

小齒輪挑戰大齒輪

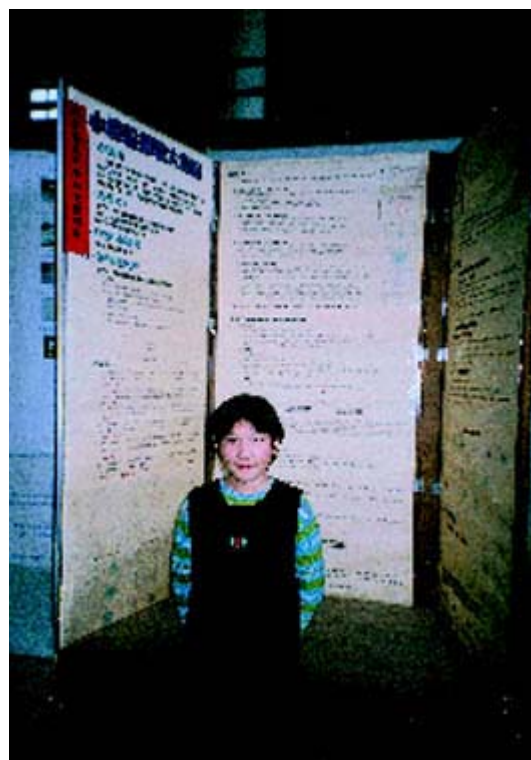
初小組 第一名

縣 市：嘉義市

校 名：蘭潭國小

作 者：曾善齊

指導教師：翁秀玉、李慧珍



我是就讀蘭潭國小四年五班的曾善齊，我對這次的成績感到非常滿意，滿意到快哭了，總覺得自己這一年的辛苦沒有白費。我很榮幸能為蘭潭國小爭光，更榮幸能幫嘉義市爭個第一名回來。這全要感謝翁老師、李老師、爸爸和媽媽的支持和付出呢！

一、研究動機

這是在小時候玩畫花圓圈的一種遊戲，起先，我認為只是畫一畫而已，但是玩久了以後，卻發現：奇怪！為什麼每一個點畫出來的圖案都不一樣？有些花瓣又尖又長，有些花瓣又圓又短，甚至還有一些畫了幾圈就開始重複了呢！於是，我就開始想研究這個奇怪的問題。

二、研究目的

研究一：研究齒輪繞滿幾圈才可以畫出完整的圖形

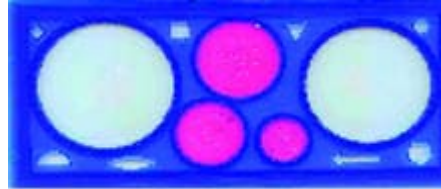
研究二：內齒輪的插入點對圖形空洞大小的影響

研究三：插入點對花瓣尖圓長短的影響

研究四：探討小內齒輪繞大內齒輪的圖形

三、研究器材與設備

筆、多功能文具尺(如右圖)、紙。



四、研究過程與分析

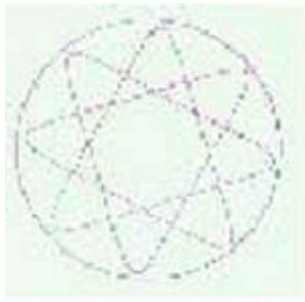
研究一：研究齒輪繞滿幾圈才可以畫出完整的圖形

(一)作法：

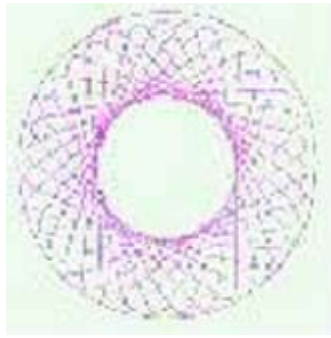
- 1.在內圈小齒輪(36個鋸齒)的某一個鋸齒做上a的記號。
- 2.在外圈(96個鋸齒)的鋸齒上做上A的記號，將A、a重合。
- 3.選定內圈齒輪任何一點洞，用紅筆點一下，稱為B點(也是開頭的地方)，用筆開始畫，注意何時可以繞回B點。
- 4.再試以不同的內外圈齒輪組合重覆以上的動作。

(二)結果：

- 1.內外圈齒輪組合(36格和96格)：在內圈齒輪中的任何一個插入點，繞完3圈外圈後一定會回到B點，一旦回到B點就會重覆第一次的線條〈也就是說原來的線條〉。(圖一~1)
- 2.內外圈齒輪組合(36格和105格)：繞完3圈外圈後，沒有回到B點，線條軌跡仍然沒有重覆，圖形顯得較複雜。不過繞滿12圈後就可以畫出一個完整的圖形。(圖一~2)
- 3.內外圈齒輪組合(52格和96格)：在內圈齒輪中任何一個插入點，繞完13圈外圈後一定會回到B點，一旦回到B點就會重覆第一次的線條〈也就是說原來的線條〉。(圖一~3)
- 4.內外圈齒輪組合(52格和105格)：未繞完52圈之前，沒有回到B點，線條軌跡沒有重覆，圖形顯得較複雜。不過繞滿52圈後就可以畫出一個完整的圖形。(圖一~4)
- 5.內外圈齒輪組合(63格和96格)：在內圈齒輪中的任何一個插入點，繞完21圈外圈後一定會回到B點，一旦回到B點就會重覆第一次的線條〈也就是說原來的線條〉。(圖一~5)
- 6.內外圈齒輪組合(63格和105格)：繞完3圈外圈後，回到B點，線條軌跡開始重覆，圖形顯得較簡單。(圖一~6)



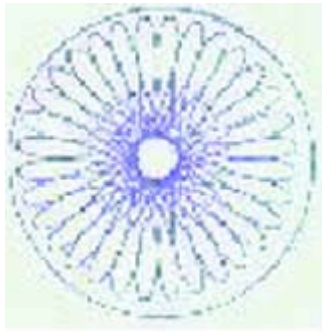
圖一~1：36/96格組合



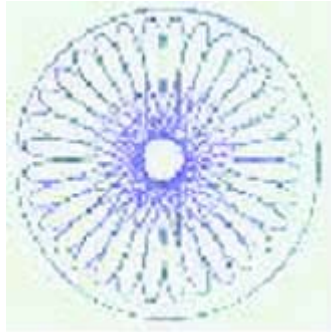
圖一~2：36/105格組合



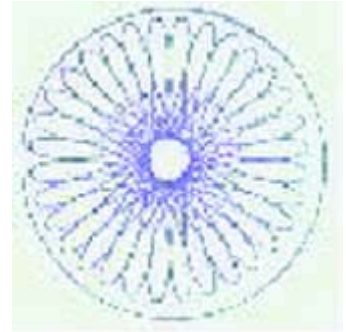
圖一~3：52/96格組合



圖一~4：52/105格組合



圖一~5：63/96格組合



圖一~6：63/105格組合

(三)分析：

因為63、52、36、96、105等數據太複雜，所以我們改用較簡單的數據來分析。

1.外圈齒輪50格，內圈齒輪10格：

(1)50是10的倍數($50 \div 10 = 5$)，內圈齒輪繞滿外圈一大圈後，相當於跑滿5次內圈齒輪，會回到原來的B點。

(2)繞滿外圈2大圈後，所畫出來的線條會和第一圈的重疊。

(3)如果再繼續繞圈的話，線條一直是重覆第一圈的線條。

2.外圈齒輪50格，內圈齒輪20格：

(1)50不是20的倍數，內圈齒輪繞滿外圈一大圈後，無法回到原來的B點。

(2)但是內圈齒輪繞滿外圈2大圈後，就會回到原來的B點。

(3)外圈2大圈的齒輪格數是 $50 \times 2 = 100$ 格；內圈也是繞了100格齒輪格數。

(4)我們發現50、20的最小公倍數是100，也就是100可以被50、20整除。

3.外圈齒輪50格，內圈齒輪30格：

(1)50不是30的倍數，內圈齒輪必須繞滿外圈3大圈後，才會回到原來的B點。

(2)外圈3大圈的齒輪格數是 $50 \times 3 = 150$ 格；內圈也是繞了150格齒輪格數。

(3)我們發現50、30的最小公倍數是150，也就是150可以被50、30整除。

4.由以上的分析，我們發現：

(1)外圈齒輪格數(m)和內圈齒輪格數(n)會影響圖形的線條，在繞滿m和n的最小公倍數格數時(記作【m,n】)，落點就會回到原點，因此線條軌跡就會開始重覆。

(2)【m,n】=P時，將 $P \div m = Q$ ，就可以算出內圈齒輪必須繞滿外圈齒輪 Q圈後，就開始重覆線條軌跡。

例如：【96,36】=288， $288 \div 96 = 3$ ，難怪繞滿三圈後，線條軌跡一直重覆。

(3)因此，為什麼不同格數的內外圈齒輪給予組合後，所畫出來的圖形有的密密麻麻，有的卻是非常簡單的線條，關鍵在於內外圈齒輪格數的最小公倍數除以外圈格數的數據(即【m,n】=P，再將 $P \div m = Q$)，也就是繞滿Q圈後會重覆軌跡。

如果Q愈大，代表圖形會密密麻麻；如果Q愈小，代表圖形軌跡會愈簡單。

研究二：內齒輪的插入點對圖形空洞大小的影響

(一)作法：

- 1.內外圈的齒輪組合為外圈96格和內圈63格。
- 2.依照內圈齒輪插入點的順序，由外到內在每一點上分別給予1,2,...,24的編號。
- 3.由插入點1開始畫圖，一直到呈現出比較完整的圖形為止(21圈)。
- 4.重復以上的作法，分別畫出編號2,3,...,24的圖形。

(二)結果：

- 1.畫出來的圖形，像甜甜圈，中間有空洞的圓形。
- 2.插入點在第7、8號以後和以前，中間的空洞會越來越大。
- 3.插入點在編號為第7、8點之後(9……24)和之前(6,...,1)，甜甜圈的厚度越來越薄。
- 4.插入點在第7,8點時，畫出來就沒有中間的空洞。

(三)分析：

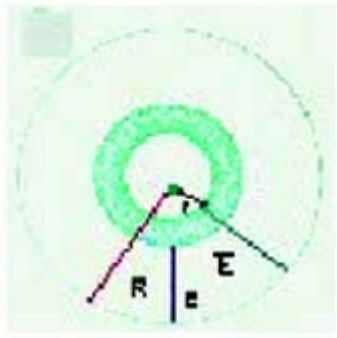
1.會產生甜甜圈(空洞)的原因：

當內圈齒輪的插入點離外圈齒輪邊緣的最短距離，稱為e；

當內圈齒輪的插入點離外圈齒輪邊緣的最遠距離，稱為E，如果E小於外圈齒輪的半徑（稱為R）時，就會產生圓形空洞的半徑，稱為 $r = (R - E)$ ，也就是插入點離外圈齒輪圓心的最近距離。

2.空洞大小：插入點離外圈齒輪圓心的最近距離，是影響空洞大小的關鍵，E愈大，r愈小，空洞就會愈小；相反地，E愈小，r愈大，空洞就會愈大。

3.第7,8點沒有空洞：因為它的插入點離外圈齒輪最遠時，剛好在外圈齒輪的圓心上，所以中間會沒有空洞。



圖二：空洞分析圖

研究三：插入點對花瓣尖圓長短的影響

(一)作法：

- 1.使用外圈齒輪(96)和內圈齒輪(63)。
- 2.內圈齒輪的插入點由邊緣往內給予1,2,3...,24號。
- 3.針對編號為1的插入點，開始繞著外圈齒輪畫圖，共繞了21圈，才能畫成完整圖形。
- 4.編號為2,3...,24的插入點，以同樣(3)的步驟畫圖。

(二)結果：

- 1.把圖案假想成花瓣，插入點越邊緣，花瓣就會越尖越長；相反的，插入點越靠近圓心，花瓣就會越圓越短。
- 2.插入點越靠圓心，線條就會越密，圖形的面積也越小；相反的，插入點越靠邊緣，線條就會越開展，圖形的面積也越大。

(三)分析

花瓣較尖或較圓的原因：

插入點離內圈齒輪圓心愈近，即插入點號碼愈大者，例如：24號插入點，所畫出來的圖形，它的最高點和最低點的距離就會愈小，這樣花瓣就會愈圓愈短；插入點位在離內圈齒輪圓心愈遠，即插入點號碼愈小者，例如：1號插入點，所畫出來的圖形，它的最高點和最低點的距離就會愈大，這樣花瓣就會愈尖愈長。

研究四：探討小內齒輪繞大內齒輪的圖形

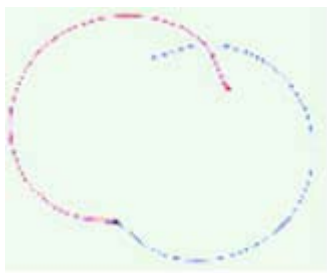
(一)作法：

- 1.小內齒輪(36格)繞著大內齒輪(63格)。
- 2.插入點選定小內齒輪的邊緣點開始畫，即1號插入點。

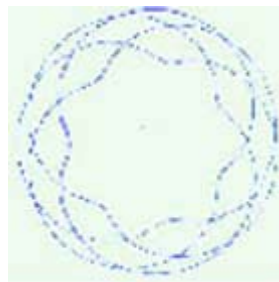
- 3.畫只有兩片花瓣的圖形，第一片花瓣用藍筆畫，由第一次的最低點繞到第二次的最低點，所畫的圖形當作一片花瓣，再以紅筆畫第二片花瓣。(圖四~1)
- 4.選 1 號插入點，畫出完整圖形，注意何時可以繞回原來的起點。(圖四~2)
- 5.重覆以上的動作，改用較接近中心的插入點畫，即24號插入點。(圖四~3)

(二)結果與分析：

- 1.畫出一片完整的花瓣，必須繞36格齒輪數，即繞滿一圈小內齒輪的格數(36格)。(圖四~1)
- 2.畫出完整圖形：和研究一一樣，小內齒輪繞滿大內齒輪4圈後，就會畫出完整圖形；所以二個內齒輪互繞時，齒輪格數分別是 m 、 n ，何時可以畫出完整的圖形，與 m 、 n 的最小公倍數有關，這研究一的結論相同。(圖四~2)
- 3.空洞的大小：插入點離邊緣越近的話，空洞就越小，例如：圖B；相反的，插入點離圓心越近的話，空洞就越大例如：圖四~3。
- 4.花瓣的圓尖：和研究三一樣，越靠邊緣的插入點畫出來的花瓣就越長例如：圖四~2，相反的，越靠圓心的插入點畫出來的花瓣也就越圓越短例如：圖四~3。



圖四~1



圖四~2



圖四~3

五、結論

(一)研究齒輪繞滿幾圈才可以畫出完整的圖形?(研究一)

- 1.外圈齒輪格數 m 和內圈齒輪格數 n 是主要的影響關鍵。在繞滿 m 和 n 的最小公倍數時，落點就會回到原點，因此線條軌跡就會開始重覆。
- 2.【 m, n 】= P 時(也就是內外圈齒輪所跑的格數)，將所跑的格數再除以外圈齒輪格數 m ，即 $P \div m = Q$ ，就可以算出內圈齒輪必須繞滿外圈齒輪 Q 圈後，就開始重覆線條軌跡。如果 Q 愈大，代表圖形會密密麻麻；如果 Q 愈小，代表圖形軌跡會愈簡單。

(二)內齒輪的插入點對圖形的影響(研究二)

- 1.會產生空洞的原因：當內圈齒輪的插入點位在最高點時，離外圈齒輪邊緣的距離，稱為 E ，如果 E 小於外圈齒輪半徑(R)時，即 $E < R$ 時，就會產生半徑 $r = (R - E)$ 的圓形空洞。

2.空洞大小：空洞的大小與插入點離外圈齒輪圓心的最近距離有關。 E 愈大， r 愈小，空洞就會愈小；相反地， E 愈小， r 愈大，空洞就會愈大。

(三)插入點對線條的影響(研究三)

花瓣較尖或較圓的原因：插入點的最高點和最低點之間的距離長短是影響花瓣形狀的關鍵。插入點離內圈齒輪圓心愈近，它的最高點和最低點的距離就會越短，所畫出來的圖形就會愈小，這樣花瓣就會愈圓愈短；插入點位在離內圈齒輪圓心愈遠，它的最高點和最低點的距離就會越長，所畫出來的圖形就會愈大，這樣花瓣就會愈尖愈長。

(四)探討小內齒輪繞大內齒輪的圖形(研究四)

- 1.畫出一片完整花瓣：所需的齒輪格數，就是移動的內齒輪格數。
- 2.畫出完整的圖形：與研究一的結論相同。
- 3.空洞大小：插入點離邊緣愈近，空洞愈小；插入點離邊緣愈遠，空洞愈大。
- 4.花瓣的圓尖：與研究三的結論相同。
- 5.兩個大小內齒輪互繞的圖形，變化不如前面研究一、二、三的圖形變化多，所以大小內齒輪互繞的玩法很少人在玩。

六、參考資料

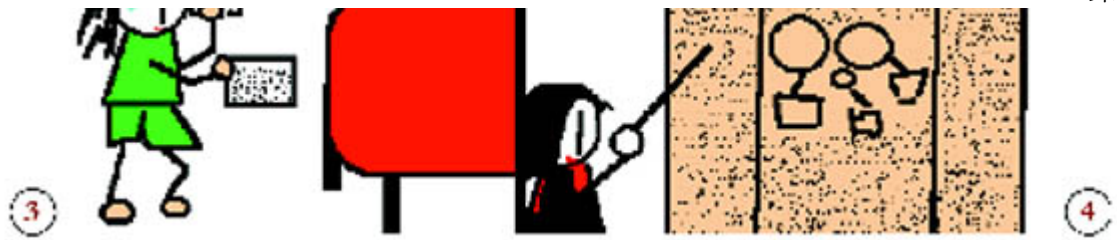
數學五年級上學期國立編譯館

七、心得

(一)剛做的時候覺得很有趣也很簡單，所以認為很快就可以找到答案，因為這個心，所以就「心不在焉」。只知有變化多端的圖形，但找不到規則；但研究後，已知道大小齒輪間的奧妙。

(二)一人做研究是一件很辛苦的工作，我要感謝老師及全家人的協助，讓我完成了這個研究，謝謝！





我的科展歷程

評語

本件作品是探討小齒輪繞大齒輪時小齒輪上一定點之軌跡，這個問題，對初小學生而言，屬相當複雜，而作者能利用工具先畫出完整的圖形，進而探討圖形之屬性，其分析方式以及所得之結果都足以列入優等。

[回到目錄頁../Index.htm](#)