

田字方塊深探秘～

田字區等值遊戲的一般解探索與擴張

國中組數學科第三名

台北市立天母國民中學

作者：吳孟軒

指導教師：許文化、賴春錦

一、研究動機

有一次老師提出 3×3 方陣概念，要求做出田字形等值的方陣，例：用1至9填入格子中，

9	4	8
2	1	3
6	7	5

就是每一個田字形是16的解答，我想把它擴充到 4×4 的時候結果會如何？於是我就做了下面的研究。

二、研究目的

- (一) 在 4×4 的方格中，能不能找到四個 3×3 方格具有相等值？
- (二) 在 4×4 的方格中，能找到 3×3 方格的解答，其極大值為94，極小值為59，理由何在？
- (三) 在極大值和及小值間，所有解答數為何？

三、文獻探討

(一) 全國科展第三十四屆中，有初小組作品“火車快飛”討論 3×3 格中的四個 2×2 格等值，他們研究出 2×2 的值為16和24，解答如下：

9	2	6
4	1	7
8	3	5

 \rightarrow

1	8	4
6	9	3
2	7	5

9	1	8
4	2	5
7	3	6

 \rightarrow

1	9	2
6	8	5
3	7	4

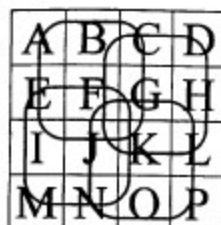
沒有解出16~24區間完整解答。

(二) 有關4×4格中找到3×3格等值的問題，不曾有人探討過，無任何資料可供參考。

四、研究過程

把4×4方陣看成4個3×3方陣： $(4 \times 4) = 4 \times (3 \times 3)$ 。

圖一



如圖所示，把4×4的方陣擺上116的數字，使“A+B+C+E+F+G+I+J+L+K”、“B+C+D+F+G+H+J+K+L”、“E+F+G+I+J+K+M+N+O”、“F+G+H+J+K+L+N+O+P”四個3×3小方陣的數字和均相同。

問題分析：

(一) 小方陣中的九數總和之最小值及最大值：

1. 已知A, D, M, P這四個格子在上述四個小方陣中都只出現了一次，B, C, E, H, I, L, N, O出現兩次，而中間的F, G, J, K則出現四次。

2. 所以，四個小方陣之數字總和最小應為 $(A+D+M+P)(B+C+E+H+I+L+N+O) \times 2 + (F+G+J+K) \times 4$ 。

3. 求得最小值：

(1) 為使總和最小，所以把出現四次的F, G, J, K用最小的1, 2, 3, 4代入，出現兩次的B, C, E, H, I, L, N, O則分別用5~12代入，剩下的A, D, M, P則以13~16代入。

(2) 算出 $(3+14+15+16) + (5+6+7+8+9+10+11+12) \times 2 + (1+2+3+4) \times 4 = 234$ ，分配給四個小方陣，每個方陣中九個數的234，總和應為 $234 \div 4 = 58.5$ 。

(3) 但每個方陣的總和應為整數，而且不能低於58.5，符合這兩個條件的最小數值應為59，這表示每個小方陣的九個數的總和最少是59。

4. 求得最大值：

(1) 如果要得到最大值，就要把 $(A+D+M+P) + (B+C+E+H+I+L+N+O) \times 2 + (F+G+J+K) \times 4$ 中的F, G, J, K看做13, 14, 15, 16, B, C, E, H, I, L, N, O仍然代表5~12，而A, D, M, P則代表1, 2, 3, 4。

(2)計算出 $(1-2-3-4)+(5+6+7+8+9+10+11+12) \times 2+(13+14+15+16) \times 4=378$ ，分配給四個小方陣，每個方陣中九個數的總和最大可達 $378 \div 4=94.5$ 。

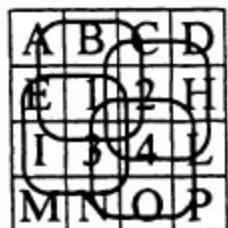
(3)但每個方陣的總和應為整數，而且不能高於94.5，符合這兩個條件的最大數值為94，這表示每個小方陣的九個數的總和最多是94。

5. 探討那些數可以互換？

圖一中四個小方陣把大方陣切成九個區域，每個區域中的數均可互換，另外整個方陣共有8種翻轉的方法，所以一共可以變化出 $4! \times 2^4 \times 8=3072$ 種方陣。

(二) 和為59分析：

1. 試以1,2,3,4填在中間四格：



①現在分配13~16的位置，由於前面已經求出邊上八個格子（B,C,E,H,I,L,N,O）的和為70，所以先看看16能不能擺在邊緣，結果發現只要把16填在邊緣，縱使剩下的七格是最小的5~11（1~4已經填在中央），加上15或16就會大於70，所以15和16必須填在邊緣。

②前面已經計算出四個角落的和為56，而且15和16已經佔據了兩個角落，所以，剩下的兩個角落的和就只能為25（ $=51-(15+16)$ ）。

③這25可以拆成12+13或11+14，但假使只要選擇了某一個，就會使另一個中較大的那個數沒有立足之地：

列表分析如下：

B,C 總和	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
H,L 總和	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	×	×
N,O 總和	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	×	×	×	×
E,I 總和	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	×	×	×	×	×
B,C,E,H,I,L,N,O 總和	69										無此排法				

由於B,C,E,H,I,L,N,O八數之和應為70，而表一中不管怎麼排，和都只有69，所以失敗。

註：上表中的X表示數字過大或過小（最小是 $5+6=11$ ，最大是 $12+13=25$ ）。

2. 試以1, 2, 3, 5填在中間四格：

①方陣如下：

16	B	C	15
E	1	2	H
	3	3	L
14	N	O	11

②列表分析：

表二

B,C 總和	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
H,L 總和	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	×	×	×
N,O 總和	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	×	×	×	×
E,I 總和	19	18	17	16	15	14	13	12	11	×	×	×	×	×	×
B,C,E,H,I,L,N,O 總和	67								無此排法						

3. 假設角落四格的和為Q，邊上八格的和為R，中間四格的和為S，則所有小方陣的和為 $Q+2R+4S=59 \times 4=236$①。

(1)等式的右邊顯然是236，如果把Q和S移到右邊，就成為：

$$2R=236-Q-4S \dots\dots\dots ②。$$

(2)由於 $1+2+3+\dots+16=136$ ，所以可再列方程式：

$$Q+R+S=136 \dots\dots\dots ③。$$

(3)算出①-③：

$$R+3S=100$$

也就是說，

$$R=100-3S \dots\dots\dots ④。$$

(4)③ $\times 2$ -①：

用 $2Q+2R+2S=272$ 來減 $Q+2R+4S=236$ ，可改成 $2Q+2R=272-2S$ 減掉 $Q+2R=236-4S$ ，算出 $Q=36+2S$⑤。

(5)決定Q, R, S的範圍：

①第一階段—每個數都可以從最小值一直帶入到最大值：

ㄅ.S最小是 $1+2+3+4=10$ ，最大是 $13+14+15+16=58$ 所以 $10 \leq S \leq 58$ 。

ㄆ.由於 $R=100-3S$ ，S應為 $10 \sim 58$ ，所以 $-74 \leq R \leq 90$ ，不過R值最小應為 $\sum_{i=1}^8$

$i=1+2+3+\cdots+8=36$ ，但是此時的S值為 $21\frac{1}{3}$ ，所以S最多只能用到21，可見R最小應為37。

Π. Q的範圍和S值一樣，介於10和58之間。

Ⅲ. 經過整理，Q, R, S的範圍是：

$$\begin{cases} 10 \leq S \leq 21 \\ 36 \leq R \leq 90 \cdots \text{⑥} \\ 10 \leq Q \leq 58 \end{cases}$$

②第二階段一把範圍縮小：

Ⅳ. 現在用⑥式中的S來確定Q是多少：

⑤式中說明了 $Q=36+2S$ ，現在知道 $0 \leq S \leq 21$ ，所以 $56 \leq Q \leq 78$ ，與 $10 \leq Q \leq 58$ 合併，得

$$56 \leq Q \leq 58 \cdots \text{⑦}$$

Ⅴ. 如此，S應等於10或11，才能符合⑤式。

Ⅵ. 此外，Q不可能等於57，否則S將成為10.5。

Ⅶ. 由於 $10 \leq S \leq 11$ ，根據⑥式，得知 $70 \geq R \geq 67 \cdots \text{⑧}$ 。

Ⅷ. 再經過整理後，列出：

$$\begin{cases} 10 \leq S \leq 11 \\ 70 \leq R \leq 67 \cdots \text{⑩} \\ 56 \leq Q \leq 58 \end{cases}$$

Ⅸ. 也就是只有兩組解，一組是：

$$\begin{cases} S=10 \\ R=70 \cdots \text{⑪} \\ Q=56 \end{cases}$$

另一組是：

$$\begin{cases} S=11 \\ R=67 \cdots \text{⑫} \\ Q=58 \end{cases}$$

4. 推算Q, R, S所代表的數字（略）。

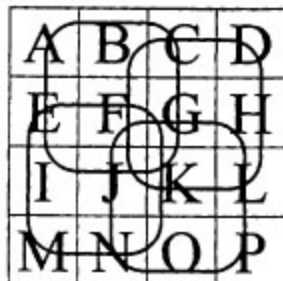
5. 試圖推算有沒有P可能使四個小方陣數字和均為59（過程略）結果請參閱

6、結論25種解答。

五、研究結果

(一) 3×3 的小方陣的數字和：

圖七十六



1. 把 4×4 方陣看成四個 3×3 小方陣，則每個小方陣的和可從 59~94。
2. 只要把和為 x 的方陣中每個數改為 17 的補數，就能成為大為 $153-x$ 的方陣，其中 $x=59 \sim 94$ 。例如和為 59 的排法，與和為 94 的排法對稱。
3. 上圖中每個方框中的數均可互換，整個方陣也可以翻轉，所以共能變化出 3072 種方陣。

(二) “和為 59” 的填法：

1. 共有 25 種填法。
2. 研究時把所有的情形分為 “狀況 1-1” ~ “狀況 1-13” 以及 “狀況 2-1” ~ “狀況 2-12” 共 25 種狀況。
3. 25 種狀況排出了 25 組方陣，但並非每種狀況各排出 1 組，而是分布於 0~4 組間。

(三) “和為 94” 的排法與 “和為 59” 對稱，方陣數量也應為 25 組。

(四) “和為 60” 的方陣填法：

1. 狀況分為 11 大類，和為 59 是 2 大類，表示和為 60 的狀況比和為 59 的情形複雜。
2. 目前已經檢驗的 8 大類的狀況，共排出了 66 組方陣，已經超過了 “和為 59” 方陣組數的兩倍半。
3. 發現用表格來處理較快，每一小類的狀況只需 2~3 行，整大類的狀況大約只需花一整頁。但每大類狀況的前面均需作前置分析。

六、結論

(一) 方陣的對稱性：

1. 一個填好的方陣，有 3072 種對調數字的方法。
2. 方陣中的數字可以由 59~94，並以 76.5 為對稱軸：

表四十八

3 × 3 小方陣 的數字和	59	60	61	76
	94	93	92	77

↗ 互相對稱

3. 把方陣中的每個數字都改為17的補數，得到新的方陣，此新方陣中每個3 × 3小方陣的數字和均成為上表中與原數字和相對的數字，例如“和為60”的方陣可轉換為“和為93的方陣”。

(二) “和為59”的情形：

1. 全部25組方陣：

圖七十七

(1) 12 6 9 13 8 1 2 10 14 3 4 11 15 5 7 16	(2) 12 6 10 13 7 1 2 9 14 3 4 11 15 5 8 16	(3) 12 7 10 13 9 1 2 5 11 3 4 14 15 6 8 16	(4) 12 7 10 13 6 1 2 8 14 3 4 11 15 5 9 16	(5) 12 5 14 13 7 1 2 8 11 3 4 9 15 6 10 16
(6) 12 5 14 13 8 1 2 6 10 3 4 11 15 7 9 16	(7) 12 6 14 13 7 1 2 5 10 3 4 11 15 8 9 16	(8) 12 6 14 13 8 1 2 5 9 3 4 11 15 7 10 16	(9) 12 7 14 13 5 1 2 6 11 3 4 9 15 8 10 16	(10) 13 4 12 14 9 1 2 7 10 3 5 11 15 6 8 16
(11) 13 7 9 14 8 1 2 6 11 3 5 12 15 4 10 16	(12) 13 7 10 14 6 1 2 8 12 3 5 9 15 4 11 16	(13) 13 8 9 14 6 1 2 7 12 3 5 10 15 4 11 16	(14) 13 8 10 14 6 1 2 4 11 3 5 12 15 7 9 16	(15) 13 8 10 14 6 1 2 7 11 3 5 9 15 4 12 16
(16) 13 7 11 14 8 1 2 4 9 3 5 12 15 6 10 16	(17) 13 7 11 14 8 1 2 6 9 3 5 10 15 4 12 16	(18) 13 9 10 14 4 1 2 7 12 3 5 8 15 6 11 16	(19) 13 8 11 14 4 1 2 6 12 3 5 9 15 7 10 16	(20) 13 7 12 14 6 1 2 4 10 3 5 11 15 8 9 16
(21) 13 8 12 14 6 1 2 10 9 3 5 4 15 7 11 16	(22) 13 9 11 14 7 1 2 4 8 3 5 10 15 6 12 16	(23) 13 9 12 14 4 1 2 6 10 3 5 7 15 8 11 16	(24) 13 10 11 14 6 1 2 4 8 3 5 9 15 7 12 16	(25) 13 10 12 14 6 1 2 4 7 3 5 8 15 9 11 16

(三)“和為94”的方陣與和為59的方陣以17的補數互相對稱。

(四)“和為60”的方陣解答數105種此從略。

(五)和為93的方陣排法，是把和為60的方陣中每一個數改為17的補數啊，解答數105種。

(六)和為61～92之間的方陣解答數預期更多，尚在研究中。

評語

1.本作品是討論將1～16等16個數字填入 4×4 方格中。在文中除提出找四個 3×3 方格總和值均相等之方法，並羅列所有情形，及方法數，其最大，最小值。

2.作品討論完整，推論正確，很有創意。

