圖形中的奧妙—特徵矩形論

國中組數學科第一名

高雄師範大學附屬高級中學（國中部）　作　者：林泰旭
指導教師：張彥平

一、研究動機

我最近和同學在玩益智遊戲時，突然發現棋盤上的格子，四個角落都是同色的，而在生活上我們經常也可以看到不同顏色的小正方形磁磚中有許多這種四個角落同色的大正方形。這樣的發現引起了我的好奇，因此展開我的研究之旅…。

二、研究目的

1.在矩形邊長與使用顏色總數均已知的情形下，探討其是否包含特徵矩形。

2.推廣到矩形邊長與使用顏色總數均未知的情形下，是否包含特徵矩形的探討。

3.尋求包含特徵矩形的最小正方形邊長函數值之範圍。

三、定義

1.特徵矩形：指一矩形的四個角落方格，都被染上相同的顏色；具備這種特徵的矩形，我們稱之為特徵矩形；

例如：下圖1含有特徵矩形。（打圈的四格便是特徵矩形的四個角落方格）；而圖2沒有特徵矩形。

2.P(k)：用 k 種顏色去染一正方形的方格棋盤，若每一格染且只染一種顏色，會使它染色以後，一定包含特徵矩形的最小正方形的邊長，我們記為”P(k)”。其中 $k\geqq 2$，$k\in N$。

3.賓果形：用 k 種顏色去染一方格棋盤，不管染法如何，一定包含特徵矩形的一 $m\times n$ 棋盤；稱為一“賓果形”。

4.缺陷形：用 k 種顏色去染一方格棋盤，存在一種染法，使其不含有特徵矩形的一 $m\times n$ 棋盤，稱為一“缺陷形”。

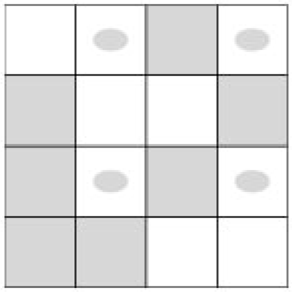


圖1

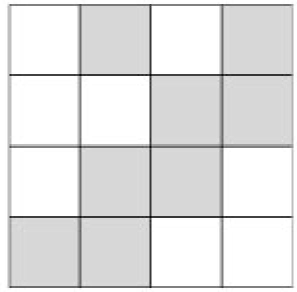
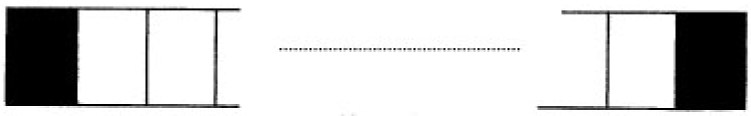


圖2

5.特徵列：一個1×n的矩形（n≧2），左右兩端方格同色時，我們稱之為"特徵列"，即：



特徵列

四、預備定理

定理1：當mP(k)時，用k色去染一m×m的正方形，一定含有特徵矩形。

說明：當m≧P(k)時，一m×m的正方形，一定包含一P(k)×P(k)的正方形，由p(k)的定義得知此P(k)×P(k)的正方形一定含有特徵矩形，所以m×m的正方形也一定含有特徵矩形。

定理2：當m＜P(k)時，一定可以找出一種染法，使得用k色去染一個m×m的正方形，不含特徵矩形。

說明：因為P(k)為一定含有特徵矩形的最小正方形，故當正方形邊長比P(k)小時，一定有一種染法使得此矩形不含特徵矩形。

例如：由"P(2)=5"（下面我們將證明）知一5×5，6×6，7×7………等等；只要邊長大於或等5的正方形棋盤，用雙色去染，一定包含特徵矩形；而4×4；3×3；2×2；的棋盤用雙色去染，一定存在一種染法，使其不包含特徵矩形。

我們接下來，使用矛盾證法來證明"P(2)=5"（即證明用兩種不同顏色去塗一個正方形時，不管染法如何，一定包含特徵矩形的最小正方形邊長為5）首先，我們由圖2可知P(2)＞4，因為圖上的4×4正方形不含特徵矩形。而我們用兩種顏色去染一個5×5棋盤，勢必會有一種顏色（設為A色）至少包含13個格子。

我們設第m列上有a_m個A色方格，則：

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \geq 13 \qquad ....(1)$$

我們從第m列上的A色方格中，任取兩格，作一個特徵列，則可作出 $C_2^{a_m}$ 個特徵列，也就是說：

這5×5的矩形中，第一列可作出 $C_2^{a_1}$ 個特徵列，第二列可作出 $C_2^{a_2}$ 個特徵列，以此類推………

因此，當此矩形爲缺陷形時，必滿足下列不等式。

$C_2^{a_1}+C_2^{a_2}+C_2^{a_3}+C_2^{a_4}+C_2^{a_5}\le C_2^5$……….(2)

（因爲若無特徵矩形，則特徵列左右兩格位置兩兩不同，其和必不大於 C_2^5。）

我們把(2)式展開：

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\le 2C_2^5$

由哥西不等式得：

$\frac{1}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\le 2C_2^5$

將(1)代入，得：

$\frac{104}{5}\le 20$ 矛盾！！！

所以用2色去染這個5×5棋盤，一定含有特徵矩形。故"P(2)=5"！！

五、研究過程

1. m×n 矩形棋盤之探討：

(1)在本小節我們將探討用k種顏色去染一m×n的矩形棋盤；首先我們討論在什麼情形下是"賓果形"？（注：在此的〔 〕符號爲高斯記號。）

因爲我們用k色去染一個m×n矩形，一定存在一種顏色（稱爲A色）至少包含 $\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1$ 格子，我們設第m列上有 a_m 個A色方格(m=1,2,3………)，則：

$a_1+a_2+a_3+\dots\dots\dots\dots\dots+a_m\ge\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1$ ………. (5-1)

而我們從第m列上的A色方格中，任取兩格，作一個特徵列時可作出 $C_2^{a_m}$ 個特徵列，也就是說：

這m×n的矩形中，第一列可作出 $C_2^{a_1}$ 個特徵列，第二列可作出 $C_2^{a_2}$ 個特徵列，以此類推……

$C_2^{a_1}+C_2^{a_2}+\dots\dots\dots\dots+C_2^{a_m}>C_2^n$ ………. (5-2)

（因爲若無特徵矩形，則特徵列左右兩格位置兩兩不同，其和必不大於 C_2^5 ；

故大於 C_2^5 是"賓果形"之充分條件。)

我們將(5-2)展開得：

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_m^2)-(a_1+a_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_m)>2C_2^n$$

由哥西不等式得：

$$\frac{1}{m}(a_1+a_2+\ldots\ldots\ldots\ldots a_m)^2-(a_1+a_2+\ldots\ldots\ldots\ldots a_m)\le 2C_2^n$$

將5-1代入，得：

$$\frac{1}{m}\cdot(\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1)^2-(\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1)>2C_2^n$$

整理得：

$$\left[\frac{mn-1}{k}+1\right]\left[\frac{mn-1}{k}+1-m\right]>mn(n-1)$$

當k｜mn時，$\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1=\frac{mn}{k}$

當k∤mn時，$\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1=\left[\frac{mn}{k}\right]+1$

所以在任何情況之下，我們都有：

$$\left[\frac{mn-1}{k}\right]+1\ge\frac{mn}{k}$$

代入(5-3)得：

$$\frac{mn}{k}\cdot(\frac{mn}{k}-m)\ge mn(n-1)$$

整理得：

$$m(n-k)>k^2(n-1)$$

由上面之討論，我們得到如下之結論：

結論1：

當 $\left[\frac{mn-1}{k}+1\right]\left[\frac{mn-1}{k}+1-m\right]>mn(n-1)$ ……………(5-4)

或 $m(n-k)>k^2(n-1)$ ……………(5-5)

時，此m×n矩形必爲"賓果形"，反之若爲"缺陷形"則(5-5)，(5-4)必不成立。

⑵以上判別方式可適用於任何的m×n矩形，而其中有兩種情形可用更方便

快捷的判別方法，我們再詳述如下：

《1》m＞P(k)，n＞P(k)時：

由於m＞P(k)，n＞P(k)，而P(k)，P(k)已知爲“賓果形”，所以(m, n)可以表爲(P(k)+x，P(k)+y)(x≧0，y≧0)，但(P(k)，P(k))已經爲“賓果形”，故在其兩旁再加x、y行，同樣是“賓果形”，故(m, n)爲“賓果形”。

結論2：

當m＞P(k)，n＞P(k)時，m×n長方形必含特徵矩形。

《2》m＜P(k)，n＜P(k)時：

若m＜P(k)，n＜P(k)，則m≦P(k)−1，n≦P(k)−1若m×n爲賓果形，則同(3)之理由知(P(k)-1)×(P(k)-1)必爲賓果形和P(k)的定義矛盾，所以知m×n必爲缺陷形。

結論3：

當m＜P(k)，n＜P(k)時，必有一m×n長方形，不含特徵矩形。

2.函數P(k)的推導：

在前段我們討論了如何由p(k)來判斷任意矩形；一定會有很多人問；要如何求出P(k)的數值呢？對於這個問題，我們在此段中將會循序漸進的從不同的角度來討論：

(1)首先，我們嘗試利用結論1來推導：

我們將m=n P(k)，並將不等式改爲等式代入(5-5)得：

$$P(k)(P(k)-k)>k^2(P(k)-1) \qquad \text{.......(5-6)}$$

由於P(k)是邊長最小的賓果形正方形的邊長，爲求取使上式成立之最小的n值，我們去解：

方程式 $$x(x-k)=k^2(x-1)$$

或 $$x^2-(k+k^2)x+k^2=0$$

得 $$x=\frac{k}{2}(\sqrt{k^2+2k-3}+k+1) \qquad \text{............(5-7)}$$

$$\because (k+1-\frac{2}{k})^2=k^2+1-\frac{4}{k^2}+2k-4-\frac{4}{k}$$

$$=k^2+2k-3-\frac{4}{k^2}-\frac{4}{k}$$

$$<k^2+2k-3$$

$$\therefore k+1-\frac{2}{k}<\sqrt{k^2+2k-3}<k+1 \qquad \text{........(5-8)}$$

將(5-8)代入(5-7)，我們得知 $k^2+k-1<x<k^2+k$ ....(5-9)

由(5-9)我們得知P(k)≦ k^2+k

若將m=n代入(5-4)時我們得：

$$\left(\left[\frac{n^2-1}{k}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n^2-1}{k}\right]+1-n\right)>n^2(n-1) \quad ....(5\text{-}10)$$

由於滿足(5-6)之最小的n值，可能大於滿足(5-10)最小的n值，因此我們試著去驗證：

$n=k^2+k-1$ 和 $n=k^2+k-2$ 時(5-10)是否成立？

當 $n=k^2+k-1$ 時

$$\begin{aligned}
n^2-1 &= k^4+k^2+1+2k^3-2k^2-2k-1 \\
&= k^4+2k^3-k^2-2k
\end{aligned}$$

$$\therefore \left[\frac{n^2-1}{k}\right]=k^3+2k^2-k-2$$

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\frac{n^2-1}{k}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n^2-1}{k}\right]+1-n\right) \\
&=(k^3+2k^2-k-1)(k^3+2k^2-k-1-k^2-k+1) \\
&=(k^3+2k^2-k-1)(k^3+k^2-2k) \\
&=k(k^3+2k^2-k-1)(n-1) \\
&=(n^2+k-1)(n-1) \\
&>n^2(n-1)
\end{aligned}$$

當 $n=k^2+k-2$ 時

$n^2=k^4+2k^3-3k^2-4k+4$

當 k>3

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\frac{n^2-1}{k}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n^2-1}{k}\right]+1-n\right)-n^2(n-1) \\
&=(k^3+2k^2-3k-3)(k^3+k^2-4k-1)-(k^4+2k^3-3k^2-4k+4)(k^2+k-3) \\
&=k(k^3+2k^2-3k-3)(k^2+k-3)-(k^3+2k^2-3k-3)(k+1) \\
&\quad -k(k^3+2k^2-3k-3)(k^2+k-3)+(k-4)(k^2+k-3)<0
\end{aligned}$$

由此可知：P(k)≦ k^2+k-1

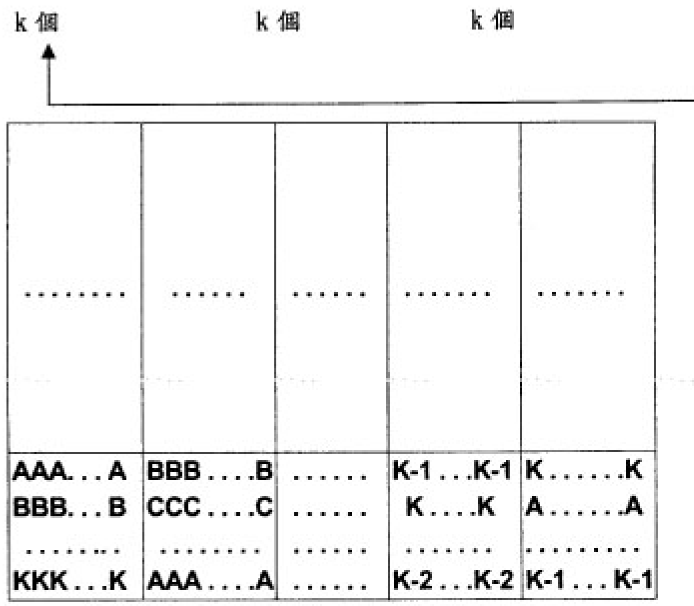
結論4：

P(k)≦ k^2+k-1

⑵接下來，我們探討P(k)的下界；在此節中，我們將介紹一種塗法，可以用k色去染出 $k^2 \times k^2$ 的“缺陷形”：

首先，將欲塗之 $k^2 \times k^2$ 方格垂直分成K部分，並在下方 $k^2 \times k^2$ 的長方形內填入A,B,C,D,E,…… k－1, k（其塡法如下圖，我們將它分成K×K的小不部分，依序向右循環塡入

A,A,A,A,A,A,A,A……A,B,B,B,B,B……B,C,C,C,C,C,……C,……K,K,K,K,K,……K)



（圖5-1）

⑶在圖形上方的部分：我們先將K種顏色全部塗入K個格子中其塗法有K！種；而而在 K^2-K列中，我們要去找出任兩列均不含兩個以上相對位置同色的塗法：首先，我們假設任兩列均不含兩個以上相對位置同色的塗法有x種；若我們要將m個顏色塗入n個格子(n≦m)中，且使x最大的方法是：自m個顏色中任取兩個顏色塗入一列中的任兩個方格，則有 $2C_2^m$ 種塗法，因爲x要最大，所以，同一列中同一種塗法不可重覆（如塗成：AC，A□C，□AC……才可以）故在x列中同一種塗法最多重覆 C_2^n，因此 $2C_2^m C_2^n$ ＝X 列中任取兩格的數目； $\therefore 2C_2^m C_2^n = xC_2^n$ $\therefore x = 2C_2^m$ 即：最大的x爲 $2C_2^m$，設 m=k $x=2C_2^k = k(k-1)$，所以一定有 k^2-k 種塗法，使得兩相對位置不同色，將此塗法插入圖5-1的上方空白處 $(k^2-k)\times k$ 的矩形內，以後每 $(k^2-k)\times k$ 的區域中各格的塡法，均與前一區域的對應格中的顏色不同，並按A→B→C……→K→A……的方式依序循環塡寫，則可得出一個 $k^2\times k^2$ 的“缺陷形”。

```
  ⋮    ⋮            ⋮    ⋮            ⋮    ⋮            ⋮    ⋮
...A...B...      ...A...A...      ...C...A...      ...C...A...
...A...B...      ...A...A...      ...C...B...      ...A...C...
  ⋮    ⋮            ⋮    ⋮            ⋮    ⋮            ⋮    ⋮
```

相對位置同色的情形　　　　　　　　相對位置不同的情形

(圖5-2)

說明：若依照我們的循環A→B→C→⋯→K→A⋯圖5-2中相對位置同色的情形，經過循環後，其中一列便會與另一列有兩相對位置同色，即可構成一特徵矩形。

所以在每一列$k \times k^2$的小區域中必不可有兩相對位置同色的兩列；即用此途法必可得出一個$k \times k^2$的"缺陷形"。

結論５：

$k^2 < P(K)$

綜合結論４與結論５我們知道：P(K)存在的範圍是$k^2 < P(k) \leq k^2 + k - 1$

六、結論

綜合上面結果我們有以下結論：

一、若m，n **0** N

對m×n的矩形(m＞n)而言：

1.滿足$\left[\frac{mn-1}{k}+1\right]\left[\frac{mn-1}{k}+1-m\right] > mn(n-1)$ 此m×n矩形必爲"賓果形

2.若此m×n矩形爲"缺陷形"則必不滿足：

$$\left[\frac{mn-1}{k}+1\right]\left[\frac{mn-1}{k}+1-m\right] > mn(n-1)$$ 條件

3.當m＞P(k)，n＞P(k)時，m×n矩形必是"賓果形"。

4.當m＜P(k)，n＜P(k)時，必有一m×n矩形，爲"缺陷形"。

二、我們用k種顏色去染一n×n的正方形的方格棋盤，一定包含特徵矩形的最小正方形的邊長P(k)之值滿足：$k^2 < P(k) \leq k^2 + k - 1$　　($k \in N$)。

七、展望

在這次的研究中，我們已經能判斷任意m×n矩形，含不含特徵矩形；並已

求得包含特徵矩形的最小正方形邊長的值所存在的範圍；對於以後的研究，我們認爲可以嘗試下列幾個方向：

⑴將特徵矩形的形狀推廣，或改變特徵矩形的定義，做不同方的探討。

⑵若一m×n棋盤包含特徵矩形，是否其特徵矩形只有一個？若不是，那會有幾個特徵矩形？（因爲當我們用兩色去染邊長爲5的正方形時，我們發現，不管如何去染都會出現兩個特徵矩形）。

希望更高明的讀者，能一起投入研究的行列。

八、參考資料

1.使人聰明的智力遊戲——張遠南著。

2.培養數學上的機智——九章出版社。

3.數學中的智巧——R.亨斯貝爾格　著。

4.數學解題思維方法——龐之垣著。

5.數學萬花筒——凡異出版社。

6.高中數學課本第四冊（排列組合）——國立編譯館。

評語

本文作者由棋盤上的格子顏色以及在生活中看到不同顏色的正方形磁磚鑲嵌成四個角落同色的大正方形而引出特徵矩形的定義，並討論特徵矩形的存在條件。研究者把問題的討論相當完整的表達且研究內容具創意並能適當推廣是一件難得的優良作品。

回上一層