乾坤大挪移

高中組數學科第二名

省立屏東高級中學　　作　　者：林信吉、李士昌
指導教師：張淑娟

一、研究動機

在“教學思考”一書中，有一個建中科展得獎作品（國際科展加拿大正選）『走走跳跳』，它的問題是從以下的“跳棋遊戲”開始的：

現在有五粒黑棋子及五粒白棋子一共十粒棋子，將它們放入一塊有十一個洞的木板上，五黑子置於其中一側的五個洞中，五白子放在另一側的五個洞裡。我想要將黑子及白子的位置互換但只能將棋子移到相鄰的洞或跳過一個棋子到另一個洞中。我能交換成功嗎？

以這個問題為出發點，令g(m.1.n)表示在m個黑棋、n個白棋、中間有一個空格的情況下，交換黑、白棋所需的最小步數，g(m.s.n)表示在m個黑棋、n個白棋、中間有s個空格的情況下、交換黑、白棋子所需的最小步數、所得之研究結果如下：

（一）$g(m.1.n)=m^2+2m$

（二）$g(m.1.n)=(m+1)(n+1)-1$

（三）$\forall s\geqslant r.g(m.r.n)=g(m.r.n)+(s-r)\{[\frac{m+1}{2}]+[\frac{n+1}{2}]\}$

（四）$g(m.s.n)=mn+ns+ms-x$

這個問題引起我們強烈的研究興趣，因此決定以此為出發點，嘗試研究以其它不同的觀點推導黑白子交換所須的最小步數。同時由於在此作品中，研究結果之3與4均與實際走的情形有形不符，而g(m.s.n)=mn+ns+ms-x，其中x為一無法確定的變因　，使得公式無法完全確定。因此我們決定針對此缺失加以研究，並將公式完整的推導出來。

二、研究目的

我們令f(n.1.n)表示在n個黑棋、n個白棋，中間有一個空格的情況下，交換黑　、白棋子所需的最小步數。f(m.1.n)表示在m個黑棋、n個白棋，中間有r

格的情形下，交換黑、白棋子所需的最小步數。因此研究目的如下：

（一）以1S-J法，2棋子的顏色，3空格位置的分析等三種不同的方法來推導m=n（左右兩邊棋數相同），r=1（中間空一格）的走法及所須之最小步數。

（二）找出f(m.1.n)的情形下，棋子所走的路徑。

（三）以不同的觀點推導一般f(m.1.n)的走法及所須之最小步數。

（四）探討推廣至一般f(m.r.n)情形的走法及所須之最小步數。

（五）利用電腦程式驗證推導結果。

三、研究過程及方法

（一）1.以S（移動）和了（跳躍）的觀點推導最小步數：

令f(n.1.n)表示左右兩邊各有n個白棋，n個黑棋，中間空一格的情形中，交換黑白棋所需的最小步數。而S(Silde)表移動，J(Jump)表示跳躍。以n=1，n=2爲例。

(1)n=1

第一步		●	○	S
第二步	○	●		J
第三步	○		●	S

(2)n=2

第一步	●		●	○	○	S
第二步	●	○	●		○	J
第三步	●	○	●	○		S
第四步	●	○		○	●	J
第五步		○	●	○	●	J
第六步	○		●	○	●	S
第七步	○	○	●		●	J
第八步	○	○		●	●	S

n	S(移動)和J(跳躍)的形式	移動	跳躍	總步數
1	SJS	2	1	3
2	SJSJJSJS	4	4	8
3	SJSJJSJJJSJJSJS	6	9	15
4	SJSJJSJJJSJJJJSJJJSJJSJS	8	16	24
.		.	.	.
.		.	.	.
n		2n	n^2	n^2+2n

因此，總步數=跳躍步數+移動步數

$\therefore f(n.1.n)=n^2+2n$

2.以棋子顏色的觀點推導最小步數：

令B表黑棋，W表白棋，則黑白棋子走的情形如下：

(1)n=1

第1步		●	○	B（移動黑棋）
第2步	○	●		W（移動白棋）
第3步	○		●	B（移動黑棋）

(2)n=2

第1步	●		●	○	○	B
第2步	●	○	●		○	W
第3步	●	○	●	○		W
第4步	●	○		○	●	B
第5步		○	●	○	●	B
第6步	○		●	○	●	W
第7步	○	○	●		●	W
第8步	○	○		●	●	B

此所得情形如下：

n=1　　BWB

n=2　　BWWBBWWB

n=3　　BWWBBBWWWBBBWWB

n=4　　BWWBBBWWWWBBBBWWWWBBBWWB

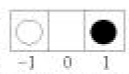
所以，以指數的形式表示n=4的情形爲$B\ W^2\ B^2\ W^4\ B^4\ W^4\ B^2\ W^2\ B$，因此可得其最小步數爲：$(1+2+3+4)+4(4+3+2+1)=24$

$$\therefore f(n.1.n)=(1+2+\cdots\cdots+(n-1)+n)+n+(n+(n-1)+\cdots+2+1)$$

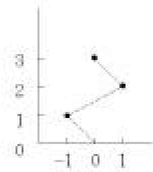
$$=2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+n=n^2+2n$$

3.以空格的觀點推導最小步數：

首先，將棋子座標化，例如：



則n=1的最小步走法如下：（空格位置移動的情形）



所以n=1時，空格的位置-1有1次；

0有2次，

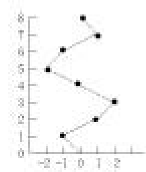
1有1次，

而n=2的最小步走法如下：（空格位置移動的情形）

所以n=2時，空格的位置-2有1次，-1有2次，

0有3次，1有2次，

2有1次，



因此，得到的結果如下：

n	空格的位置的次數 -3 -2 -1 0 1 2 3
1	1 2 1
2	1 2 3 2 1
3	1 2 3 4 3 2 1
n	12　　nn+1n　　21

因此，當左右兩邊各有n棋子時，空格位置的狀態數爲：

$1+2+\cdots+n+(n+1)+n+\cdots+2+1=n^2+2n+1$

又因爲空格從一個位置移到下一個位置產生一個棋子的移動或跳躍，所以，空格的狀態數減去1即爲棋子所走之步數。

$\therefore f(n.1.n)=n^2+2n+1-1=n^2+2n$

（二）一般m．n（左右兩邊棋數任意），r =1中間空一格的情形

將(n.1.n)的情形推廣至(m.1.n)的情形，因為：

1.總步數＝移動數＋跳躍數。

2.同色棋不能有自我跳躍的情形。

因此跳躍數＝m、n（互相躍過對方棋子），又總移動數=m(n+1)+n(m+1)

所以總步數f(m.1.n)=m(n+1)+n(m+1)-mn=m+mn+n又與電腦驗證所得結果相符。

1.而在空格＝1時從棋子之間的行進圖（如下圖）我們發一些特殊的行進關係：

	-3	-2	-1	0	1	2
原始狀態	m_3	m_2	m_1		n_1	n_2
m_1 -1→ 0	m_3	m_2		m_1	n_1	n_2
n_1 1 →-1	m_3	m_2	n_1	m_1		n_2
n_2 2 →-1	m_3	m_2	n_1	m_1	n_2	
m_1 0 → 2	m_3	m_2	n_1		n_2	m_1
m_2 -2→ 0	m_3		n_1	m_2	n_2	m_1
m_3 -3→-2		m_3	n_1	m_2	n_2	m_1
n_1 -1→-3	n_1	m_3		m_2	n_2	m_1
n_2 1 →-1	n_1	m_3	n_2	m_2		m_1
m_2 0 → 1	n_1	m_3	n_2		m_2	m_1
m_3 -2→ 0	n_1		n_2	m_3	m_2	m_1
n_2 -1→-2	n_1	n_2		m_3	m_2	m_1

我們發現n族與m族在交插時會出現交插的情況（稱此為m族與n族"主路線"所組成之），因此利用此推得f(m.1.n)之公式：

(1)當m．n為偶數時：

$f(m.1.n)=m(\frac{n}{2}+1)+n(\frac{m}{2}+1)=m+mn+n$

(2)當m為偶數，n為奇數時：

$f(m.1.n)=\frac{m}{2}(\frac{n+1}{2})+\frac{m}{2}(\frac{n+3}{2})+n(\frac{m}{2}+1)=m+mn+n$

(3)當m為奇數，n為偶數時：

$f(m.1.n)=\frac{n}{2}(\frac{m+1}{2})+\frac{n}{2}(\frac{m+3}{2})+m(\frac{n}{2}+1)=m+mn+n$

(4)當m．n為奇數時：

$f(m.1.n)=(\frac{m+1}{2})+(\frac{n+1}{2})+(\frac{m-1}{2})(\frac{n+3}{2})+(\frac{n-1}{2})(\frac{m+3}{2})-(\frac{n-1}{2})(\frac{m+1}{2})=m+mn+n$

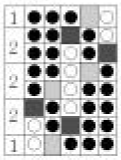
由(1)(2)(3)(4)知f(m.1.n)=m+mn+n

2.從空格的觀點推導最小步數：

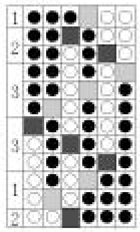
在推導最小步的過程中，我們發現若從棋子來推導步數，似乎無規則性可言。但若從空格的觀點來看，不但可將整個最小步數的路徑分析出，還可藉此推導最小步數。

以m=3（黑棋有3個）為例：

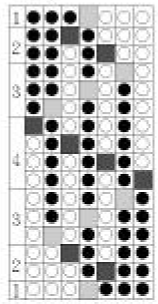
n=1



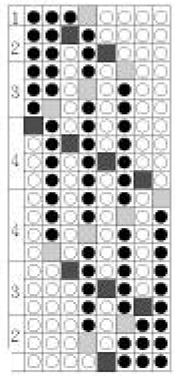
n=2



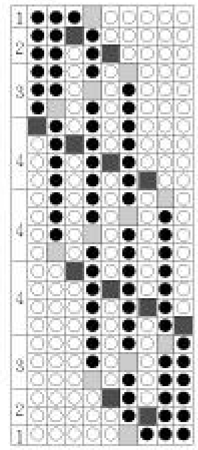
n=3



n=4



n=5



因此當黑棋固定爲m
可得如下狀態數：

	當 n=1	n=2
m=1	1 2 1	1 2 2 1
m=2	1 2 2 1	1 2 3 2 1
m=3	1 2 2 2 1	1 2 3 3 2 1
m=4	1 2 2 2 2 1	1 2 3 3 3 2 1
m=5	1 2 2 2 2 2 1	1 2 3 3 3 3 2 1
m=6	1 2 2 2 2 2 2 1	1 2 3 3 3 3 3 2 1
m=7	1 2 2 2 2 2 2 2 1	1 2 3 3 3 3 3 3 2 1
m=8	1 2 2 2 2 2 2 2 2 1	1 2 3 3 3 3 3 3 3 2 1

	當 n=3	n=4
m=1	1 2 2 2 1	1 2 2 2 2 1
m=2	1 2 3 3 2 1	1 2 3 3 3 2 1
m=3	1 2 3 4 3 2 1	1 2 3 4 4 3 2 1
m=4	1 2 3 4 4 3 2 1	1 2 3 4 5 4 3 2 1
m=5	1 2 3 4 4 4 3 2 1	1 2 3 4 5 5 4 3 2 1
m=6	1 2 3 4 4 4 4 3 2 1	1 2 3 4 5 5 5 4 3 2 1
m=7	1 2 3 4 4 4 4 4 3 2 1	1 2 3 4 5 5 5 5 4 3 2 1
m=8	1 2 3 4 4 4 4 4 4 3 2 1	1 2 3 4 5 5 5 5 5 4 3 2 1

	當 n=5	n=6
m=1	1 2 2 2 2 2 1	1 2 2 2 2 2 2 1
m=2	1 2 3 3 3 3 2 1	1 2 3 3 3 3 3 2 1
m=3	1 2 3 4 4 4 3 2 1	1 2 3 4 4 4 4 3 2 1
m=4	1 2 3 4 5 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 5 5 4 3 2 1
m=5	1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 6 6 5 4 3 2 1
m=6	1 2 3 4 5 6 6 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 6 7 6 5 4 3 2 1
m=7	1 2 3 4 5 6 6 6 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 6 7 7 6 5 4 3 2 1
m=8	1 2 3 4 5 6 6 6 6 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 6 7 7 7 6 5 4 3 2 1

所以 $n=0$ $1(m+1)$個狀態數

$n=1$ $2(m+1)$個狀態數

$n=2$ $3(m+1)$個狀態數

$\vdots$ $\vdots$

$n=n$ $(n+1)(m+1)$個狀態數 $\therefore f(m,1,n)=(n+1)(m+1)-1=mn+m+n$

（三）推廣至一般m，n（左右兩邊棋數任意），空r格的情形

1.f(m.r.n)的推導：

我們由電腦中驗算建中作品的行進邏輯，發現其總步數與電腦所行進的總步數有差距。換句話說，原作者的行進邏輯多出一些不必要的步數，因此我們改良原作者的缺點，並且利用之前主路線的觀念推得出f(m.r.n)的一般式：

其式爲$f(m.r.n)=m+mn+n+\left[\frac{(r-1)(m+n)}{2}\right]$

2.f(m.r.n)的改良：

但是當我們利用電腦驗證$f(m.r.n)=m+mn+n+\left[\frac{(r-1)(m+n)}{2}\right]$時，我們發現當m＜r，n＜r和空格數介於m，n兩者棋數之間時此式不成立。因此我們便試著從其中找出步數之間的差距在何處。

經由我們整理歸納出四大步驟：

⑴n族形成主路線。

⑵m族的前進及其與n族的第一次交插跳躍。

⑶n族的最後跳躍與平移及其與m族的最後交插跳躍。

⑷m族由分散集合回一族及m族的最後前進。

因此所得結果爲：

⑴n族形成主路線：

n∈偶數：n族的最小步數爲 $\frac{2nr-n^2}{4}+\frac{n}{2}$

n∈奇數：n族的最小步數爲 $\frac{2nr-n^2}{4}+\frac{2r+1}{4}$

原始狀態

n族排出主路線

（黑棋爲m族，白棋爲n族）

⑵m與n的第一次交插跳躍：

m∈ 偶數：m族的最小步數爲 $mn-\frac{m^2-2m}{4}$

m∈ 奇數：m族的最小步數爲 $mn-\frac{(m-1)^2}{4}$

n族排出主路線

m，n交插跳躍

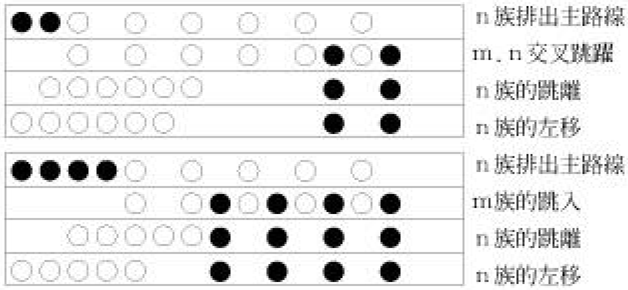
⑶m與n的最後交叉跳躍及n的最後平移：

n∈偶數：n族的最小步數爲$\frac{n^2-2n}{4}+(m-1)\frac{n}{2}$

n∈奇數：A.n＞2m　　n族的最小步數爲$\frac{(n+1)^2}{4}+(m-1)\times\frac{n+1}{2}$

B.n＜2m　　n族的最小步數爲$\frac{(n+1)^2}{4}+m\times\frac{n-1}{2}$

-128-



(4)m族的最後跳躍：

m∈ 偶數：m族的最小步數為$\frac{m^2+2m}{4}+[\frac{m}{2}](r-n-1)$

m∈ 奇數：m族的最小步數為$\frac{m^2+2m}{4}+[\frac{m+1}{2}](r-n-1)$

由(1)(2)(3)(4)知

(a)m, n∈ 奇數：

$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]+r-n+\frac{m-1}{2}$

(b)m, n∈ 偶數：

$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]$

(c)n∈ 偶數，m∈ 奇數：

$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]+[\frac{r-n}{2}]$

(d)n∈ 奇數，m∈ 偶數：

(*i*)$n>2m$：$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]+[\frac{r-n+m+1}{2}]$

(*ii*)$n<2m$：$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]+[\frac{r-m+2}{2}]$

四、研究結果

（一）以1.S-J法2.棋子的顏色3.空格位置的分析三種不同的方法推導出 $f(m.1.n)=n^2+2n+1-1=n^2+2n$

（二）以兩種不同的觀點推導出$f(m.1.n)=m+mn+n$

（三）找出$f(m.1.n)$的情形下棋子所走的路徑。

（四）1.當$m\geq r$，$n\geq r$時，其式為$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(r-1)(m+n)}{2}]$

2.當$m<r$，$n<r$時，

(1)m, n∈ 奇數：$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(r-1)(m+n)}{2}]+r-n+\frac{m-1}{2}$

(2)m, n∈ 偶數：$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]$

(3)n∈ 偶數，m∈ 奇數：$f(m.r.n)=m+mn+n+[\frac{(m+n)(r-1)}{2}]+[\frac{r-n}{2}]$

(4) $n\in$奇數. $m\in$偶數：

A. $n>2m, f(m.r.n)=m+mn+n+\left[\frac{(m+n)(r-1)}{2}\right]+\left[\frac{(r-n)(m+1)}{2}\right]$

B. $n<2m, f(m.r.n)=m+mn+n+\left[\frac{(m+n)(r-1)}{2}\right]+\left[\frac{r-m+2}{2}\right]$

（五）電腦模擬程式。

五、未來研究方向

（一）在本研究中棋子的走法為一次跳一格及移動一格視為一步，未來可嘗試一次跳一或二格及移動一格視為一步，來探討其最小步的走法。

（二）在本研究中僅限於直線型，因此可以嘗試推廣至矩陣型或其他。

評語

（一）本文作者由一件科展得獎作品—交換黑白子所需最小步數，考慮它的一般狀況下的解，比較特殊狀況下的作法，作者由另一角度切入，突破特殊作法的限制，這是作者能處理一般狀況的原因。

（二）由於問題的難度頗高，作者的解答未盡完備，然而作者在處理問題的過程中，已表現其潛力，想法頗具創意。

回上一層