數為 3，故成對數有 $\frac{n+m-4}{2}$ 對。

（四）綜合以上三點：

1. 當 m，n 皆為奇數時：

(1)最大值 $P_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-4)+15=\frac{7}{2}(n+m)+1$

(2)最小值 $Q_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-4)+6=\frac{7}{2}(n+m)-8$

2. 當 m 為奇數，n 為偶數時：

(3)最大值 $P_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-3)+11=\frac{7}{2}(n+m-1)+4$

(4)最小值 $Q_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-3)+3=\frac{7}{2}(n+m-1)-4$

3. 當 m 為偶數，n 為奇數時：

(5)最大值 $P_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-3)+11=\frac{7}{2}(n+m-1)+4$

(6)最小值 $Q_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-3)+3=\frac{7}{2}(n+m-1)-4$

5. 4.當 m，n 皆為偶數時：

(1)最大值 $P_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-4)+15=\frac{7}{2}(n+m)+1$

(2)最小值 $Q_m(n)=\frac{7}{2}(n+m-4)+6=\frac{7}{2}(n+m)-8$

（五）我們發現：在 $m\times n$ 的棋盤上造成最大值和最小值的初始面向之間有對應情形：

1.二格落單的情況：

(3)當 x 為 1,2,5,6 時，若最大值的初始面向為「x 前」、「x 後」、「x 左」或「x 右」則最小值對應的初始面向分別為「7－x 後」、「7－x 前」、「7－x 右」或「7－x 左」。

(4)當 x 為 3,4 時，若最大值的初始面向為「x 前」、「x 後」、「x 左」、「x 右」則最小值對應的初始面向分別為「x 後」、「x 前」、「x 右」、「x 左」。

2.三格落單的情況：

若最大值的初始面向為「x 前」、「a 後」、「b 左」、「c 右」則最小值對應的初始面向分別為「7－x 左」、「7－a 右」、「7－b 前」、「7－c 後」。

陸、討論

一、我們發現路徑格數為奇數時，落單最多只能是三個，路徑格數為偶數時，落單的格子最多只能是兩個。因為骰子最多只有三對，而且每次選取一對時其它的格子數奇偶性不變，所以落單的格子數可以是 1 個或 3 個，0 個或 2 個等兩種情況，而落單的數越多，總和越大或越小。推測：若 n 和 m 夠大，當 $n+m-1=4k+1$ 或 $4k+3$ 時，我們可以設法找出三格落單的路徑，如此即可找出最大或最小值的路徑。反之，當 $n+m-1=4k$ 或 $4k+2$ 時，我們也可以找出兩個落單的路徑，就可以找出最大或最小值的路徑了。

二、$1\times n$ 的情形：因為 $P_1(4k+3)-P_1(4k+1)=P_1(4k+5)-P_1(4k+3)=7$ 所以 $P_1(4k+1)$ 和 $P_1(4k+3)$ 公式相同，但是 $P_1(4k+2)-P_1(4k)\neq P_1(4k+4)-P_1(4k+2)$ 前者為 11，後者為 3，所以公式不相同。$2\times n$ 的情況也是如此。

三、m、n 皆 ≥ 3 的情況：總結上述的研究結果，我們發現無論當 m、n 分別為奇數或偶數，$P_m(n)$ 和 $Q_m(n)$ 的計算公式非常類似，我們可以用以下的公式表示它們：

$m\times n$ 且 $m\leq n$ 時，$P_m(n)=\dfrac{n+x}{2}\times 7+y_1$，$Q_m(n)=\dfrac{n+x}{2}\times 7+y_2$，其中

數值 / (m、n)奇偶性	x	y_1	y_2
(奇數,奇數)	m	1	－8
(奇數,偶數)	$m-1$	4	－4
(偶數,奇數)	$m-1$	4	－4
(偶數,偶數)	m	1	－8

四、由於要利用上述公式計算最大值或最小值時，首先要判定 x 和 y 的值，需要逐一對照表格找出合適的值代入，似乎有點麻煩。所以我們就想了一個辦法把 x、y 簡化：

令 $x=m+\dfrac{(-1)^{m+n}-1}{2}$；$y_1=\dfrac{5-3\times(-1)^{m+n}}{2}$；$y_2=-6-2\times(-1)^{m+n}$，所以我們可把簡化的公式代入，得到以下定理：

〔定理一〕：在一個 $m\times n$ 的方格棋盤中，其中 $m,n\geq 3$ 用手將一顆骰子，從棋盤左下角沿著棋盤向右或向上翻入相鄰方格而滾動到棋盤的右上角。把這顆骰子和棋盤接合那面的點數記錄下來算其總和，令 P_1(n)和 Q_1(n)分別表示其最大值和最小值則

$$P_m(n)=\frac{7}{2}\left(n+m+\frac{(-1)^{m+n}-1}{2}\right)+\frac{5-3\times(-1)^{m+n}}{2}$$

$$Q_m(n)=\frac{7}{2}\left(n+m+\frac{(-1)^{m+n}-1}{2}\right)-6-2(-1)^{m+n}\qquad (m,n\geq 3)$$

五、最後有關骰子的初始面向的研究結果我們有以下兩個定理

〔定理二〕：如定理一的條件下，在骰子滾動的過程中，若骰子出現點數 x，則到下一次再出現點數 x 之間必定要先出現點數 7-x。

< 證明 >

由於在滾動過程中，骰子只能往上或往右走，若一點數 x 在目前骰子面向的左面或後面，而想要再經由滾動出現點數 x，則因為骰子只能往右或往上走，所以再滾骰子的時候必須要使點數 x 經過上面，而這時骰子所印在棋盤上的點數為 7-x，所以不可能會有兩個相同的點數的格子落單。又骰子成對的數只有三組，故最多只能有三個落單，也可以證明不可能在不經過 7-x 的格子下連續出現兩個 x。

〔定理三〕：如定理一的條件下，不管骰子的初始面向如何，不一定可以找到產生最大或最小值的路徑。

是否有可能在 m、n 大於某特定的自然數以後，無論一開始骰子如何安放，均可找到產生最大或最小值的路徑？經我們利用暑假期間進一步研究，發現答案是否定的。原因是：造成最大總和的許多路徑中，骰子的初始面向不可能是「1 任意」或「2 任意」，因為第一格已經是 1 或 2，如果要造成點數 6 或 5 的格子落單的話必須要造成連續兩個 6 或 5，而前一段已經證明不可能連續出現兩個 6 或 5，所以不可能造成點數 6 或 5 的格子落單。以此類推，骰子的初始面向也不可能是「3 前」、「3 後」、「3 右」、「4 左」、「4 右」、「4 前」、「5 右」、「5 前」、「6 右」、「6 前」上述這些初始面向的前面或右面皆有 1 或 2，不可能造成最大值，因此不可能是造成總和最大的初始面向。而造成總和最小的許多路徑中骰子的初始面向也不可能是「5 任意」、「6 任意」、「3 前」、「3 後」、「3 左」、「4 後」、「4 左」、「4 右」、「2 左」、「2 後」、「1 左」、「1 後」，上述這些初始面向的前面或右面皆有 6 或 5，不可能造成最小值，因此不可能是造成總和最小的初始面向。

六、可進一步研究之問題：

（一）若棋盤上有某些格子被阻礙無法使骰子滾過去，是否可以求得極值的規律？

（二）若有兩顆骰子綁在一起滾，是否可以求得一些極值的規律？

（三）如果骰子為一個正四面體且棋盤為平行四邊形，是否也可以求得極值的規律？

由於時間過於短暫，因此目前只探討一顆骰子的情況，其它問題留待以後探討。

柒、結論

一、棋盤大小為 $1\times n$ 時：

（一）$n=4k$： $P_1(n)=Q_1(n)=\frac{7}{2}n$

（二）$n=4k+1$： $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+6$， $Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+1$

（三）$n=4k+2$： $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-2)+11$， $Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-2)+3$

（四）$n=4k+3$： $P_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+6$， $Q_1(n)=\frac{7}{2}(n-1)+1$

二、棋盤大小為 $2\times n$ 時：

（一）$n=4k$： $P_2(n)=\frac{7}{2}n+6$， $Q_2(n)=\frac{7}{2}n+1$

（二）$n=4k+1$： $P_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+11$， $Q_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+3$

（三）$n=4k+2$： $P_2(n)=\frac{7}{2}(n-2)+15$， $Q_2(n)=\frac{7}{2}(n-2)+6$

（四）$n=4k+3$： $P_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+11$， $Q_2(n)=\frac{7}{2}(n-1)+3$

三、定理一：在一個 $m\times n$ 的方格棋盤中，其中 $m,n\geq 3$ 用手將一顆骰子，從棋盤左下角沿著棋盤向右或向上翻入相鄰方格而滾動到棋盤的右上角。把這顆骰子和棋盤接合那面的點數記錄下來算其總和，令 P_1(n)和 Q_1(n)分別表示其最大值和最小值

則：

$$P_m(n)=\frac{7}{2}\left(n+m+\frac{(-1)^{m+n}-1}{2}\right)+\frac{5-3\times(-1)^{m+n}}{2}$$

$$Q_m(n)=\frac{7}{2}\left(n+m+\frac{(-1)^{m+n}-1}{2}\right)-6-2(-1)^{m+n}$$

四、定理二：如定理一的條件下，在骰子滾動的過程中，若骰子出現點數 x，則到下一次再出現點數 x 之間必定要先出現點數 7-x。

五、定理三：如定理一的條件下，不管骰子的初始面向如何，不一定可以找到產生最大或最小值的路徑。

捌、參考資料及其他

一、八十九年國中盃數學競賽第一次口試第二題試題：將一個正方體的六面邊上 1、2、3、4、5、6 等號碼（如同骰子），相對兩面數字和都是 7。有一 40×40 方格棋盤，格子的大小與前述正方體的每個面的大小相同。現將正方體置於棋盤的左下角，開始向右上角滾動，每一次滾動都以正方體的一條稜為軸向右或向上翻入相鄰方格（不可向左或向下）。在正方體翻動的過程中，每經過一個方格，便將正方體與該方格重合面上的數字印在方格上。試問：在滾完全程後，含左下角及右上角，所有印在格子上的數字和最多是多少？最少是多少？

二、建國中學提供之解答：本題立方體自左下向右上角滾動所印出的數字和與第一個位置有關而與路徑無關*__(錯誤)__*。40×40 的方格棋盤，正方體可以印出 79 個數字，為方便起見，可以選擇由左下角一直滾到右下角，再由右下角滾到右上角的路徑*__(錯誤！此種滾法只能得到 1 個落單的格子)__*。設第一個為 x 則由左下角到右下角的點數依序為

$$x \longrightarrow y \longrightarrow (7-x) \longrightarrow (7-y) \longrightarrow x \longrightarrow \ldots \longrightarrow (7-y)$$

再由左下角向上滾點數依序為：

$$\longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow 7-z \longrightarrow 7-y \longrightarrow z \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow 7-z$$

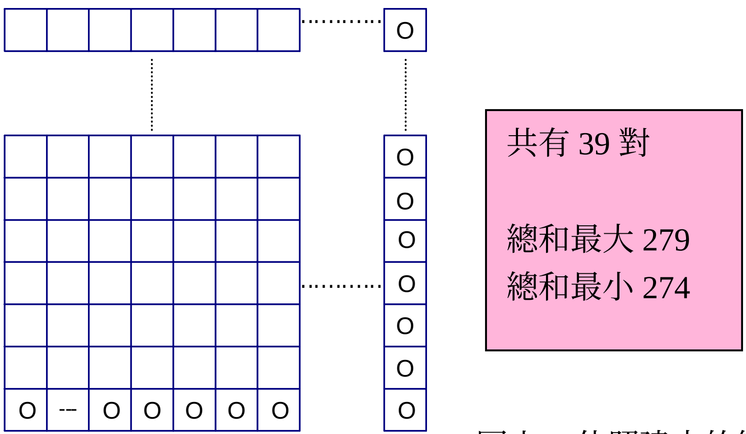
其中有 38 對 a, 7－a 的組合（a＝x , y , z）

所以總和為 38×（7－a＋a）＋x＋y＋z

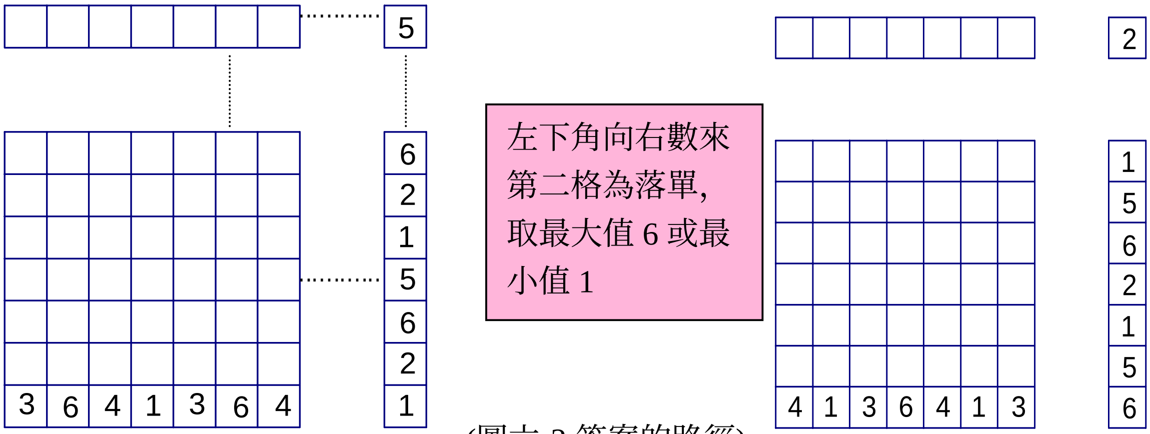
（其中 a＝x , y , z)故其最大值為 38×7＋4＋5＋6＝281 最小值為 38×7＋1＋2＋3＝272

建國中學提供之解答不合理之處在於：

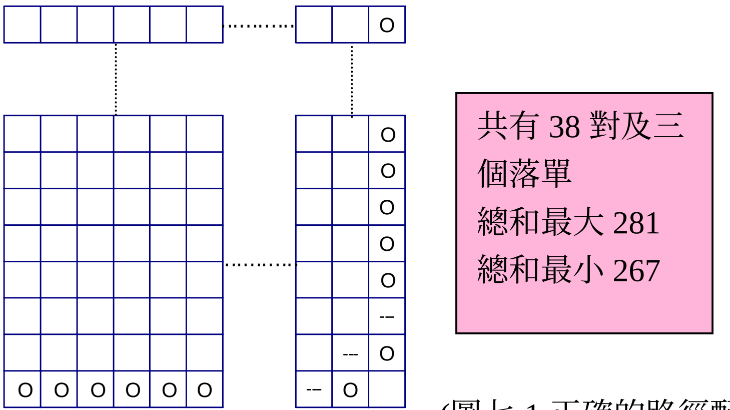
自左下角向右上角滾動所印出的數字和與第一個位置有關而與路徑「也有關」，如建中提供的例子, 照這樣算下去應該只有一個數字落單(共有 39 對, 最大值 279, 最小值 274), 根據研究結果，有三個數字落單時才有最大值和最小值(如建中給的解答)。我們利用下圖來證明：



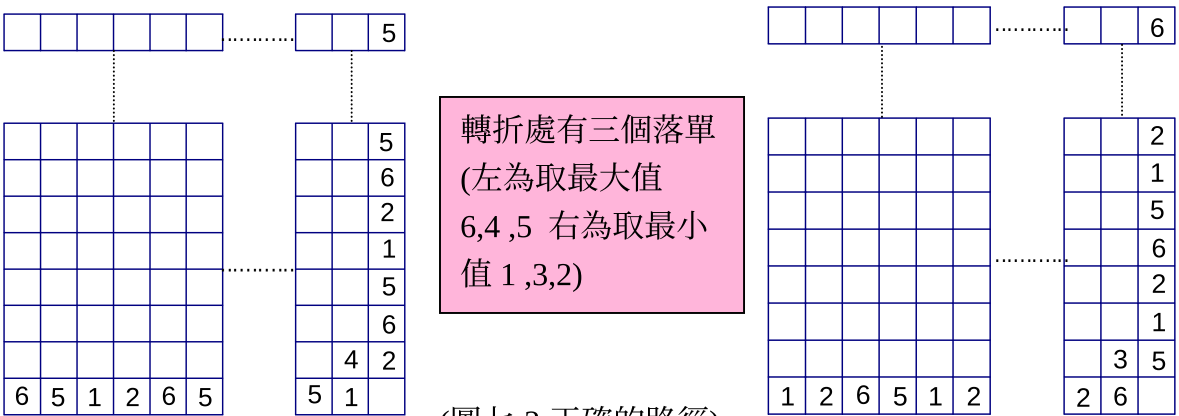
(圖六-1:依照建中的答案給的路徑進行配對後的結果)



(圖六-2:答案的路徑)



(圖七-1:正確的路徑配對後的結果)



(圖七-2:正確的路徑)

三、參考書籍：

（一）國立編譯館(民 89), 國民中學數學科教科書一下, 國立編譯館出版
（二）國立編譯館(民 89), 國民中學數學科教科書二上, 國立編譯館出版
（三）國立編譯館(民 89), 國民中學數學科教科書二下, 國立編譯館出版
（四）國立編譯館(民 89), 國民中學數學科教科書三上, 國立編譯館出版
（五）國立編譯館(民 89), 國民中學數學科教科書三下, 國立編譯館出版
（六）孫文先(民 91), 骰子漫談, 九章數學教育基金會

評語

能從一個疑點另尋途徑，建立模型再清晰的根據此數對模型完整的討論問題，終於獲致滿意的答案，其創意值得嘉許。