一點破萬線

國中組　第三名

縣　市：台北市

校　名：螢橋國中

作　　者：趙家珩

指導教師：項培森

小三開始，在老師鼓勵下，我很喜歡自然學科。國中時，對數學較有興趣，除教科書外，常找生活化的問題研究，覺得數學領域何其寬廣迷人。
參賽過程中，我將平日探討的問題整理、修改，雖需獨挑大樑，但有師長支持，終能順利過關，給我很大信心。
也期望能再挑戰自我、挑戰科展、挑戰極限。

關鍵詞：

等和線、掃描、平移

一、*研究動機*

曾有同學提出疑問:如何在三角形內找到一個到三邊距離總和爲定值的點？嗯…「內心到三邊等距。」「平行線間距離相等。」「交軌法？不對，與『三』邊應該沒有關係。」雖然眾口議論紛紛許久，問題仍然是一團迷霧，這些想法是樣樣有道理，卻個個行不通，使我不禁在課餘時間多看它兩眼。究竟，這問題是否有撥雲見日的一天…？

二、研究目的

探討平面中n條直線間的點到此n條線距離和之變化。

定　義

設 P 為平面上一點，在本研究中以$D_n(P)$表"P 到此 n 邊之距離和"，若視 P 為一動點，當 P 移動到某一點所對應之$D_n(P)$值最大則以 $MaxD_n(P)$表示之，若最小則為 $MinD_n(P)$。

三、研究設備器材

紙、筆、尺、圓規

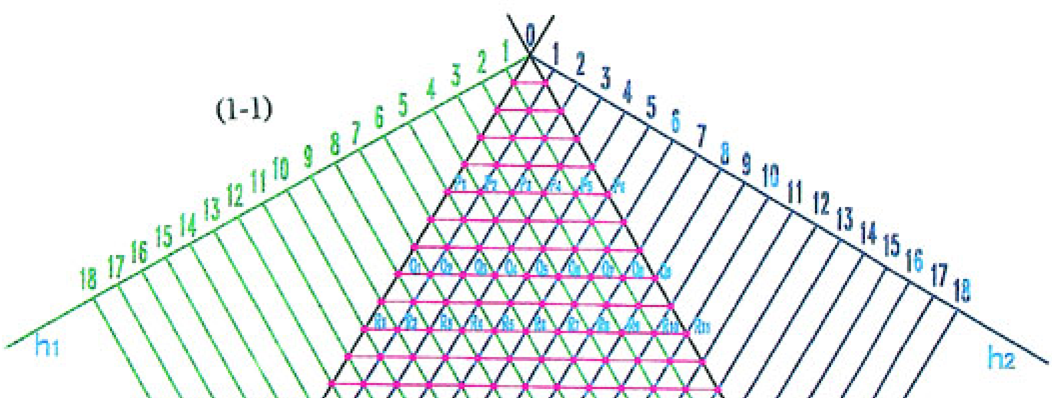
四、研究過程與方法

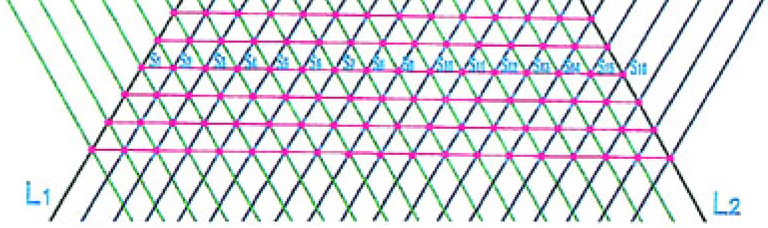
以L_1、L_2之交點O為垂足作$h_1 \perp L_2$，$h_2 \perp L_1$，並在h_1上取適當長為單位，從單位點向L_1、L_2作平行線。(圖 1-1)

若以 Q 點說明，Q_9位在L_2 上 $D_2(Q_9)=8$，可由其對應到 h_2上的 8 看出，當h_2的"8"減少到"7"時，相對的 h_1的數字也從"0"增加到"1"保持增減量的平衡。故在$\overline{O_1O_9}$上 $D_2(Q_1)= D_2(Q_2)= D_2(Q_3)$ ……。以下為一部份結果(設 k=定值=h_1+h_2)

	P		Q		R		S	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
1	0	5	0	8	0	10	0	15
2	1	4	1	7	1	9	1	14
3	2	3	2	6	2	8	2	13
4	3	2	3	5	3	7	3	12
5	4	1	4	4	4	6	4	11
6	5	0	5	3	5	5	5	10
7			6	2	6	4	6	9
8			7	1	7	3	7	8
9			8	0	8	2	8	7
10					9	1	9	6
11					10	0	10	5
12							11	4
13							12	3
14							13	2
15							14	1
16							15	0
K	5		8		10		15	

(1-1)



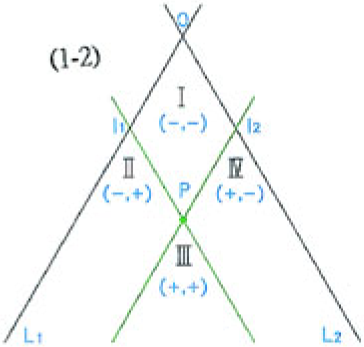


觀察到

a. 等和點共線

b. 等和線互相平行

c. 隨等和線由頂點向外移，k值亦不斷增加



(2)無意間過 P 作兩條平行兩邊的線，發現 L1、L2 間的區域被分成了四塊， 卻形成了類似坐標的概念，且可大膽推論：

其它到兩邊距離和為 $D_n(P)$的點，必在Ⅱ、Ⅳ象限。(圖 1-2)

註：(，)表 L_1、L_2 對於此區之點的距離增(+)減(-)

2. 討論

(1)在 L_1 與 L_2 間，若 $D_2(P)= D_2(P')$ (圖 1-3)

①作P、P'之二高，則 $D_2(P)=\overline{PP_1}+\overline{PP_2}=\overline{P'P'_1}+\overline{P'P'_2}=D_2(P')$

又過P、P'作 $\overline{PM} \,//\, \overline{P_1P_2'}$，$\overline{P'M} \,//\, \overline{P_1P_1'}$

P、P'相對之增減量相等，即有 P'm=PM

②連$\overline{PP'}$，$\triangle P'PM$與$\triangle PP'm$中

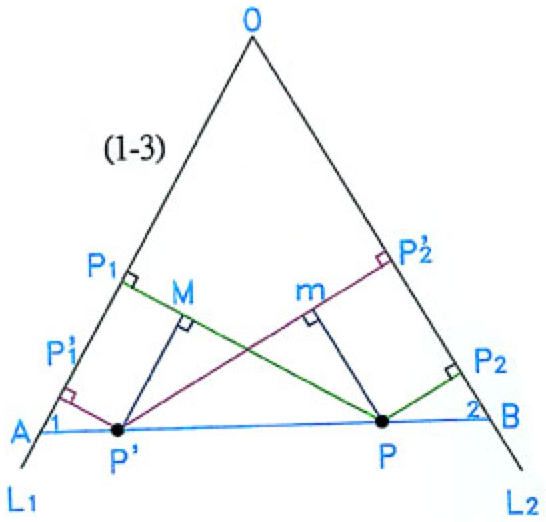
由①→$\overline{P'm}=\overline{PM}$

∠PmP'=∠P'M^P=90°，$\overline{PP'}=\overline{PP'}$ ⇨△P'PM≅△PP'm(RHS)

③又$\overline{M^{P'}} \,//\, \overline{P_1P_1'}$，$\overline{mP'} \,//\, \overline{P_2P_2'}$，

且∠MP'P=∠mPP' ∴ 延長$\overline{PP'}$交L_1、L_2於 A、B 時

∠1=∠2∴$\overline{OA}=\overline{OB}$(等腰△性質)



3. 證明 (圖 1-4)

(1)△ABC 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$

在$\overline{BC}$上任取二點 P、K，向$\overline{AB}$、$\overline{AC}$作垂線，分別交$\overline{AB_1}$、$\overline{AC}$於 P1、K1、P2、K2

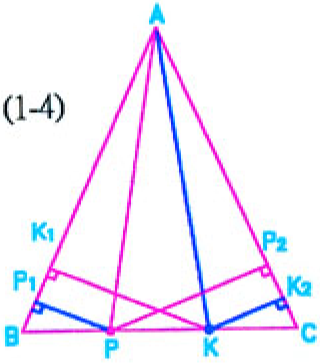
(2)$\triangle ABC=\frac{1}{2}(\overline{AB}、\overline{PP_1}+\overline{AC}\times\overline{PP_2})=\frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{KK_1}+\overline{KK_2})$

$\frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{PP_1}+\overline{PP_2})=\frac{1}{2}\overline{AB}(\overline{KK_1}+\overline{KK_2})$

$\therefore \overline{PP_1}+\overline{PP_2}=\overline{KK_1}+\overline{KK_2}$

∴ BC 上任一點到 AB、AC 之距離和皆相等。

(1-4)



(二) 三條線

對於三條線內部的 P 來說，過 P 分別向三邊作平行線，所分成的幾個象限中，由於沒有全是增或減量，所以以下實驗沒有排除任一象限的可能，對尋找等和線並無助益。

1. 實驗

(1)原則上，在三條線的實驗中，仍沿用兩條線的實驗方式，只是增加 h3，不過卻發現當兩條線相交時，便決定一點，此時再加入一條線對於已決定的點 是沒有用處的→宣告失敗。

(2)有鑑於之前的經驗，這次我決定用已發現的"二高等和線"， 進行三線間等線和的探討。

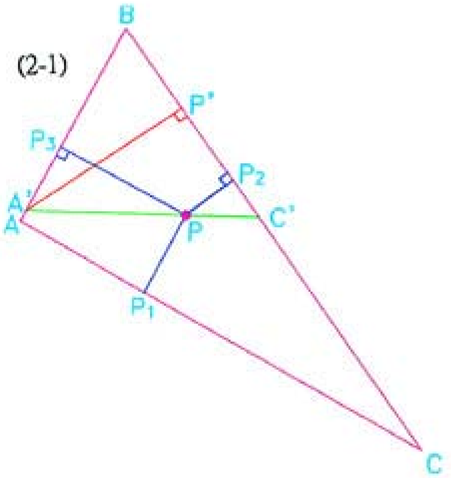
在三條線中控制二條線的距離， 將第三條線視為一操縱變因。

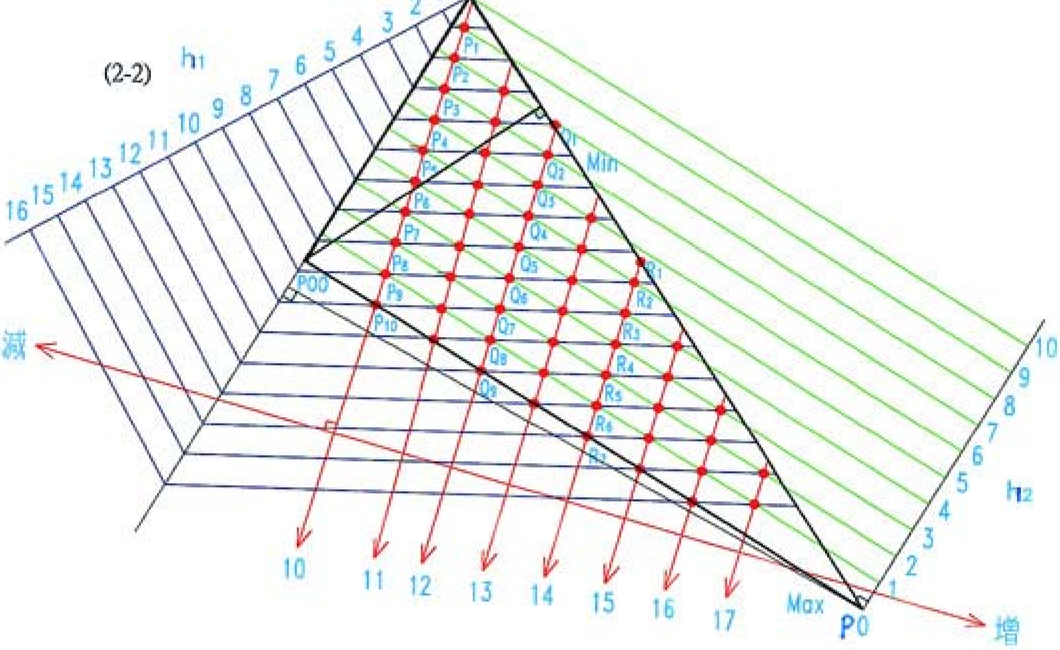
以下實驗即利用已證明的二高等和線。(圖 2-1) (圖 2-2)

(∵△ABC 中 $\overline{BA'}=\overline{C'B}$，$\therefore D_3(P)=\overline{P_1P}+\overline{P_2P}+\overline{P_3P}=\overline{P_1P}+\overline{P'A'}$)

	P		Q		R	
	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2
1	1	9	4	8	8	6
2	2	8	5	7	9	5
3	3	7	6	6	10	4
4	4	6	7	5	11	3
5	5	5	8	4	12	2
6	6	4	9	3	13	1
7	7	3	10	2	14	0
8	8	2	11	1		
9	9	1	12	0		
10	10	0				
K	10		12		14	

(2-1)





(2-2)

觀察到下面三項：

①等和點列共線

②各值間點列所成的直線平行(有方向性，且和△ABC 形狀有關)

③k 值有一定的範圍，推測:

MaxD$_3$(P$_0$)是最大高，P$_0$ 是最小角的頂點；

Min D$_3$(P$_{00}$)是最小高，P$_{00}$ 是最大角的頂點。

(其內部距離和相等的點列必不通過最大點與最小點)

因為三條線可以圍成封閉的形狀，是與兩條線時較大的差別。

2. 證明

(1)定值點列共線

限於篇幅，予以省略，參見(五)n 條線

(2)各值點列間所成的線平行(圖 2-3)

$\Delta H_1 = \overline{P_1D} = \overline{P_1P_2}\, sin(180° - A - \alpha) > 0$

$\Delta H_2 = \overline{P_2E} = \overline{P_1P_2}\, sin\alpha < 0$

$\Delta H_3 = \overline{P_2F} = \overline{P_1P_2}\, sin(C - \alpha) < 0$

$P_1P_2\, sin(180° - A - \alpha) = \overline{P_1P_2}\, sin\alpha + \overline{P_1P_2}\, sin(C - \alpha)$

$sin(180° - A - \alpha) = sin\,\alpha + sin(C - \alpha)$和角公式代入

$sin(180° - A)\,cos\alpha - cos(180° - A)\,sin\alpha = sin\alpha + sinC cos\alpha - cosC sin\alpha$

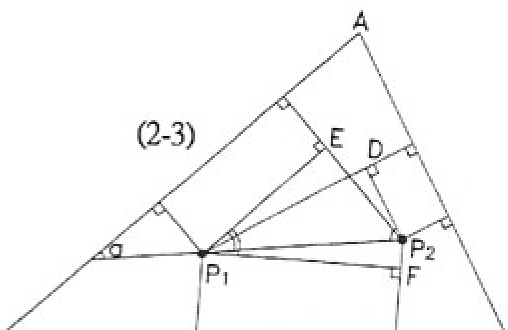
$= sinA cos\alpha + cosA sin\alpha$

$sin\alpha - cosC sin\alpha - cosA sin\alpha = sinA cos\alpha - sinC cos\alpha$

$sin\alpha(1 - cosC - cosA) = cos\alpha(sinA - sinC)$

$tan\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha} = \dfrac{sinA - sinC}{1 - cosC - cosA}$ (定值)

∴三角形若角度固定，等和線即可確定其斜率的唯一性。



(2-3)

(3) k 值有一定的範圍(圖 2-4)

△ABC 中，∠A>∠B>∠C ∴ BC>AC>AB 作等腰$\triangle BM_1m_1$、$\triangle BM_2m_2$ ············$\triangle BM_Am_A$ ($\triangle BM_AA$)

∵ BC>AB

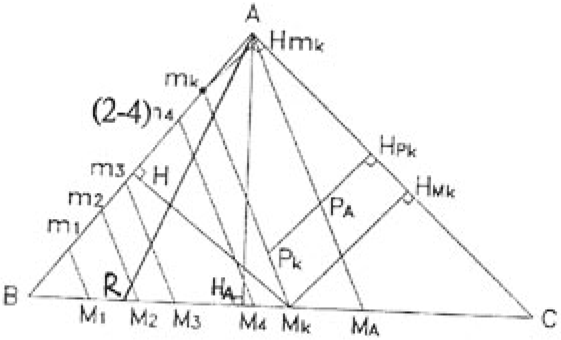
∴ M_A 在$\overline{BC}$上在$\overline{m_kM_k}$上任取 P_k 則$D_3(m_k)=\overline{M_kH}+\overline{m_kH_{mk}}$，

$$D_3(P_k)=\overline{M_kH}+\overline{P_kH_{Pk}}，D_3(M_k)=\overline{M_kH}+\overline{M_kH_{Mk}}$$

$$\angle A+\angle Am_kM_k$$

$$=\angle A+180^\circ-\frac{180-\angle B}{2}=\angle A+180^\circ-\frac{\angle A+\angle C}{2}$$

$$=\frac{\angle A-\angle C}{2}>180^\circ\,(\angle A>\angle C)$$



∴ $\overline{AC}$ 與$\overline{M_km_k}$會相交於 O (圖 2-5)

$\triangle Om_kH_{mk}\triangle OP_kH_{Pk}$與$\triangle OM_kH_{Mk}$中

$\angle O=\angle O=\angle O$，$\angle OH_{mk}m_k=\angle OH_{Pk}Pk=\angle OH_{Mk}M_k=90^\circ$

∴$\triangle Om_kH_{mk}\sim\triangle OP_kH_{Pk}\sim\triangle OM_kH_{Mk}\,(AA)$

又$\overline{OH_{mk}}\in\overline{OH_{Pk}}\in\overline{OH_{Mk}}$

∴$\overline{m_kH_{mk}}<\overline{P_kH_{Pk}}<\overline{M_kH_{Mk}}$

∴$D_3(m_k)<D_3(P_k)<D_3(M_k)$

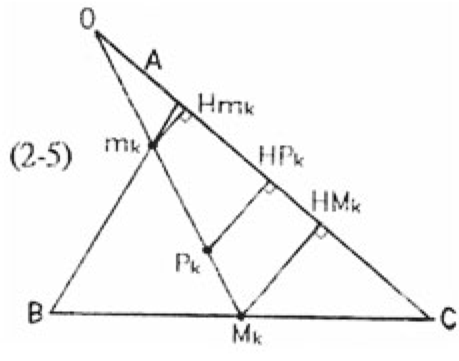
∴△ABM_A 邊上或內部一點 P 必可在$\overline{BM_A}$上 O

取得一點 M，使$D_3(M)\geqq D_3(P)$ (圖 2-4)

∴ △ABM_A 之極大點必在$\overline{BM_A}$上--(a)

作$\overline{AC}=\overline{CR}$同理可證△ARC 中，極大值必在$\overline{RC}$上--(b)

由(a) (b)知△ABC 之最大點必在$\overline{BC}$上，即是最大邊上。--(甲)



在 BC 間任取點 Q 且 $Q \neq C$

過 Q 作$\overline{QQ'} // \overline{AB}$，交$\overline{CH_C}$於$C'$(圖 2-6)

$\because \angle B > \angle C \ \therefore \angle Q'QC > \angle Q'CQ$

$\therefore \overline{Q'C} > \overline{QQ'} \ \therefore \overline{CC'} > \overline{QH_q}$，

又$D_2(C) = \overline{CH_C} = \overline{C'H_C} + \overline{CC'}$，$D_2(Q) = \overline{QH_Q} + QH_q$

$\therefore D2(C) > D2(Q)$ --(乙) 由(甲)(乙) C 為△ABC 區域之最大點

可得

> 二高和不等定理
> 即$\triangle OAB$中 $\angle A > \angle B$，P在$\overline{AB}$上，
> 則$D_2(B) \geqq D_2(P) \geqq D_2(A)$

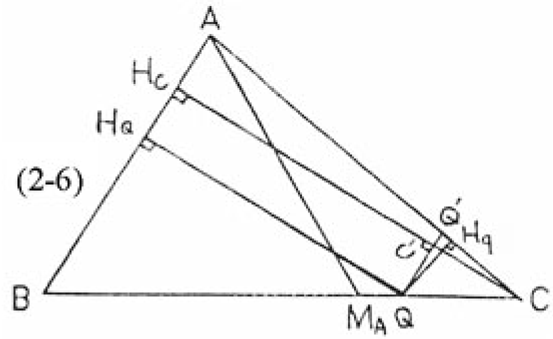
承上，同理 平行掃描之最小點均落在$\overline{AB}$上--(Ⅰ)

又$\angle A > \angle B$ ∴A 為$\overline{AB}$之最小點--(Ⅱ)

由(Ⅰ)(Ⅱ)A 為△ABC 之三高和極小點，

$MinD_3(A)$為△ABC 最小高$\overline{AH_A}$

∴△ABC 區域上之三高和範圍為 D_3，則 $MinD_3(A) \leqq D_3 \leqq MaxD_3(C)$



(2-6)

(三) 四條線

1. 實驗

(1)使用二高等和線的作圖方式各分為二條，成二組來掃描。

詳細圖表，因限於篇幅，予以省略

(四) 退化多邊形

因限於篇幅，予以省略，研究結果參見結論

(五) n 條線

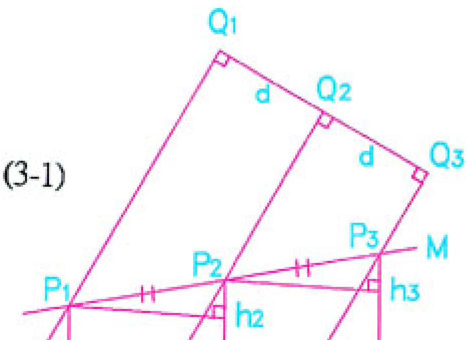
由於 n 高等和線的實驗與推測，證明會隨邊數 n 的增多而愈來愈復雜，我覺得必須尋求新的方式解決，才能將 n 推到任意正整數，首先我作了以下的觀察、推論、證明與研究。

1. 觀察：由之前實驗中我發現一、二、三高等和線等距平移時，其一、二、三高和之值成等差。詳細內容，因限於篇幅，予以省略

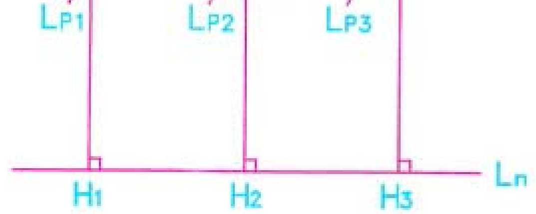
2. 推論：n 高等和線等距平移時，n 高和之值成等差。

3. 證明：(圖 3-1)

設直線 M 為L_1、L_2、………L_{n-1}之 n-1 高等和線，L_{P1}為L_1、L_2、………L_n之 n 高等和線



(3-1)



(1)將L_{P1}平移 d 得L_{P2}，再平移 d 得L_{P3}，

$\because P_1$、P_2、P_3在 M 上 ， $\therefore D_{n-1}(P_1)=D_{n-1}(P_2)=D_{n-1}(P_3)---(a)$

(2) ①$\because \overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_2Q_3}=d$，且 $L_{P1}//L_{P2}//L_{P3}$，$\therefore P_1P_2=P_2P_3$

②$\angle P_1h_2P_2=\angle P_2h_3P_3=90°$

③$\because \overline{P_1H_1}\perp L_n$，$\overline{P_2H_2}\perp L_n$，$\overline{P_3H_3}\perp L_n$

$\therefore P_1H_1 // P_2H-2 // P_3H_3$ $\therefore \angle P_1P_2h_2=\angle P_2P_3h_3$

由①、②、③得$\triangle P_1P_2h_2\cong\triangle P_2P_3h_3(AAS)$

$\therefore P_2h_2=P_3h_3$ 令為ΔH

則 $\overline{P_2H_2}=\overline{P_1H_1}+\Delta H$，$\overline{P_3H_3}=\overline{P_2H_2}+\Delta H=\overline{P_1H_1}+2\Delta H---(b)$

(3)由(a) (b)

①$D_n(P_2)=D_{n-1}(P_2)+\overline{P_2H_2}=D_{n-1}(P_1)+\overline{P_1H_1}+\Delta H=D_n(P_1)+\Delta H$

②$D_n(P_3)=D_{n-1}(P_3)+\overline{P_3H_3}=D_{n-1}(P1)+\overline{P_1H_1}+2\Delta H=D_n(P_1)+2\Delta H$

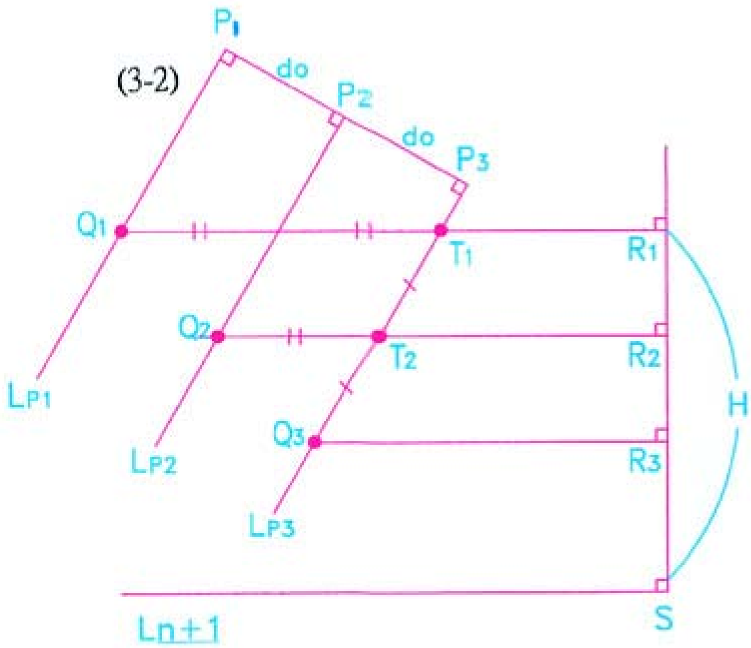
③由①、② 知$D_n(P_1)$、$D_n(P_2)$、$D_n(P_3)$成等差

等和線平移定理

設L_P為過 P 點到 n 條直線L_1、L_2、L_3、.......Ln之高等和線，則 L_P 平移一定量，n 高和之值的增(減)量亦為一定值，形成一由自然數組成的等差數列。

4. 研究：

(1)由 n 高等和線推$(n+1)$高等和軌跡(圖 3-2)



(3-2)

①設L_{P1}為過P_1點到L_1、L_2、$\cdots L_n$之 n 高等和線，將L_{P1}平移 d_0，得L_{P2}，再平移d_0，得L_{P3}

由等和線平移定理知$D_n(P_1)$、$D_n(P_2)$、$D_n(P_3)$成等差，設公差為 d

則$D_n(P_2)=D_n(P_1)+d--(\text{I})$ $D_n(P_3)=D_n(P_1)+2d--(\text{II})$

②在L_{P1}上取一點Q_1，則$D_n(Q_1)=D_n(P_1)$

$D_{n+1}(Q_1)=D_n(Q_1)+\overline{R_1S}=D_n(P_1)+H$---(Ⅲ)

③在$\overline{R_1S}$上取R_2、R_3，使$\overline{R_1R_2}=\overline{R_2R_3}=d$，

分別過R_2、R_3作L_{n+1}之平行線，

交 L_{P2}、L_{P3}於 Q_2、Q_3，由(Ⅰ)、(Ⅱ)

a. $D_{n+1}(Q_2)=D_n(Q_2)+\overline{R_2S}=D_n(P_2)+H-d$

$=D_n(P_1)+d+H-d=D_n(P_1)+H$---(Ⅳ)

b.$D_{n+1}(Q_3)=D_n(Q_3)+\overline{R_3S}=D_n(P_3)+\overline{R_3S}$

$=D_n(P_1)+2d+H-2d=D_n(P_1)+H$---(Ⅴ)

c.由(Ⅲ)(Ⅳ)(Ⅴ)知

$D_{n+1}(Q_1)=D_{n+1}(Q_2)=D_{n+1}(Q_3)$，

即Q_1、Q_2、Q_3為到L_1、$L_2\cdots L_{n+1}$之$(n+1)$高等和點

④設$\overline{Q_1R_1}$交 L_{P2}、L_{P3} 於M_1、T_1，$\overline{Q_2R_2}$交L_{P3}於T_2

a.∵$\overline{Q_1R_1}\,//\,\overline{Q_2R_2}$，∴$\angle Q_2T_2Q_3=\angle Q_1T_1Q_3$ (同位角)---(甲)

又 $L_{P2}\,//\,L_{P3}$，∴$M_1Q_2T_2T_1$為平行四邊形 ∴$\overline{Q_2T_2}=\overline{M_1T_1}$

b.∵$P_1P_2=P_2P_3=d$，且$L_{P1}//L_{P2}//L_{P3}$

∴$\overline{Q_1M_1}=\overline{M_1T_1}$，∴$\overline{Q_2T_2}=\overline{M_1T_1}=\dfrac{1}{2}\overline{Q_1T_1}$

c.∵$\overline{Q_1R_1}//\overline{Q_2R_2}//\overline{Q_3R_3}$，且 $\overline{R_1R_2}=\overline{R_2R_3}=d$

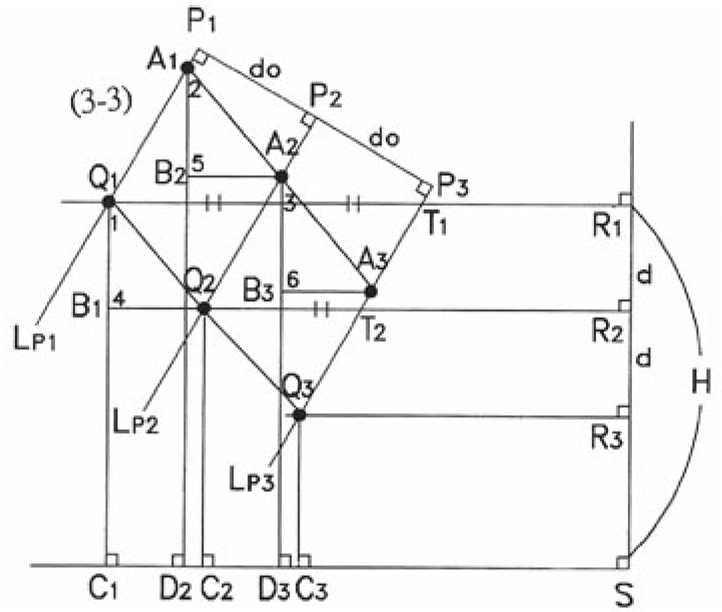
∴$\overline{Q_3T_2}=\overline{T_1T_2}=\dfrac{1}{2}\overline{Q_3T_1}$ ∴$\dfrac{\overline{Q_2T_2}}{\overline{Q_1T_1}}=\dfrac{\overline{Q_3T_2}}{\overline{Q_3T_1}}=\dfrac{1}{2}$---(乙)

d.由(甲)(乙)知：$\triangle Q_3Q_2T_2\sim\triangle Q_3Q_1T_1$ (SAS)

∴$T_2Q_3Q_2=T_1Q_3Q_1$(對應角)

又$Q_3-T_2-T_1$，∴Q_3、Q_2、Q_1共線

(2)承(1)，推$(n+1)$高等和線之方向 (圖 3-3)



①在L_{P1}上任取點A_1，作$\overline{A_1A_3}$，

使$\overline{A_1A_3}\,//\,\overline{Q_1Q_3}$ ，且交 L_{P2}於 A_2

作$\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3B_3}$,使 $\overline{A_2B_2}\perp\overline{A_1D_2}$, $\overline{A_3B_3}\perp\overline{A_2D_3}$

以L_1、L_2之交點 O 為垂足作$h_1\perp L_2$，$h_2\perp L_1$，並在h_1上取適當長為單位，從單位點向L_1、L_2 作平行線。(圖 1-1)

若以 Q 點說明，Q_9位在L_2 上 $D_2(Q_9)=8$，可由其對應到 h_2上的 8 看出，當h_2的"8"減少到"7"時，相對的 h_1的數字也從"0"增加到"1"保持增減量的平衡。故在$\overline{O_1O_9}$上 $D_2(Q_1)=D_2(Q_2)=D_2(Q_3)$ ……。以下為一部

則$\triangle Q_1B_1Q_2$、$\triangle A_1B_2A_2$與$\triangle A_2B_3A_3$中

$\because \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$，$\angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = 90°$，

$\overline{Q_1Q_2} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$

$\therefore Q_1B_1Q_2 \cong A_1B_2A_2 \cong A_2B_3A_3 \, (AAS)$

$\therefore \overline{Q_1B_1} = \overline{A_1B_2} = \overline{A_2B_3} = d$

②設$\overline{A_1D_2} = H^*$

$D_{n+1}(A_1) = D_n(P_1) + H^*$

$D_{n+1}(A_2) = D_n(P_2) + H^* - d = D_n(P_1) + d + H^* - d = D_n(P_1) + H^*$

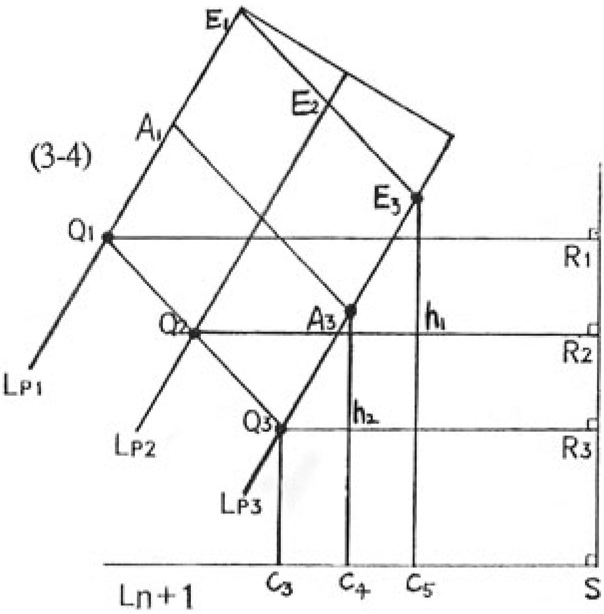
$D_{n+1}(A_3) = D_n(P_3) + H^* - 2d = D_n(P_1) + 2d + H^* - 2d = D_n(P_1) + H^*$

$D_{n+1}(A_1) = D_{n+1}(A_2) = D_{n+1}(A_3)$

A_1、A_2、A_3為$(n+1)$高等和線

$\because \overline{A_1A_3} // \overline{Q_1Q_2}$ $\therefore (n+1)$高等和線均平行

(3) 承(2)，推$(n+1)$高等和線成等差 (圖 3-4)



在L_{P3}上取E_3使$\overline{A_3E_3} = \overline{A_3Q_3}$

過Q_3、A_3、E_3作垂線

$\triangle E_3A_3h_1$與$\triangle A_3Q_3h_2$中

$\overline{A_3E_3} = \overline{A_3Q_3}$，$\overline{C_3C_4} = \overline{C_4C_5} = \overline{A_3h_1}$，

$\angle E_3h_1A_3 = \angle A_3h_2Q_3$

$\triangle E_3A_3h_1 \cong \triangle A_3Q_3h_2 \, (RHS)$

$\therefore \overline{E_3h_1} = \overline{A_3h_2}$

故$(n+1)$高等和線等距平移時，$(n+1)$高和之值亦成等差。

(4) ①$D_1(P)$、$D_2(P)$、$D_3(P)$之等和線為固定方向之直線

②由上知：可從高等和線，推得$(n+1)$高等和軌跡程直線且方向固定。所以單高線可推二高等和直線，二高可推三高等和為直線。如此繼續下去，要有多少條直線均可順利推出故可寫成下列之定理：

n 邊形內 n 高等和軌跡定理

同一平面上有 n 條直線，L_1、L_2、$\cdots L_n$圍成一 n 邊形A_1、A_2、A_3、$\cdots A_n$，其內一點P到各邊距離和為$D_n(P) = k$，則過多邊形內滿足$D_n(P) = k$的所有點之軌跡，為過P在A_1、A_2、$\cdots A_n$區域之一線段P_0P_n，且P_0P_n有一定斜率(方向性)。

五、研究結果

(一) n 高為定值 k 之求法：

1. 先求(n-1)高等和線L_P，使$D_n-1(P)$為 k 之一部份k_1
2. 再求第 n 個高$D_1(Q)=k-k_1$之單高定值線L_Q
3. L_P與L_Q之交點 R 即為所求

(二) n 高等和線作圖 ：

1. 先作（n-1）高等和線L_1，平移得L_2，在L_1、L_2上各任取點P_1、P_2，並測量此兩點之（n-1）高和的差。
2. 若$D_n-1(P_1)=D_n-1(P_2)+\Delta h$，在$L_n$上作高之度量線 OR，取適當長$\overline{OS}$及$\overline{OS}+\Delta h(\overline{SH})$，過 S、H，作$L_n$的單高等和線，分別交$P_1$、$P_2$於$Q_1$、$Q_2$。
3. 連Q_1Q_2即為所求

例：四邊形之等和線作圖

(圖 4-1)(圖 4-2)

(1)先作三高($\overline{AB}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$)等和線L_1，再平移得L_2

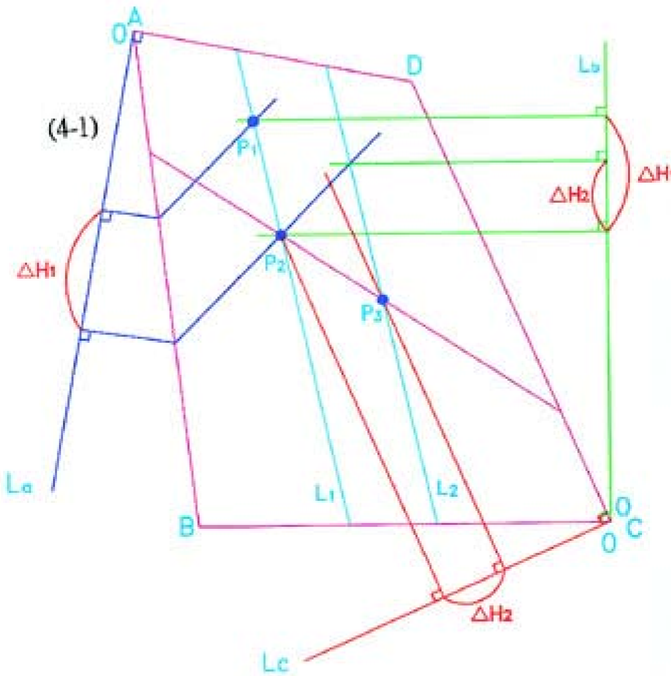
(2)再以$D_4(P_2)$為定值 k，在L_2上取P_3，使$D_4(P3)=D_4(P_2)$

(3)連$\overline{P_2P_3}$即為所求

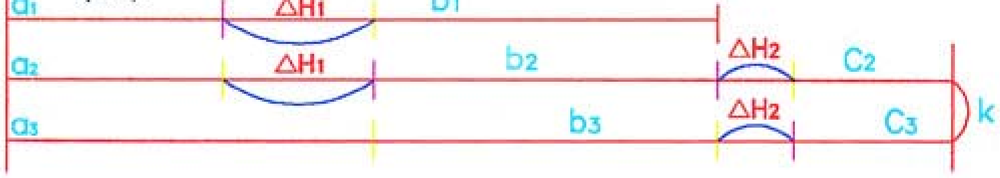
(三) k 值之範圍 ：

1. 求出形內一點 P 之等高和線
2. 以平移掃描方式觀察 k 值之變動，可得最大、小值之位置及 kmax、kmin，即 k 值可解出的範圍。

(4-1)

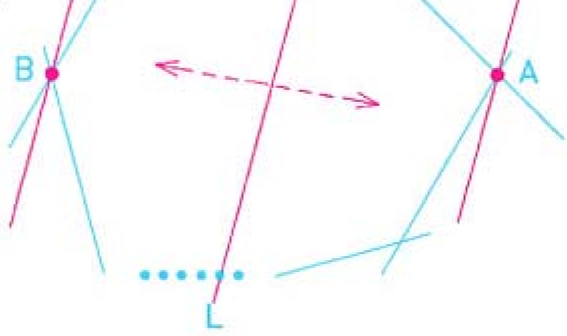


(4-2)



例：(圖 4-3)若已作出 n 高等和線，則此 n 條線內可解範圍為$D_n(A)$~$D_n(B)$

(4-3)



六、結論

(一)二等高和線L_1、L_2交於O，在L_1、L_2 上任取A、B，使$\overline{OA}=\overline{OB}$，$\overline{AB}$即爲此二線的等和線。

(二)n條線內部之等和點會共線，且等和線有一定的方向性及範圍。

(三)巧妙運用有限的平行線及二高等和線，可製作出n邊的等和線。

(四)正△與平行四邊形內部每一點到邊上距離和皆相等;梯形的等和線與二高等和線的意義相同。

七 、參考資料

(一)國中數學第五、六冊

(二)第三十八屆中小學科展優勝作品專輯

(三)高級中學基礎數學第二冊

評語

本作品討論n條直線內部等和點之變化情況，計算細膩，對幾何的知識運用熟練所得之結果對於幾何性質之了解助益即大。

回到目錄頁../Index.htm