

實驗探討影響共鳴空氣柱 有效長度的變因

高中組物理科第三名

省立嘉義高中

作者：許棠為、呂政勳、張凱堯、薛富仁
指導教師：李文堂、林芳妃

一、研究動機

高中物理實驗十五共鳴空氣柱〔註1〕，已知頻率 f 的音叉在圓柱形共鳴管口振動，調整共鳴管水位，當有最大共鳴聲時，量出空氣柱長 $\ell = \frac{\lambda}{4}$ ，由聲速 $V_t = f \lambda = 4 f \ell$ 和 $V_t = 331 + 0.6t$ （ t 為空氣溫度）做比較，結果相去甚遠。另取玻璃瓶（非圓柱狀）盛水，相同音叉在瓶口振動，共鳴時的空氣柱長度和圓柱形不同，引起我們進一步研究的興趣。

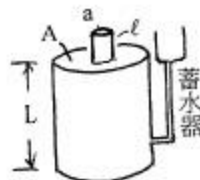
二、研究目的

1. 實驗探討圓柱形共鳴管截面半徑對空氣柱長度的影響。
2. 理論及實驗探討兩不同截面半徑但同軸的圓柱形容器—荷姆霍茲共鳴器；發音頻率和空氣柱長度，體積的關係，並研究開口處半徑對空氣柱長度的影響。
3. 實驗探討並非圓柱形玻璃瓶發音頻率和空氣柱長度的關係。

三、研究設備器材

1. 長1公尺，內半徑分別為0.775公分，1.580公分，2.168公分的圓柱形共鳴管各一隻，附蓄水器可調整水位以改變空氣柱長度。

2. 不鏽鋼製荷姆霍茲共鳴器三個，大圓柱截面積 A ，長度 L ，小圓柱截面積 a ，長度 ℓ ，附有透明塑膠管及蓄水器，一方面可調整大圓柱的空氣柱長 (L) ，另可顯示總空氣柱長度 $L' = \ell + L$ 。



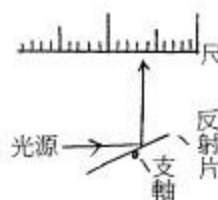
〔圖一〕

3. 音叉一套8隻，上有頻率標示256赫至512赫誤差±1赫。

4. 頻率偵測器：Seiko ST747（每具台幣1200元）為市售供吉他調音用，配合頻率換算表〔附錄1〕可換算出共鳴音的頻率，誤差±1赫。

5. 自製振幅偵測器：（以下簡稱光槓桿）

半徑分別為0.6公分、1.2公分、1.8公分的圓形薄反射片（可利用底片或任何可反射光的輕亮片製成）黏一支軸，調整支軸位置使反射片和水平成45度，支軸置於共鳴管口，當共鳴管空氣分子最大運動自由度時，由於白努利原理，反射片會偏轉，用光照射反射片反射光在尺上有甚顯著的位移（光槓桿原理）。



〔圖二〕

6. 空氣壓縮機一具，出氣口用橡皮管連接一銅管，將銅管壓扁，置於共鳴管口和管口平行吹氣，可穩定發出共鳴音。

7. 雷射光筆一隻。

8. 銅管一隻，長30.72公分，內徑1.915cm（20℃）底部密封。

9. 溫度計、燒杯、量筒、游標尺、橡皮筋。

四、實驗

甲、實驗一

（一）目的：探討圓柱形共鳴管半徑對空氣柱長度的影響。

（二）原理：

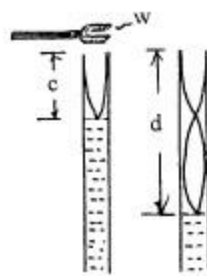
1. 寬頻率 f 的音叉在共鳴管口振動產生平面波，遇水面反射時，形成駐波，水面為波節，當管口有最大共鳴聲時，由於開口端的發散(divergent)現象，腹點在管口上端 σ 處，因此， $c + \sigma = l = \frac{\lambda}{4} \dots \dots \dots (a)$ 同理水面降至 d 又有共鳴聲， $d + \sigma = \frac{3\lambda}{4} \dots \dots \dots (b)$

$$\text{由(a)(b)可得 } \sigma = \frac{d - 3c}{2} \dots \dots \dots (1)$$

2. 共鳴管開口處半徑 r ， c （或 d ）為看（量）到的空氣柱長度， $c + \sigma = l$ 為有效空氣柱長度。

3. 聲學文獻〔註2〕有關共鳴管半徑(r)對空氣柱長度(l_e)的影響的記載相當分歧，A.B Wood認為 $\frac{\sigma}{r} = 0.58$ ，而Paul E. Wack則高達 $\frac{\sigma}{r} = 1.4$ 。

4. 耳朵對共鳴聲的靈敏度不夠好，當共鳴管發出共鳴聲時，水位再升降0.5



〔圖三〕

公分常不易查覺共鳴聲的變化，在管口置放光槓桿，當空氣分子振動最劇烈時，由於白努利原理反射片會產生擺動，經雷射光照射反射片後，會有很顯著的偏轉，（水位升降1毫米即可查覺）。由反射光點的最大位移，可準確的找出空氣分子振動最大的空氣柱長。

（三）實驗步驟：

1. 在共鳴管口放置光槓桿，反射片和水平成45度，雷射光照射後，反射光照射天花板上的尺。
2. 用相同的力，同一橡皮槌敲擊音叉並升降蓄水器，當水位降至C時，光點位移最大量出C。
3. 再調降水位至d時，光點位移最大。
4. 改換不同半徑的圓柱管，重做上述實驗。
5. 量溫度(t)、管半徑(r)、音叉寬度(w)。
6. 改用寬度較小的音叉，重做實驗。
7. 用同寬度產生同振幅但不同頻率的二音叉，在共鳴管口振動，求出 σ 以比較波長對修正項的影響。

（四）實驗結果：

1. 表一：三隻不同半徑的圓柱管以相同音叉產生共鳴音叉 $f=348.45$ 赫，寬 $w=2.47$ 公分

	r (cm)	c (cm)	d (cm)	σ (cm)	σ/r	$w/2r$	t (°C)
1	0.775	24.10	72.80	0.25	0.323	1.594	24.10
2	1.580	23.30	72.45	1.28	0.807	0.782	21.42
3	2.168	22.91	72.87	2.07	0.955	0.570	21.20

2. 表二：三隻不同半徑的圓柱管，以寬度較小的音叉振動音叉 $f=480$ 赫，寬 $w=0.55$ 公分。

	r (cm)	c (cm)	d (cm)	σ (cm)	σ/r	$w/2r$	t (°C)
1	0.775	17.80	53.85	0.23	0.297	0.355	25.88
2	1.580	17.09	53.27	1.00	0.633	0.174	25.88
3	2.168	16.66	52.93	1.57	0.724	0.127	26.90

3.(1)表三：振幅相同，頻率不同的二音叉在圓柱形管口振動

$r=1.580\text{cm}$ ， $w=0.55\text{cm}$ ， $w/2r=0.174$ ， $t=25.88^\circ\text{C}$

$f(\text{Hz})$	$C(\text{cm})$	$d(\text{cm})$	$\sigma(\text{cm})$	σ/r
480	17.09	53.27	1.00	0.633
320	26.15	80.43	0.99	0.627

乙、實驗二

(一)目的：利用一套八隻寬度相同（但均小於三圓柱管直徑）的音叉，探討共鳴管半徑對空氣長度的影響。

(二)原理：

1.音叉寬度愈小振動時振幅小，產生的共鳴聲亦小， $d+\sigma=\frac{3}{4}\lambda$ 時，管口氣體分子振動量使光槓桿偏轉的位移亦很小，實驗不易。

2.音叉在管口振動，管中水位降至 $c+\sigma=\ell=\frac{\lambda}{4}=\frac{v_t}{4f}$ 時有共鳴聲（光槓桿最大偏轉）， $c=\frac{v_t}{4f}-\sigma$ (2)

3.已知頻率的八隻音叉分別在管口振動，量取 c 及記下對應的 f 值，以 c 為縱軸， $\frac{1}{f}$ 為橫軸，畫出 $c-\frac{1}{f}$ 關係圖，其縱軸的截距為 σ ，斜率 $\frac{v_t}{4}$ 。

(三)實驗步驟：

1.光槓桿置於圓形共鳴柱管口，八隻音叉分別在管口振動，升降蓄水器，光槓桿之反射光點最大偏轉時，記下共鳴柱長度 c ，記下音叉頻率。

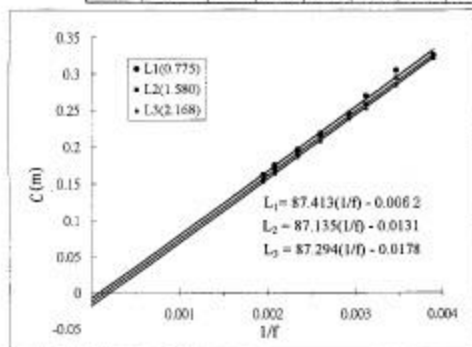
2.換半徑不同的圓柱管，重做上述實驗。

(四)實驗結果：

1.表四：八隻音叉在圓柱形管口的振動

音叉寬度 $w=0.55\text{公分}$ ， $t=23.00^\circ\text{C}$

R (cm)	$f(\text{Hz})$	$C(\text{cm})$	256	288	320	341.3	384	426.6	480	512
0.775	1號管	0.326	0.305	0.270	0.245	0.218	0.196	0.172	0.162	
1.580	2號管	0.322	0.295	0.250	0.245	0.214	0.192	0.168	0.155	
2.168	3號管	0.325	0.285	0.253	0.239	0.208	0.187	0.165	0.154	



圖四：八隻音叉在圓柱管口振動之 $c-\frac{1}{f}$ 關係

丙、實驗三

(一) 目的：在圓柱形共鳴管口水平方向吹氣，管內發出共鳴音，探討管半徑對氣柱長度的影響。

(二) 原理：

1. 在管口吹氣時，管內空氣振動亦可形成駐波，水面處亦為波節，當共鳴聲最大時，氣柱長 c ，加上修正項 σ 等於有效長度 $\ell_e = \frac{\lambda}{4}$ 。

$$2. v_t = f \lambda = 4f(c + \sigma) \rightarrow c = \frac{v_t}{4} \cdot \frac{1}{f} - \sigma$$

3. 由 $c - \frac{1}{f}$ 圖的斜率可得 $\frac{v_t}{4}$ ，截距可得 σ 。

(三) 實驗步驟：

1. 調整圓柱形共鳴管水位使空氣柱長度 $=c$ 。
2. 空氣壓縮機的出氣口連一銅管，銅管固定在共鳴管口上方2mm處，水平吹氣。
3. 用頻率偵測器量出共鳴音的頻率 f 。
4. 改變水位得不同的 c ，並量出 f 。
5. 作 $c - \frac{1}{f}$ 圖。

(四) 實驗結果：

1. 表五：在圓柱形管口吹氣

$r=0.775$ 公分， $t=21.7^\circ\text{C}$

c (公分)	10.00	12.50	15.00	17.50	20.00	22.50	25.00	30.00
f (赫)	817.6	662.8	558.0	464.9	417.2	374.0	333.2	277.0

丁、實驗四

(一) 目地：探討荷姆霍茲共鳴器管口半徑氣柱長度之關係。

(二) 原理：

1. 荷姆霍茲共鳴器如右圖所示為兩大小不同圓柱一端(小圓柱端)開口的容器。



2. 實驗一～三的圓柱形管的共鳴發音是屬於縱波的駐波，而荷姆霍茲共鳴器則為受迫振盪(forced oscillation)。

3. 在管口吹氣(或以音叉振動時)，小圓柱內氣體的質量 $m = \rho A \ell$ 上下振動，大圓柱的氣體則相當於彈簧一質量系統中力常數 k 的彈簧。小圓柱氣體質量 m 做簡諧運動 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ 在附錄2中我們推導出 $f = \frac{v_t}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{V \ell}}$ (3)

4. 在實驗一～三中駐波 $f = \frac{V_{\lambda}}{4\ell}$ ，其中 $\ell_c = c + \sigma$ 在荷姆霍茲共鳴器中，因小圓柱上下振動亦會發散，所以用有效氣柱長 $\ell_c = c + 2\sigma$ 來代替 ℓ 。（因小圓柱上下兩端為自由端所以用 2σ ）。

5. 由(3) $f = \frac{V_{\lambda}}{4\ell_c} = \frac{V_{\lambda}}{4\ell_c} \cdot \frac{a}{V\ell} = \frac{V_{\lambda}}{4\ell_c} \cdot \frac{a}{AL\ell}$ 由管口向下量總長度 $L' = L + \ell = \frac{V_{\lambda} a}{4\pi^2 AL} \cdot \frac{1}{f^2} + \ell$ 將 ℓ 改成 ℓ_c 。

則 $L' = L + \ell = \frac{V_{\lambda} a}{4\pi^2 AL} \cdot \frac{1}{f^2} + \ell_c \cdots \cdots (4)$

6. 升降蓄水器的高度改變水位，可改變 L' 所以 f 隨之改變，做 $L' - \frac{1}{f^2}$ 關係圖其截距為 $\ell_c = c + 2\sigma$ ，（ c 為小圓柱柱實際長度）由斜率亦可求出聲速 V_{λ} 。

(三) 實驗步驟：

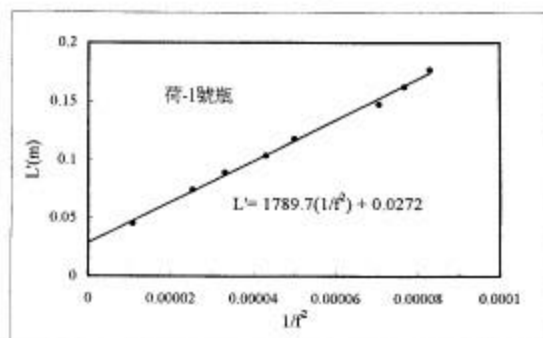
1. 用游標尺量出 $a = \pi r^2$ （ r 小圓柱半徑）， $A = \pi R^2$ （ R 大圓柱半徑）， C 及 L' （管口至水面高度）。
2. 在管口用吹氣機水平吹氣，用頻率偵測器量出 f 。
3. 改變蓄水器水位，重做上述實驗。
4. 做出 $L' - \frac{1}{f^2}$ 圖。
5. 改用不同規格（不同 a ， ℓ ）的容器重做實驗。

(四) 實驗結果：

1. (1) 表六荷姆霍茲共鳴器(1)

$r = 0.705 \text{ cm}$ $c = 1.85 \text{ cm}$ $R = 5.47 \text{ cm}$ $t = 22.10^\circ \text{C}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$L' \text{ (cm)}$	4.49	7.43	8.89	10.36	11.82	14.75	16.22	17.69
$f \text{ (Hz)}$	303.8	198.9	173.9	152.5	141.5	119.2	114.3	109.8



圖六荷姆霍茲共鳴器(1)之 $L' - \frac{1}{f^2}$ 圖

戊、實驗五：

(一) 目的：實驗探討溫度對共鳴空氣柱有效長度的影響。

(二) 原理：1. 銅管導熱係數很大浸在水浴中，由於傳導及空氣對流現象，管內各點空氣溫度非常一致。

2. 溫度愈高分子熱運動愈劇烈，氣體分子方均根速率 $v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

(三) 實驗步驟：

1. 銅管半徑 r ，室溫在 $t^\circ\text{C}$ 下在管口吹氣，空氣柱長 c 形成駐波，用測頻器量頻率 f 。

2. 管內加水改變空氣柱長度，重做上實驗作 $c - \frac{1}{f}$ 圖，截距可得 σ ，斜率可得聲速 v_t 。

3. 管放在一大塑膠桶中，加入冰塊及水，約5分鐘後，管內空氣溫度不再改變，量各點溫度均相同 ($=t^\circ\text{C}$)。重做步驟1及2。

4. 塑膠桶改置熱水，並用電熱器加熱，重做步驟1及2。

伍、結果及討論

1. 本作品測長度時，使用(1)游標尺，精密度 $\frac{1}{20} \text{ mm}$ ，(2)音叉頻率誤差 ± 1 赫(3)頻率偵測器，誤差 ± 1 赫(4)光槓桿使水位升降1mm的音量變化，可以顯現出來。

2. 實驗一：利用音叉在圓柱形共鳴管口振動，第一次最大共鳴聲時，空氣柱長 $c + \sigma = \frac{\lambda}{4}$ ，第二次最大共鳴聲時，空氣柱長 $d + \sigma = \frac{3}{4} \lambda \rightarrow \sigma = d - \frac{3}{2}c$ ，空氣柱長度和管半徑的關係 $\frac{\sigma}{r}$

(1) 半徑大小不同的管空氣作相同頻率，相同振幅的振動時，管半徑愈大，平面波至管口端發散愈大，空氣柱有效長度愈大，求得 σ 愈大(9)

(2) 半徑相同的管，相同振幅，不同頻率的音叉，產生波長不同的駐波， $\frac{\sigma}{r}$ 相近，表示波長大對 $\frac{\sigma}{r}$ 影響不大。

(3) 半徑相同的管不同振幅的音叉振動時由於振幅大者發散大所以 σ 大(9)

3. 實驗二：圓柱管的駐波 $\ell = \frac{\lambda}{4} = \frac{v_t}{4f} = c + \sigma$

$\therefore c = \frac{v_t}{4f} - \sigma$ ，利用八隻不同頻率，相同振幅的音叉在管口產生基音的駐波時，由 $c - \frac{1}{f}$ 圖的斜率 $= \frac{v_t}{4}$ 可得 v_t ，截距得 σ 管的半徑大者 σ 大(2)三管之 $\frac{\sigma}{r}$ 相近分別為0.80、0.83、0.82。

4. 實驗三用吹氣法在同一圓柱管口吹氣，用頻率偵測器直接量出頻率，用 $c - \frac{1}{f}$ 圖求得 v_t 及 σ ，使用空氣壓縮機很平穩的吹氣，共鳴聲非常大，空氣分子振動很劇烈，求得聲速亦相當準確， $\frac{\sigma}{r} = 0.93$ 比實驗二大，符合我們認為振幅大的聲波

易發散的想法。

5.實驗五：本實驗顯現溫度對共鳴空氣柱有效長度影響甚大，溫度和 σ/r 的數學關係，很值得再研究。

陸、結論

- 1.本作品自製光槓桿可以準確量出共鳴空氣柱長度，進而精確量出聲速。
- 2.共鳴空氣柱有效長度受(1)管半徑(2)空氣振幅(3)溫度等影響。管半徑愈大，振幅愈大，溫度愈高，有效長度均愈大。

柒、附註（參考資料）

- 1.高級中學物理實驗手冊（第三冊）國立編譯館出版，民國87年。
- 2.(1)A.B. Wood A TEXTBOOK OF SOUND (G. BELL AND SONS LTD LONDON 1946)P.198
(2)Paul E.Wack Phys Teach P.50-49(1983)
- 3.洪烜娥、許榮富：普通物理實驗合記圖書出版社民國85年

評語

- (1)本作品應用光槓桿原理來微調共鳴空氣柱的有效長度，以更精確的測得有效長度的數值，令人印象深刻。
- (2)利用可精確測知振動幅度的光槓桿，來獲取共鳴空氣柱的長度深具創意。
- (3)以簡單光學方法改進傳統的共鳴空氣柱求取聲波波長的方法，具有教學上的實用性，值得鼓勵。

