奇妙的骨牌世界

高中組數學科第二名

省立台中第一高級中學

作　　者：翁邦彥、吳欣儒
　　　　　施傑文

指導教師：曾文賓、翁玉忠

一、研究動機

去年在數學競試講習的某次課堂上，老師提出一個〝用骨牌鋪砌〞的益智問題，引起不小的迴響。這種問題乍看之下不甚起眼；然而實地動手去作，才發覺並非想像的那麼簡單。

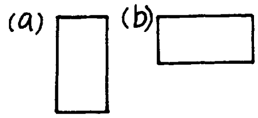
而這分報告，將呈現我們思考的過程與研究的成果，尚祈不吝賜教。

二、研究目的

透過實驗與分析，用特定骨牌鋪砌m‧n長方形，求得其方法數。

三、研究過程和方法

〈說明〉1.就骨牌而言(a)稱為直立(b)稱為橫列



2.就長方形而言，m表寬n表長，且m為固定，研究的是n與排法之關係

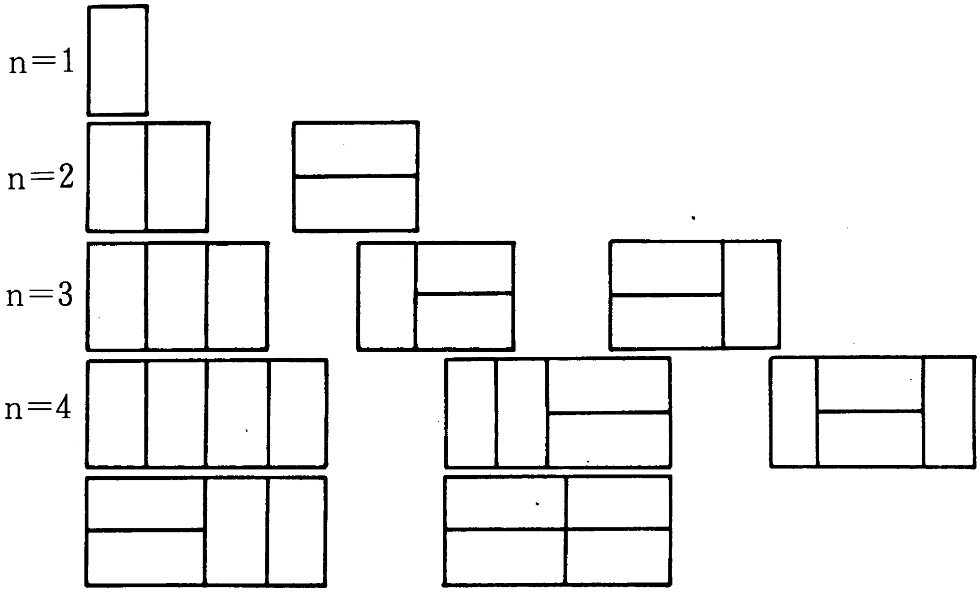
3.有的相異圖形經過若干角度之轉動後會變得完全相同，在本研究中則視為不同。

第一部分：

1.我們有足夠個的2•1的長方形骨牌，用這些骨牌排成2•n的長方形，則共有多少種排法？

（Sol）

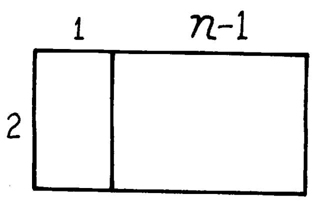
(1) n＝1，2，3，4， 做實驗，試著找出某種規律



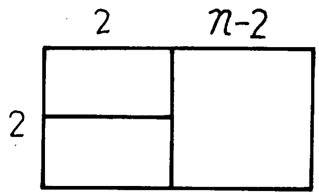
若鋪成2•n之長方形的方法數為 P_n，則實驗結果暗示可能存在著 $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ 之關係

(2)分析：當我們開始排骨牌時，從何處著手？

ㄅ先如圖蓋住一塊2•1的面積：那麼我們接下來只須蓋滿剩下的2•（n-1）即可，而蓋滿2•（n-1）的方法數即為 P_{n-1}



ㄆ如圖將兩個2•1橫列蓋住一塊2•2的面積：那麼我們接下來只須蓋滿剩下的2•（n-2）即可，而蓋滿2•（n-2）的方法數即為 P_{n-2}

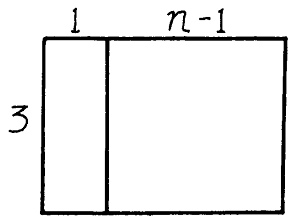


綜合ㄅㄆ，2•n長方形的蓋法$P_n=P_{n-1}+P_{n-2}$

(3)結論：$P_n=P_{n-1}+P_{n-2}$但$n\geqq 3$ $P_1=1$ $P_2=2$ $\langle P_n\rangle$ 即為費氏數列 $\langle F_{n+1}\rangle$

$P_n=\{\ [\ (1+\sqrt{5})\ /\ 2\ ]^{n+1}-[(1-\sqrt{5})\ /\ 2\ ]^{n+1}\}\ /\sqrt{5}$

2.若有足夠個的3•1的長方形骨牌，用這些骨牌排成3•n的長方形則有多少種排法？

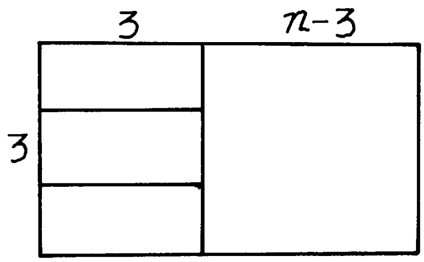


(Sol)

(1)分析：我們開始排骨牌時，從何處著手？

ㄅ.先如圖蓋住一塊3•1的面積：那麼接下來只須蓋滿剩下的3•(n-1)即可，而蓋滿3•(n-3)的方法數即為P_{n-1}

ㄆ.如圖將三個3•1橫列蓋住一塊3•3的面積：那麼接下來只須蓋滿剩下的3•(n-3)即可而蓋滿3•(n-3)的方法數即為P_{n-3}



綜合ㄅ、ㄆ，3•n長方形的蓋法　$P_n=P_{n-1}+P_{n-3}$

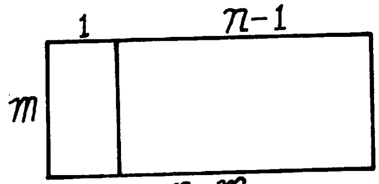
(2)結論：$P_n=P_{n-1}+P_{n-3}$但$n\geq 4$　$P_1=P_2=1$　$P_3=2$

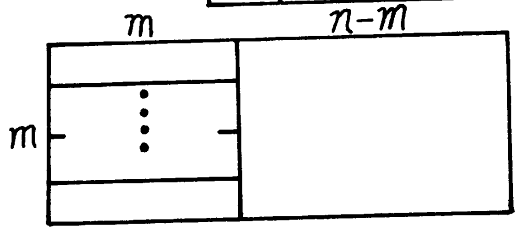
3.推廣：有足夠個的m•1的長方形骨牌，用這些骨牌排m•n之長方形

(Sol)

(1)分析：ㄅ先如圖蓋住一塊m•1的面積；再蓋滿剩下的m•(n-1)，其法有P_{n-1}

ㄆ.如圖將m個m•1橫列蓋住一塊m•m的面積：再蓋滿剩下的 m•（n-m），方法數P_{n-m}





綜合：ㄆ　m•n長方形的蓋法$P_n=P_{n-1}+P_{n-m}$

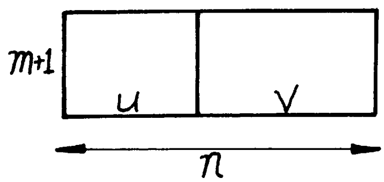
(2)結論：$P_n=P_{n-1}+P_{n-m}$但$n\geqq m+1$　$P_1=P_2=\cdots\cdots=P_{m-1}=1$

$P_m=2$

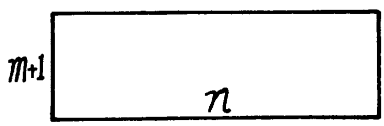
第二部分：

目標：有足夠m•1之長方形骨牌，排成（m+1）•n的長方形

方法：（ㄅ）可切割：如圖，至少存在一直線（切割線），將此長方形切割成兩個長方形



（ㄆ）不可切割：如圖，不存在任何直線，將此長方形切割成兩個長方形



1.有足夠2•1的長方形骨牌，排成3•n的長方形，

（Sol）

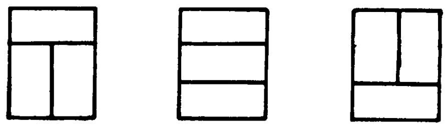
(1)用2•1去排3•n，所以n必為偶數 i.e. $n=2K,\ K\in N$　Pn 寫成P_{2k}表之

(2)研究a_n：

避免重覆計算，取最靠近左側的切割線切成2個長方形$3\cdot 2P$，$3\cdot 2q$（$3\cdot 2P$在左）且 $P+q=K$　$3\cdot 2P$之矩形乃不可切割，而$3\cdot 2q$沒有限制，⇒方法數＝〔$3\cdot 2p$之方法數〕•〔$3\cdot 2q$之方法數〕＝$b_{2p}.P_{2q}$.〈乘法原理〉

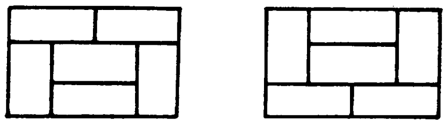
(3)ㄅ.實驗：

$n=2$
（$K=1$）



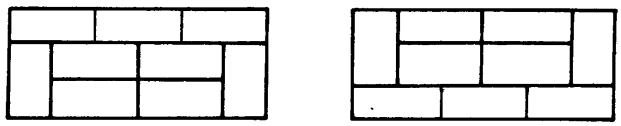
$b_2=3$

$n=4$
（$K=2$）



$b_4=2$

$n=6$
（$K=3$）



$b_6=2$

ㄆ.（ㄅ）將最上（下）方以橫列骨牌蓋滿（使其切割線在偶數單位處）

（ㄆ）剩下之2n先置一甲，再連續放置$K-1$個乙，最後再置一甲

（ㄇ），(a)有二法(b)有一法故$bn=b_{2k}=2$　$K\in N$　$K\geq 2$
（$b_2=3$）

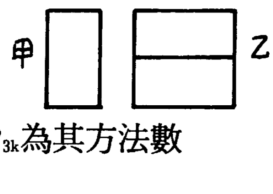
(4)結論：$P_n=a_n+b_n=\sum_{i=1}^{k-1} b_{2i}\cdot P_{2(k-i)}+2=$

$$3P_{n-2}+2P_{n-4}+2P_{n-6}+\cdots\cdots+2P_2+2$$

化簡之 $P_n=P_{2k}=4P_{2k-2}-P_{2k-4}$　$P_0=1$　$P_2=3$　$n\geq 4$

n為偶數$=[(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k+(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k]/6$

2.足夠$3\cdot 1$骨牌，排成$4\cdot n$的長方形



（Sol）

(1)用$3\cdot 1$去排$4\cdot n$則$n=3K$　$K\in N$　$Pn=P_{3k}$為其方法數

$$a_n=\sum_{i=1}^{k-1} b_{3i}\cdot P_{3(k-i)}$$

(2)研究bn

ㄅ.首先將最上（下）方以橫列骨牌蓋滿（使其切割線在3之倍數單位處）

ㄆ.在剩下之3•n頭尾各置一甲，中間置K－1個乙，以及1個甲，使切割線在3t＋1或3t＋2處使圖形保持不可切割

ㄇ.由於ㄅ有二法(b)有$C_1^k=K$法 $\therefore bn=b_{3k}=2K \quad K\in N$

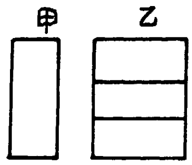
$K\geqq 2$ （$b_3=3$）

(3)結論：$P_n=a_n+b_n=\sum_{i=1}^{k-1} b_{3i}\cdot P_{3(k-i)}+2K=$

$3P_{3k-3}+4P_{3k-6}+6P_{3k-9}+\cdots\cdots+(2K-2)P_3+2K$

化簡之，$P_n=P_{3k}=5P_{3k-3}-3P_{3k-6}+P_{3k-9}$

$P_0=1 \quad P_3=3 \quad P_6=13 \quad n\geqq 9$ n為3的倍數



〈推廣情形〉

3.用m•1的骨牌排成（m＋1）•n的長方形，有幾種排法？

（Sol）

(1)用m•1去排（m＋1）•n則n必為m之倍數i.e. n＝mk, K∈N 所以本題目即為：用m•1去鋪（m＋1）•mk之長方形。用Pn表鋪成（m＋1）•n之長方形的方法數，而在此我們認為將Pn寫成P_{mk}較為明確。an, bn亦然。

(2)研究a_n：改成$a_n=\sum_{i=1}^{k-1} b_{mi}\cdot P_{m(k-i)}$後仍適用

(3)研究b_n：

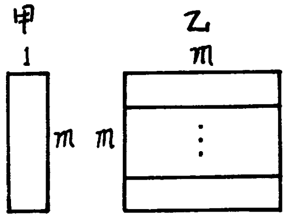
ㄅ.實驗步驟省略

ㄆ.說明：

（ㄅ）“創造”一個不可分割之圖形：首先將最上（下）方以橫列骨牌蓋滿（使其切割線在m之倍數單位處）

（ㄆ）接著處理剩下之m•n

（ㄇ）安排此m•n頭尾各置一甲，中間任意安置K-1個乙，以及m-2個甲，均可使切割線在mt＋1或mt＋2或mt＋3, mt+4,……,mt+（m−1）處，使整個圖形保持不可切割。



（ㄈ）由於（ㄅ）有二法，（ㄇ）有C（m+k−3, k−1）法，故$b_n = b_{mk} = 2C(m+k-3,\ k-1)$ K∈N, K≧2（bm=3）

(4)結論：$P_n = a_n + b_n = \sum_{i=1}^{k-1} b_{mi} \bullet P_{m(k-i)}$

$$+2C(m+k-3,\ k-1)$$

$$=3P_{mk-m}+2C(m-1,\ 1)P_{mk-2m}$$

$$+2C(m,\ 2)P_{mk-3m}+\cdots$$

$$+2C(m+k-4,\ k-2)P_m+2C(m+k-3,\ k-1)$$

此遞迴式，礙於能力，實難化成更簡單之形式。

第三部分

頭腦體操：利用第2部分的一些觀念和作法來處理下列有趣的問題

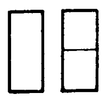
1.用2•1及1•1之骨牌有多少方法鋪出2•n的長方形？

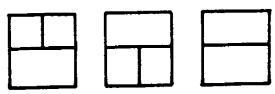
（Sol）

(1)我們仍延用第2部分所介紹的思考模式，考慮方法數$P_n = a_n + b_n$

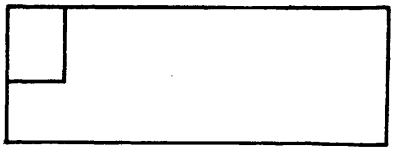
ㄅ.使用$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i . P_{n-i}$的觀念

ㄆ.b_n方面：

（ㄅ）$b_1=2$ 

（ㄆ）$b_2=3$ 

（ㄇ）b_n：先鋪一個1•1骨牌如右，如欲使其一直維持“不可切割”則下方必鋪一2•1骨牌。依此為之，只有結尾處再鋪一個1•1骨牌。此為製造一個“不可切割”圖形之唯一方法，但因上下顛倒，故$b_n=2$，當$n\geqq 3$



(2)結論：$P_n=a_n+b_n=2P_{n-1}+3P_{n-2}+2P_{n-3}+\cdots\cdots+2P_1+2$

化簡之$P_n=3P_{n-1}+P_{n-2}-P_{n-3}$, $P_0=1$, $P_1=2$, $P_2=7$ $n\geqq 3$

2.用2•1之骨牌有多少方法鋪出4•n的長方形？

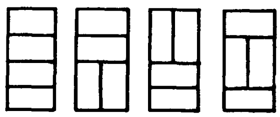
（Sol）

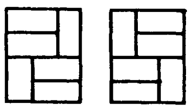
(1)我們仍延用第2部分所介紹的思考模式，考慮方法數$P_n=a_n+b_n$

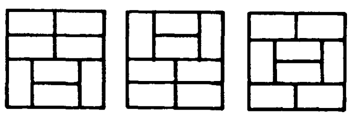
ㄅ.使用$a_n=\sum_{i=1}^{n-1} b_i\cdot P_{n-i}$的觀念

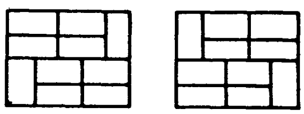
ㄆ.b_n方面：

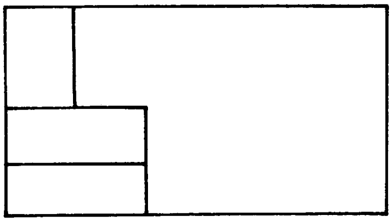
（ㄅ）$b_1=1$ 

（ㄆ）$b_2=4$ 

（ㄇ）$b_3=2$ 

（ㄈ）$b_4=3$ 

（ㄉ）$b_5=2$ 

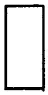


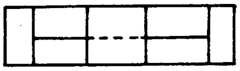
（ㄊ）b_n：顯然必須分奇數與偶數討論

→n為奇數，則製造一個〝不可分割〞圖形之方法：

先直鋪一個2•1骨牌如右，則下方必橫鋪＝2•1骨牌，

因為n為奇數故收尾之  互在反側，又因可上下顛倒，故$b_n=2$

→n為偶數，則收尾之  在同側形成

一個  與兩個 

(2)結論：n為奇數：

$P_n=P_{n-1}+4P_{n-2}+2P_{n-3}+3P_{n-4}+2P_{n-5}+3P_{n-6}+\cdots\cdots+2P_2+3P_1+2$

n為偶數：

$P_n=P_{n-1}+4P_{n-2}+2P_{n-3}+3P_{n-4}+2P_{n-5}+3P_{n-6}+\cdots\cdots+3P_2+2P_1+3$

化簡之，$P_n=P_{n-1}+5P_{n-2}+P_{n-3}-P_{n-4}$, $P_0=1$, $P_1=1$, $P_2=5$, $P_3=11$, $n\geqq 4$（不論奇偶）

3.用2•1•1之磚塊有多少方法鋪出2•2•n的長方體？

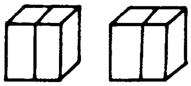
（Sol）

(1)我們仍延用第2部分所介紹的思考模式，考慮方法數 $P_n=a_n+b_n$

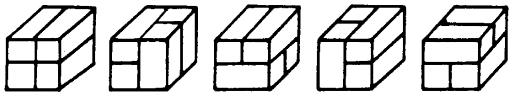
ㄅ.使用$a_n=\sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot P_{n-i}$ 的觀念

ㄆ.b_n方面：

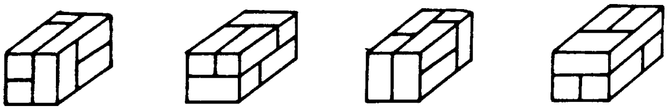
（ㄅ）$b_1=2$



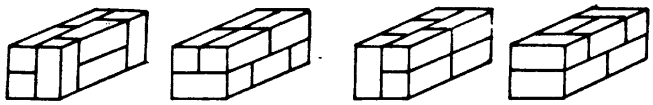
（ㄆ）$b_2=5$



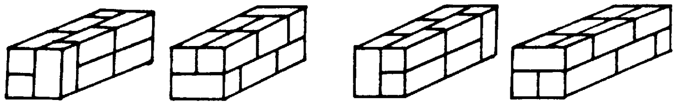
（ㄇ）$b_3=4$



（ㄈ）$b_4=4$



（ㄉ）$b_5=4$



（ㄊ）b_n：將切割線改成切割面，先鋪一個2•1•1磚塊如下如欲使其一直維持〝不可分割〞則其側方必鋪二2•1•1磚塊，依此為之，只有結尾處再鋪一個2•1•1磚塊，此為製造一個〝不可切割〞立體之唯一方法。但因可翻轉四次，故$b_n=4$　$n\geqq 3$

(2)結論：$P_n=a_n+b_n=2P_{n-1}+5P_{n-2}+4P_{n-3}+4P_{n-4}+\cdots\cdots+4P_1+4$

化簡之，$P_n=3P_{n-1}+3P_{n-2}-P_{n-3}$，$P_0=1$，$P_1=2$，$P_2=5$　$n\geqq 3$

評語

這是一個排列組合著名的問題，作者耐心地分析，解法也有創意。並能參考資料，儘可能地獲取有意義的結果。表達清楚。有學術價值。最好能更進一步再研究以求突破。