

立體五階鬼方陣探索

高中組數學科第三名

省立武陵高中

作者：洪上清

指導教師：許桂淋

一、研究動機

有關於方陣的作品，在歷年的科學展覽會中經常出現，我也是這方面的大玩家，曾經做出了無數個二度空間的拉丁方陣和鬼方陣。去年，我在國際科展會場內邂逅了一些作者與師長，就熱烈地和他們討論著這方面的幾道大難題，並經由他們的介紹得到了許多寶貴的參考資料及遍訪名師高手。

二、研究目的

挑戰自己，超越極限。

三、研究設備器材

參考書籍 電腦

四、研究過程方式

去年在地方科學展覽會上，我發表了一篇有關於方陣的作品，標題是：我發現了 16×16 階鬼方陣及其求解的簡便法則。文章內容敘述著平面上魔方陣和鬼方陣的定義和解題方法。

首先，讓我們回憶一下在平面上魔方陣和鬼方陣的定義。

定義1： n 階魔方陣是指著把 $\{1, 2, 3, \dots, \text{一直到} n \text{的平方}\}$ 的一切不同的正整數分別擺進 $n \times n$ 的方陣格子中，使它們滿足每一橫排的數字和與每一直排的數字和以及兩條對角線的數字之和都完全相等。

定義2：試著將一個平面魔方陣捲成圓筒形，經過滾動後再將此圓筒沿著任意一條接縫切開。然後重新攤開成一個平面並且得到了一個新的方陣，如果每一次的結果都仍舊是一個魔方陣，這時候，我們便把這個方陣叫做鬼方陣。

現在，我們接著來說明在立體空間中魔方陣和鬼方陣的定義。

定義3：立體 n 階魔方陣是指著把 $\{1, 2, 3, \dots, n^3\}$ 的一切不同的正整數分別擺進 $n \times n \times n$ 的方陣格子中，使它們滿足每一條與平面相垂直直線上的數字和以及四條主對角線上的數字之和都完全相等。

[註：主對角線是指著從某一稜角穿過立體中心而到達另一稜角的直線。]

定義4：把一個立體魔方陣從任意平行的界面切開成為兩部份。將這兩部份的位置互相對調，然後重新黏合成一個新的立體方陣。如果每一次的結果都仍舊是一個立體魔方陣，這時候我們便把這個方陣叫做立體鬼方陣。

就平面方陣來說，階數比2大時，任意階數的魔方陣都是存在的；而鬼方陣方面，3階鬼方陣不存在，所有的 $(4n+2)$ 階的鬼方陣也不存在，除此之外，所有的奇數階和所有階數為 $4n$ 階的鬼方陣都存在。

就立體方陣來說，3階魔方陣存在，而3階鬼方陣不存在。在1972年一月，第五卷的趣味數學期刊中，J. R. Hendricks證明了只有4個3階魔方陣存在。

[註：把一個立方體任意旋轉和反映，可得48個不同的立方體，稱為同態(isomorphic)，一般只算是一個排列法。]

我花了很多時間去探索有關於方陣的問題，並在87年國際科展上發表了一篇立體四階鬼方陣成果，如(表1)

立體四階鬼方陣成果：

1	30	43	56
63	4	21	42
38	57	16	19
28	39	50	13
64	3	22	41
34	61	12	23
27	40	49	14
5	26	47	52
33	62	11	24
31	36	53	10
6	25	48	51
60	7	18	45
32	35	54	9
2	29	44	55
59	8	17	46
37	58	15	20

一個鬼方陣的解就像是一張完美的天羅地網。每一個數字都不能漏掉以及每一排串起來的數字都必須是絲絲入扣而且彼此間糾纏得相當厲害。只要亂了其中一個數字，就會牽動全部數字以致於全盤都需要重新調整。想要解出一個鬼方陣通常需要做很多的試驗和計算。質數階的方陣有它自身的特性可以得到比較簡便的方法。以五階的方陣為例，循序看看下面的表格。

a				
			a	
	a			
				a
		a		

(表3)

Aa				
			Da	
	Ba			
				Ea
		Ca		

(表4)

Aa	d	b	e	c
b	e	c	Da	d
c	Ba	d	b	e
d	b	e	c	Ea
e	c	Ca	d	b

(表5)

Aa	D	B	E	C
E	C	A	Da	B
D	Ba	E	C	A
C	A	D	B	Ea
B	E	Ca	A	D

(表6)

Aa	Dd	Bb	Ee	Cc
Eb	Ce	Ac	Da	Bd
Dc	Ba	Ed	Cb	Ae
Cd	Ab	De	Bc	Ea
Be	Ec	Ca	Ad	Db

(表7)

接下來的工作是做一些翻譯，翻譯的方式可以有很多種。為了方便以後階數的擴張，我們用參數的形式來加以說明。

定義：

- i. (x) = 小寫英文字母的序碼。例如 $(a)=1$ ， $(d)=4$ 。
- ii. $\max(x)=n$ = 方陣的階數。例如上面的幾個表格都是 $n=5$ 。
- iii. (Y) = 大寫英文字母的序碼減1。例如
 $(A)=1-1=0$ ， $(D)=4-1=3$ ……

iv. $Yx=(Y)$ 乘上 n 以後再加上 (x) 。以上述的表格為例

$$Aa=0 \times 5+1=1, Ad=0 \times 5+4=4$$

$$Da=3 \times 5+1=16, Dd=3 \times 5+4=19 \dots\dots$$

如此，把（表4）經過翻譯以後便可以解讀成為（表8）同時（表7）便可以經由翻譯而成為（表9）

1				
			16	
	6			
				21
		11		

（表8）

1	19	7	25	13
22	15	3	16	9
18	6	24	12	5
14	2	20	8	21
10	23	11	4	17

（表9）

（表9）便是一個五階的鬼方陣。

現在我們來說明這個鬼方陣是怎麼形成的。

仔細檢查（表3）可以發現在表格中的任何一行以及任何一列都是剛好出現一個a.經過滾動時任何一條左斜線和右斜線也都是剛好出現一個a.先把這個現象當作是一種條件。再來檢查（表7）時則必須注意到到兩個要求。

- 1.每一個字母都必須滿足像（表3）的條件。
- 2.每一個大寫字母都必須和不同的小寫字母配對一次，而且不可重複。
小寫字母對大寫字母也是如此。

調整進位的觀念，把大寫字母和小寫字母看成是不同位階的數字，因為在鬼方陣所需要的每一條數線上，每一個不同的字母都是剛好出現了一次，把這些字母加起來，當然每一條數線的值都會相等。最後轉換用十進位法數字的形式重新展現，張開來自然地就是一張完整鬼方陣。

五、研究結果

現在我們來看看如何完成一個立體五階鬼方陣。首先畫出一個立方體，把它切割為五層，每層都劃分為五階的平面方陣。利用希臘拉丁方陣的思考模式可以提供一些便捷的解題途徑。經過重疊拼湊不斷地調整實驗，得到了下面的結果；

000	332	114	441	223
333	110	442	224	001
111	443	220	002	334
444	221	003	330	112
222	004	331	113	440

第五層

(表10)

322	104	431	213	040
100	432	214	041	323
433	210	042	324	101
211	043	320	102	434
044	321	103	430	212

第四層

(表11)

144	421	203	030	312
422	204	031	313	140
200	032	314	141	423
033	310	142	424	201
311	143	420	202	034

第三層

(表12)

411	243	020	302	134
244	021	303	130	412
022	304	131	413	240
300	132	414	241	023
133	410	242	024	301

第二層

(表13)

233	010	342	124	401
011	343	120	402	234
344	121	403	230	012
122	404	231	013	340
400	232	014	341	123

第一層

(表14)

接下來是尋找出一個計算公式

$$\text{def: } xyz = 25x + 5y + z + 1$$

這樣我們便可以把每一個格子翻譯成十進位的數字。新的表格照著它的層次順序堆疊起來所得到的結果便是一個立體五階鬼方陣。(如表15)

1	93	35	122	64
94	31	123	65	2
32	124	61	3	95
125	62	4	91	33
63	5	92	34	121

88	30	117	59	21
26	118	60	22	89
119	56	23	90	27
57	24	86	28	120
25	87	29	116	58

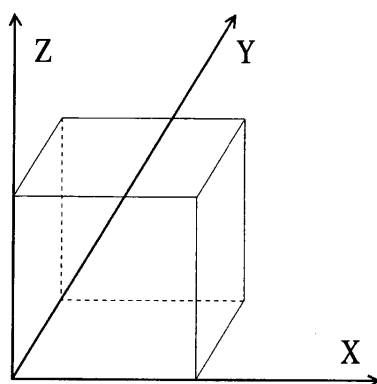
50	112	54	16	83
113	55	17	84	46
51	18	85	47	114
19	81	48	115	52
82	49	111	53	20

107	74	11	78	45
75	12	79	41	108
13	80	42	109	71
76	43	110	72	14
44	106	73	15	77

69	6	98	40	102
7	99	36	103	70
100	37	104	66	8
38	105	67	9	96
101	68	10	97	39

六、討論及應用

看看下面的立方體：



想要讓它成為一個立體五階鬼方陣，必須滿足以下的條件：

- （ 0度， 90度， 90度）的情形有25條平行的線圈。
- （ 90度， 0度， 90度）的情形有25條平行的線圈。

(90度, 90度, 0度)的情形有25條平行的線圈。

(+45度, +45度, +45度)的情形有25條平行的線圈。

(- 45度, +45度, +45度)的情形有25條平行的線圈。

(- 45度, - 45度, +45度)的情形有25條平行的線圈。

(+45度, - 45度, +45度)的情形有25條平行的線圈。

前面的三種情形分別是垂直於yz平面, 垂直於xz平面和垂直於xy平面。後面的四種情形則分別是平行於4條主對角線。假設是

以"+"表示著直線的方向是向右, 向前, 向上。

以"-"表示著直線的方向是向左, 向後, 向下。

這時, 總共有175條線, 每一條線都是穿過5個數, 而這5個數的和都必須是剛好315。

七、結論

五階立體鬼方陣是存在的。

驗算: 滿足了175個算術等式。(略)

八、參考資料及其它

整數論	作者: 李恭晴 九章出版社
第五卷的趣味數學期刊	J. R. Hendricks
拉丁方陣和尤拉的預言	Martin Gardner
魔方陣	作者: 林克瀛 數學傳播第四卷
富蘭克林方陣	作者: 林克瀛 數學傳播第六卷
漫談魔術立方體	作者: 林克瀛 科學月刊第十二卷
八階鬼方陣突破	作者: 洪英武 科學研習第廿六卷
趣味數學365	作者: 任現森 北京廣播學院出版社
數學新芽	作者: 洪上清 36屆全國科展佳作
幻級數	作者: 洪上清 86年國際科展推薦全國
幻方研究	作者: 李彥頡 37屆全國科展第三名
矩陣大檢閱	作者: 丁南僑 香港數學教育學會
立體四階鬼方陣	作者: 洪上清 87年國際科展
歷屆國際易學大會論文集	易經學會編印

[附記]

研習期間，屢蒙清大林克瀛教授寄送大量珍貴的相關文獻長達半年有餘，惠我良多。

另外，校友萬台興先生支援排版，使作品更為清新亮麗，一併申謝。

評語

本作品經長期研究由立體四階鬼方陣之探索，以至於本作品五階之突破，尤其立體方陣具有一定的深度與複雜度，能有此結果，已屬難得。