

# 三角板的玄機

初小組數學科第一名

台北縣立江翠國民小學

作者：栢啓聖等六人

指導教師：蔡錦堂

## 一、研究動機

在上角和全等時，我們就想用三角板來畫角，但是市面上買到的三角板，只能畫出  $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$ 、 $90^\circ$  等 15 的倍數的角而已，於是我們便想是否可以自己製作一套三角板，而把所有的角都能畫出來，於是我們便著手做一套三角板。

## 二、研究目的

- (一)熟練數學的加減法。
- (二)使大家對角度更有興趣，更有概念，透過多次的畫角操作，對角度有更正確之了解。
- (三)找出較合適的三角板，能在運用三角板次數最少，畫出最多的角。
- (四)了解兩個有共同公因數，任意相加減不會是 1 的定理。


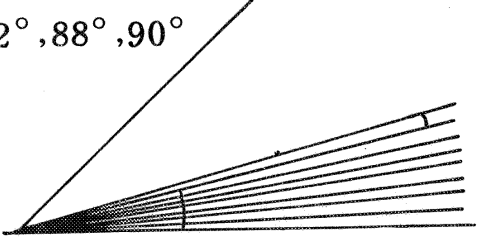
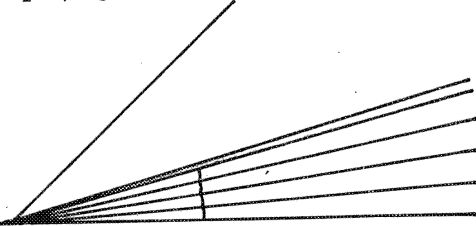
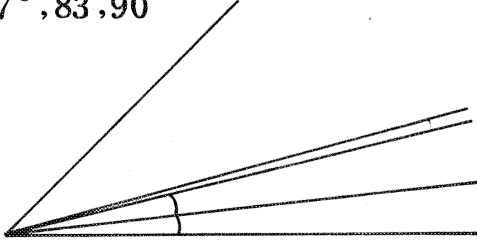
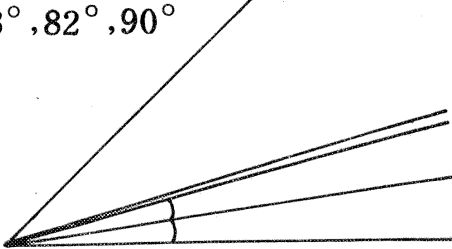
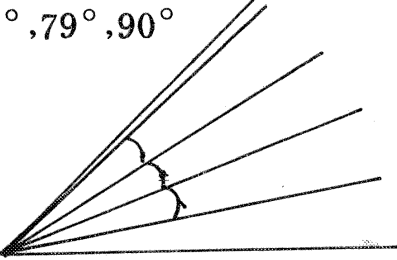
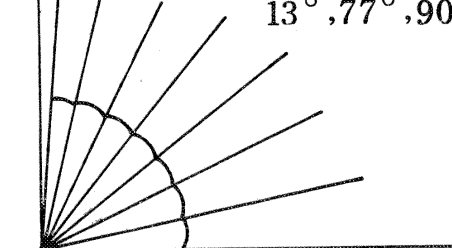
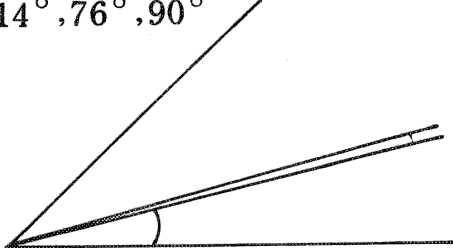
## 三、研究設備器材

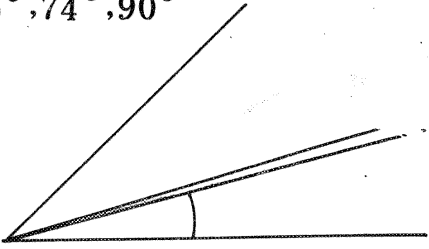
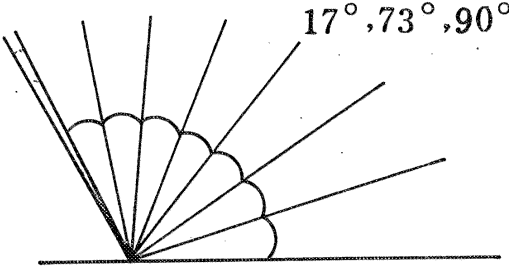
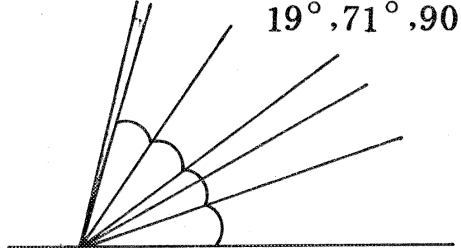
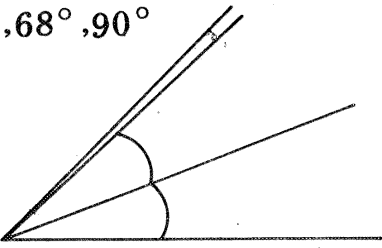
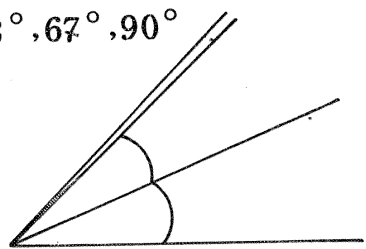
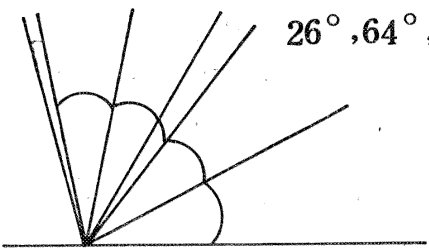
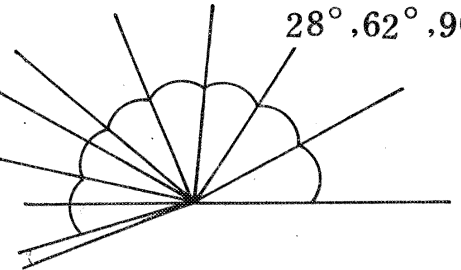
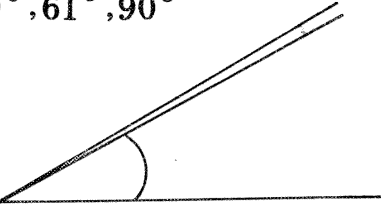
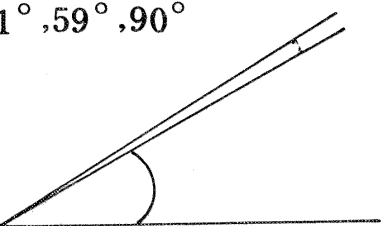
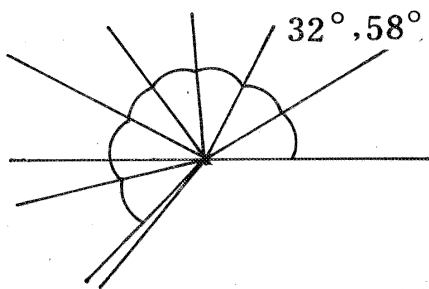
- (一)電腦、電子計算機、白報紙。
- (二)三角板、自製三角板數套。

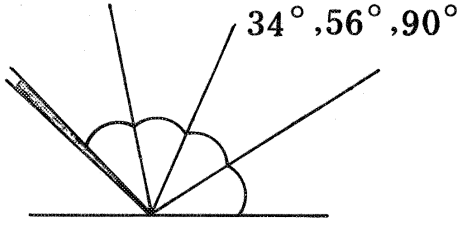
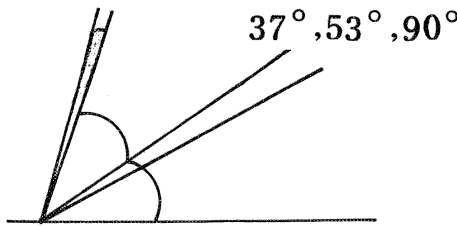
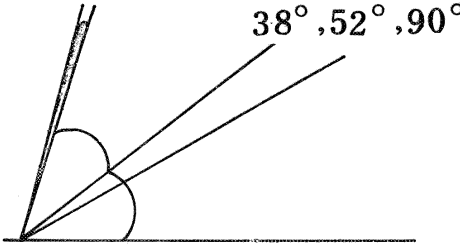
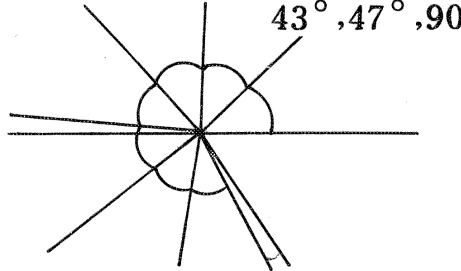
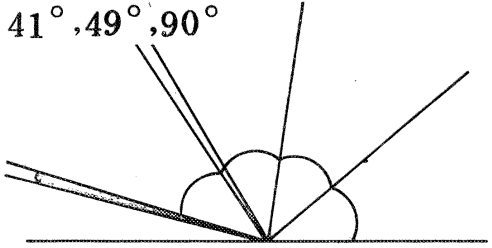
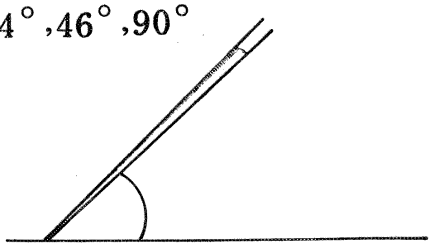
## 四、研究過程與方法及實驗結果

- (一)全班每個人製作一付直角三角板，1 號製作  $1^\circ$ 、 $89^\circ$ 、 $90^\circ$  之三角板，又號製作  $2^\circ$ 、 $88^\circ$ 、 $90^\circ$  三角板……，製作好以後，每人嘗試用自己做的三角板，畫出  $1^\circ$  來，結果下面號碼的小朋

友畫不出 $1^\circ$ 來：3、5、6、9、10、12、15、18、20、21、24、25、27、30、33、35、36、39、40、42、45。  
畫出 $1^\circ$ 的小朋友他們的畫法如下：

$1^\circ = 1^\circ$	$1^\circ = 45^\circ - 30^\circ - 2^\circ \times 7$
$1^\circ, 89^\circ, 90^\circ$ 	$2^\circ, 88^\circ, 90^\circ$ 
$1^\circ = 4^\circ \times 4 - (45^\circ - 30^\circ)$	$1^\circ = (45^\circ - 30^\circ) - 7^\circ \times 2$
$4^\circ, 86^\circ, 90^\circ$ 	$7^\circ, 83^\circ, 90^\circ$ 
$1^\circ = 8^\circ \times 2 - (45^\circ - 30^\circ)$	$1^\circ = 45^\circ - 11^\circ \times 4$
$8^\circ, 82^\circ, 90^\circ$ 	$11^\circ, 79^\circ, 90^\circ$ 
$1^\circ = 13^\circ \times 7 - 90^\circ$	$1^\circ = 45^\circ - 30^\circ - 14^\circ$
$13^\circ, 77^\circ, 90^\circ$ 	$14^\circ, 76^\circ, 90^\circ$ 

$1^{\circ} = 16^{\circ} - (45^{\circ} - 30^{\circ})$ $16^{\circ}, 74^{\circ}, 90^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 120^{\circ} - 17^{\circ} \times 7$ $17^{\circ}, 73^{\circ}, 90^{\circ}$ 
$1^{\circ} = 19^{\circ} \times 4 - 30^{\circ} - 45^{\circ}$ $19^{\circ}, 71^{\circ}, 90^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 45^{\circ} - 22^{\circ} \times 2$ $22^{\circ}, 68^{\circ}, 90^{\circ}$ 
$1^{\circ} = 23^{\circ} \times 2 - 45^{\circ}$ $23^{\circ}, 67^{\circ}, 90^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 60^{\circ} + 45^{\circ} - 26^{\circ} \times 4$ $26^{\circ}, 64^{\circ}, 90^{\circ}$ 
$1^{\circ} = 28^{\circ} \times 7 - 150^{\circ} - 45^{\circ}$ $28^{\circ}, 62^{\circ}, 90^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 30^{\circ} - 29^{\circ}$ $29^{\circ}, 61^{\circ}, 90^{\circ}$ 
$1^{\circ} = 31^{\circ} - 30^{\circ}$ $31^{\circ}, 59^{\circ}, 90^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 180^{\circ} + 45^{\circ} - 32^{\circ} \times 7$ $32^{\circ}, 58^{\circ}, 90^{\circ}$ 

$1^{\circ} = 34^{\circ} \times 4 - 135^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 45^{\circ} + 30^{\circ} - 37^{\circ} \times 2$ 
$1^{\circ} = 38^{\circ} \times 2 - 45^{\circ} - 30^{\circ}$ 	$1^{\circ} = 43^{\circ} \times 7 - 180^{\circ} - 120^{\circ}$ 
$1^{\circ} = 120^{\circ} + 45^{\circ} - 41^{\circ} \times 4$ 	$1^{\circ} = 45^{\circ} - 44^{\circ}$ 

(二)有些小朋友雖然畫出了  $1^{\circ}$  角，但畫出的角和實際量的度數有很大的出入，如 13 號小朋友，他畫的角就相差了將近  $5^{\circ}$ ，探討原因，原來他畫角使用三角板的次數太多，他畫角的方法是  $13^{\circ} \times 7 - 90^{\circ} = 1^{\circ}$ ，也就是用  $13^{\circ}$  的角畫了 7 次，再減去一個直角，共用了 8 次三角板，難怪誤差那麼大！於是我們便決定要在使用三角板不超過三次的情形之下，看看各種三角板能畫出幾個角。

(三)使用直角三角板，大部份的三角板在使用不超過三次的情況下，都只能畫出二十幾個角，實在太少了，於是大家便決定製作不是直角的三角板，我們在非直角的三角板中，選了較有可能的一千三百多種，每個人大約分配到三十幾個三角板，大家利用假日，

每個人每次做兩種三角板，先在紙上運算，看看能夠畫出幾個角，經過了十五星期的操作運算後，挑選出較理想的三角板約五十種，大家一起集思廣益，看看還有沒有其他畫角的方法，結果發現了下列四套三角板在使用三次三角板情況下，可以畫出  $83$  個  $0^\circ \sim 90^\circ$  之間的角，而無法畫出的  $7$  個角在使用四次三角板，也可以輕易的畫出，因此我們深信這四套三角板是較佳之三角板：①  $24^\circ$ 、 $41^\circ$ 、 $115^\circ$ 。②  $31^\circ$ 、 $54^\circ$ 、 $95^\circ$ 。③  $18^\circ$ 、 $37^\circ$ 、 $125^\circ$ 。④  $23^\circ$ 、 $54^\circ$ 、 $103^\circ$ 。

## 五、討論與結論

(一) 如果想加入一套三角板而想畫出各種角度，這一套三角板的度數不能同時為  $3$  的倍數或是同時為  $5$  的倍數，因為我們市面上的三角板的角都是  $15$  的倍數，如果加入一套  $3$  的倍數角度的三角板，所有的角都是  $3$  的倍數，再怎樣加加減減，當然還是  $3$  的倍數，就如果一大堆偶數，再怎麼加加減減，仍是偶數一樣， $5$  的倍數的角度也是同樣的道理。

(二) 製作非直角三角板比製作直角三角板在同樣條件不可以畫出更多的角，像在使用三次三角板的限制下，一般直角三角板只能畫出二十幾個角，但非直角三角板大部份都可畫出六七十個角，較好的可以畫八十幾個角，可見非直角三角板比直角三角板可以畫出更多的角。

(三) 在非直角三角板中，較佳的三角板大約有下列幾種：

- ①  $24^\circ$ 、 $41^\circ$ 、 $115^\circ$  ②  $31^\circ$ 、 $54^\circ$ 、 $95^\circ$  ③  $18^\circ$ 、 $37^\circ$ 、 $125^\circ$   
④  $23^\circ$ 、 $54^\circ$ 、 $103^\circ$

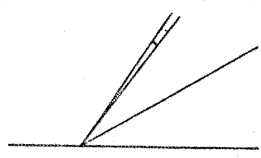
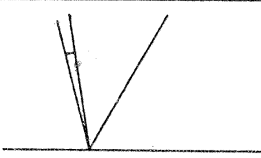
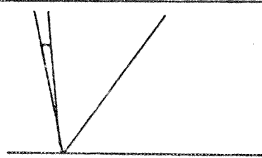
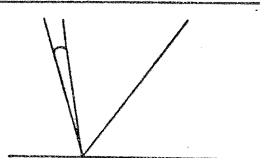
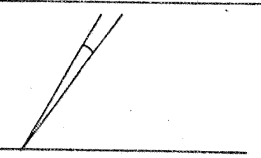
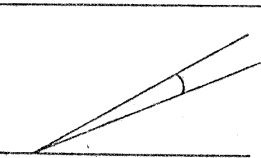
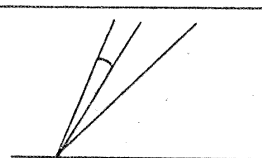
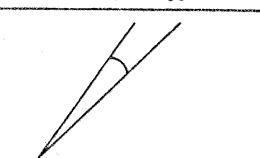
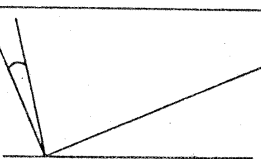
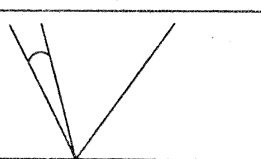
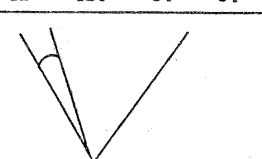
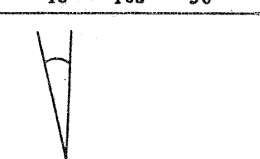
這四種三角板都可以在使用三次三角板下，都可以畫出八十三個角，因限於篇幅，我們僅列出  $23^\circ$ 、 $54^\circ$ 、 $103^\circ$  畫各種角的方法，其他的留給大家去動動腦，看看如何畫出各種角及那些角無法在使用三次三角板內畫出，以達到我們製作這套三角板的真正用心。

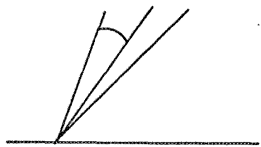
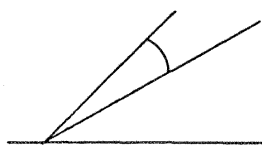
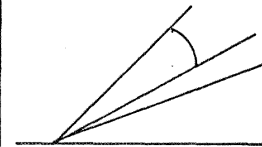
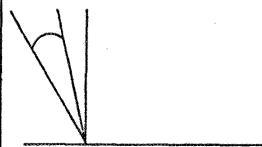
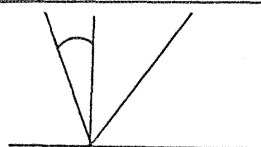
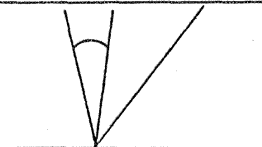
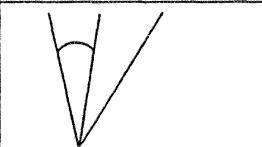



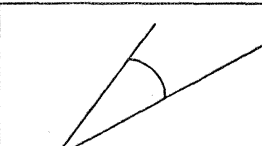
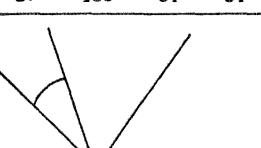
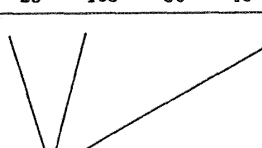
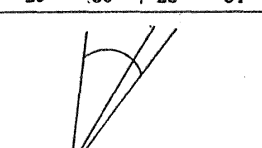
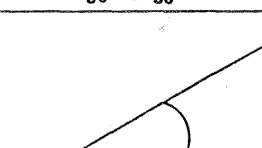
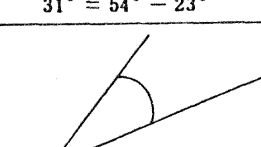
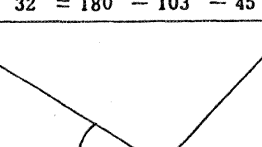
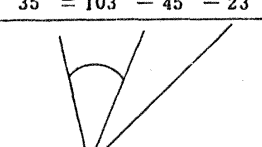
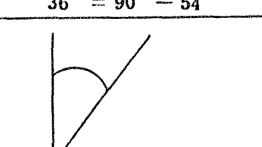
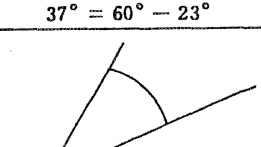
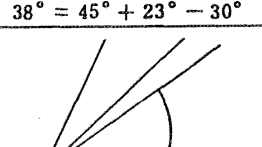
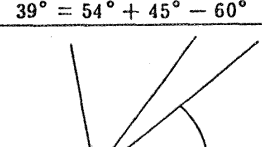
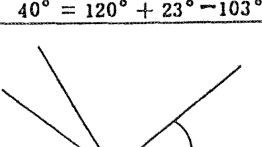
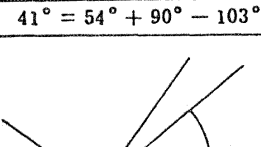
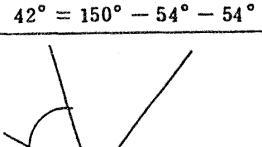
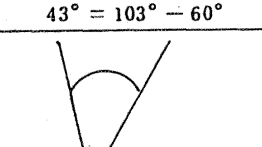
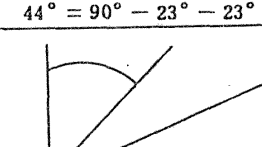
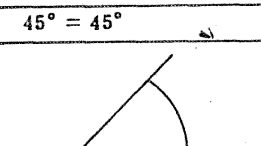
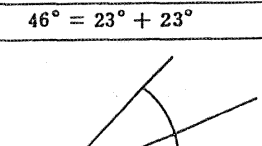
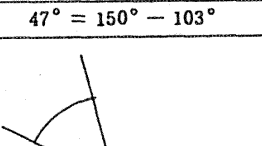
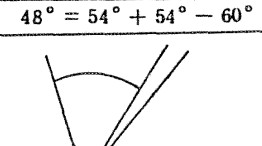
(  $23^\circ$  ,  $54^\circ$  ,  $103^\circ$  )  $30^\circ$  ,  $60^\circ$  ,  $45^\circ$  ,  $90^\circ$  ,  $180^\circ$

1°	$54^{\circ} - 30^{\circ} - 23^{\circ}$	30°	$30^{\circ}$
2°	$60^{\circ} + 45^{\circ} - 103^{\circ}$	31°	$54^{\circ} - 23^{\circ}$
3°		32°	$180^{\circ} - 103^{\circ} - 45^{\circ}$
4°	$103^{\circ} - 54^{\circ} - 45^{\circ}$	33°	
5°	$54^{\circ} + 54^{\circ} - 103^{\circ}$	34°	
6°	$60^{\circ} - 54^{\circ}$	35°	$103^{\circ} - 45^{\circ} - 23^{\circ}$
7°	$30^{\circ} - 23^{\circ}$	36°	$90^{\circ} - 54^{\circ}$
8°	$45^{\circ} + 23^{\circ} - 60^{\circ}$	37°	$60^{\circ} - 23^{\circ}$
9°	$54^{\circ} - 45^{\circ}$	38°	$45^{\circ} + 23^{\circ} - 30^{\circ}$
10°	$23^{\circ} + 90^{\circ} - 103^{\circ}$	39°	$54^{\circ} + 45^{\circ} - 60^{\circ}$
11°	$54^{\circ} + 60^{\circ} - 103^{\circ}$	40°	$120^{\circ} + 23^{\circ} - 103^{\circ}$
12°	$120^{\circ} - 54^{\circ} - 54^{\circ}$	41°	$54^{\circ} + 90^{\circ} - 103^{\circ}$
13°	$103^{\circ} - 90^{\circ}$	42°	$150^{\circ} - 54^{\circ} - 54^{\circ}$
14°	$45^{\circ} + 23^{\circ} - 54^{\circ}$	43°	$103^{\circ} - 60^{\circ}$
15°	$45^{\circ} - 30^{\circ}$	44°	$90^{\circ} - 23^{\circ} - 23^{\circ}$
16°	$23^{\circ} + 23^{\circ} - 30^{\circ}$	45°	$45^{\circ}$
17°	$30^{\circ} + 90^{\circ} - 103^{\circ}$	46°	$23^{\circ} + 23^{\circ}$
18°	$54^{\circ} + 54^{\circ} - 90^{\circ}$	47°	$180^{\circ} - (103^{\circ} + 30^{\circ})$
19°	$103^{\circ} - 54^{\circ} - 30^{\circ}$	48°	$54^{\circ} + 54^{\circ} - 60^{\circ}$
20°	$103^{\circ} - 64^{\circ} - 23^{\circ}$	49°	$103^{\circ} - 54^{\circ}$
21°	$45^{\circ} + 30^{\circ} - 54^{\circ}$	50°	$103^{\circ} - 23^{\circ} - 30^{\circ}$
22°	$45^{\circ} - 23^{\circ}$	51°	$45^{\circ} + 60^{\circ} - 54^{\circ}$
23°	$23^{\circ}$	52°	$45^{\circ} + 30^{\circ} - 23^{\circ}$
24°	$54^{\circ} - 30^{\circ}$	53°	$30^{\circ} + 23^{\circ}$
25°		54°	$54^{\circ}$
26°	$103^{\circ} - 54^{\circ} - 23^{\circ}$	55°	$135^{\circ} + 23^{\circ} - 103^{\circ}$
27°	$135^{\circ} - 54^{\circ} - 54^{\circ}$	56°	$103^{\circ} + 103^{\circ} - 150^{\circ}$
28°	$103^{\circ} - 30^{\circ} - 45^{\circ}$	57°	$103^{\circ} - 23^{\circ} - 23^{\circ}$
29°	$60^{\circ} + 23^{\circ} - 54^{\circ}$	58°	$103^{\circ} - 45^{\circ}$

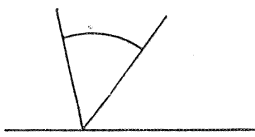
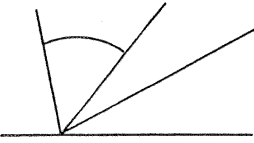
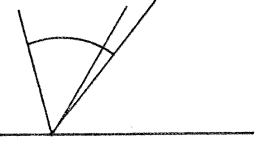

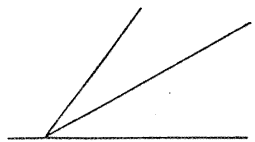
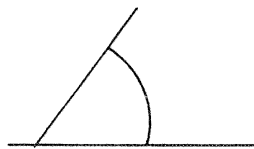
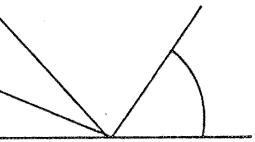
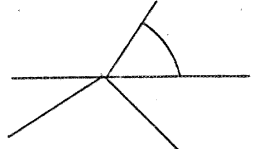
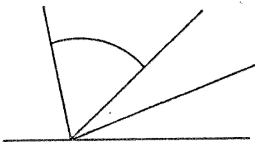
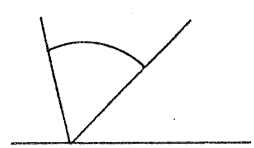
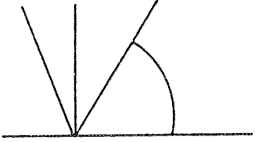
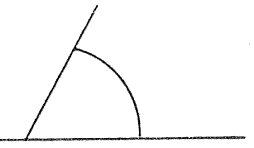
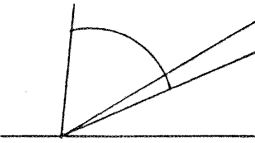
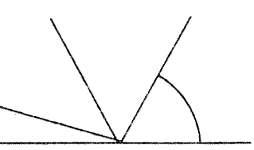
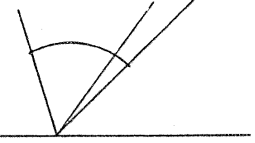
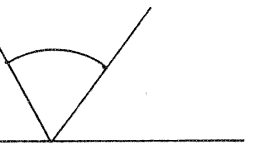
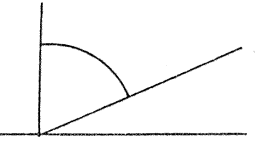
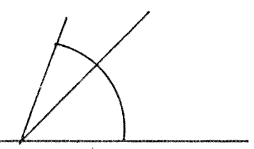
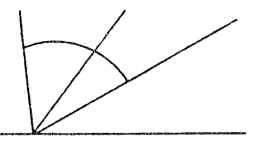
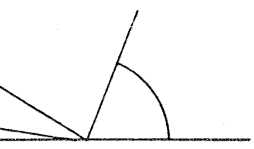
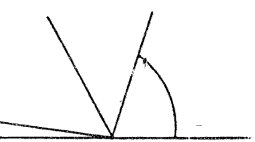
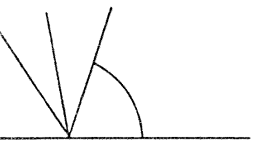
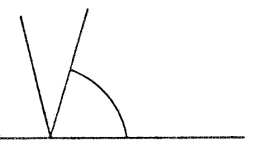
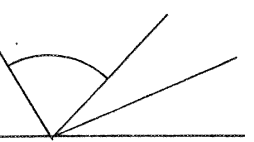
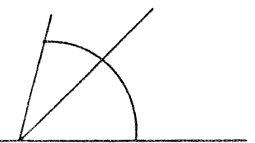
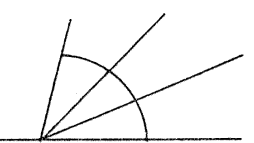
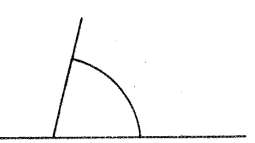
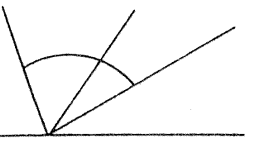
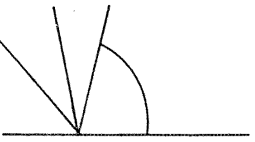
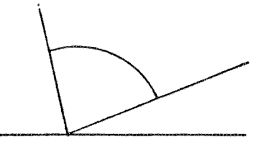
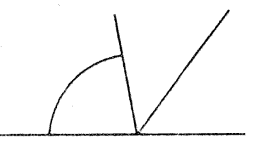
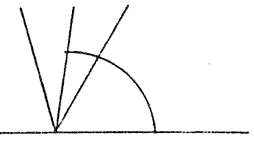
59°	$90^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	75°	$30^\circ + 45^\circ$
60°	$60^\circ$	76°	$23^\circ + 23^\circ + 30^\circ$
61°	$30^\circ + 54^\circ - 23^\circ$	77°	$180^\circ - 103^\circ$
62°	$120^\circ + 45^\circ - 103^\circ$	78°	$54^\circ + 54^\circ - 30^\circ$
63°	$54^\circ + 54^\circ - 45^\circ$	79°	$103^\circ + 30^\circ - 54^\circ$
64°		80°	$103^\circ - 23^\circ$
65°		81°	$180^\circ - 54^\circ - 45^\circ$
66°	$90^\circ + 30^\circ - 54^\circ$	82°	$60^\circ + 45^\circ - 23^\circ$
67°	$90^\circ - 23^\circ$	83°	$23^\circ + 60^\circ$
68°	$45^\circ + 23^\circ$	84°	$30^\circ + 54^\circ$
69°	$54^\circ + 45^\circ - 30^\circ$	85°	$54^\circ + 54^\circ - 23^\circ$
70°	$150^\circ + 23^\circ - 103^\circ$	86°	$135^\circ + 54^\circ - 103^\circ$
71°	$54^\circ + 120^\circ - 103^\circ$	87°	
72°	$103^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	88°	$103^\circ + 45^\circ - 60^\circ$
73°	$103^\circ - 30^\circ$	89°	$120^\circ + 23^\circ - 54^\circ$
74°	$120^\circ - 23^\circ - 23^\circ$	90°	$90^\circ$

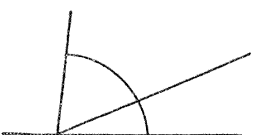
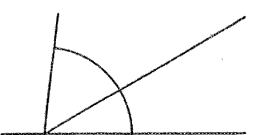
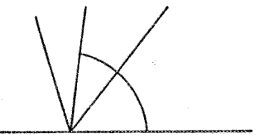
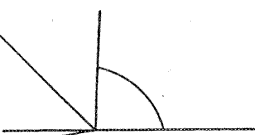

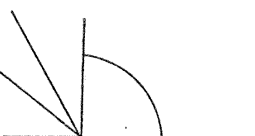
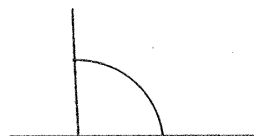
共 ( 83 ) 個

$1^\circ = 54^\circ - 30^\circ - 23^\circ$	$2^\circ = 60^\circ + 45^\circ - 103^\circ$	$4^\circ = 103^\circ - 54^\circ - 45^\circ$	$5^\circ = 54^\circ + 54^\circ - 103^\circ$
			
$6^\circ = 60^\circ - 54^\circ$	$7^\circ = 30^\circ - 23^\circ$	$8^\circ = 45^\circ + 23^\circ - 60^\circ$	$9^\circ = 54^\circ - 45^\circ$
			
$10^\circ = 23^\circ + 90^\circ - 103^\circ$	$11^\circ = 54^\circ + 60^\circ - 103^\circ$	$12^\circ = 120^\circ - 54^\circ - 54^\circ$	$13^\circ = 103^\circ - 90^\circ$
			

$14^\circ = 45^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$	$16^\circ = 23^\circ + 23^\circ - 30^\circ$	$17^\circ = 30^\circ + 90^\circ - 103^\circ$
			
$18^\circ = 54^\circ + 54^\circ - 90^\circ$	$19^\circ = 103^\circ - 54^\circ - 30^\circ$	$20^\circ = 103^\circ - 60^\circ - 23^\circ$	$21^\circ = 45^\circ + 30^\circ - 54^\circ$
			
$22^\circ = 45^\circ - 23^\circ$	$23^\circ = 23^\circ$	$24^\circ = 54^\circ - 30^\circ$	$26^\circ = 103^\circ - 54^\circ - 23^\circ$
			
$27^\circ = 135^\circ - 54^\circ - 54^\circ$	$28^\circ = 103^\circ - 30^\circ - 45^\circ$	$29^\circ = 60^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	$30^\circ = 30^\circ$
			
$31^\circ = 54^\circ - 23^\circ$	$32^\circ = 180^\circ - 103^\circ - 45^\circ$	$35^\circ = 103^\circ - 45^\circ - 23^\circ$	$36^\circ = 90^\circ - 54^\circ$
			
$37^\circ = 60^\circ - 23^\circ$	$38^\circ = 45^\circ + 23^\circ - 30^\circ$	$39^\circ = 54^\circ + 45^\circ - 60^\circ$	$40^\circ = 120^\circ + 23^\circ - 103^\circ$
			
$41^\circ = 54^\circ + 90^\circ - 103^\circ$	$42^\circ = 150^\circ - 54^\circ - 54^\circ$	$43^\circ = 103^\circ - 60^\circ$	$44^\circ = 90^\circ - 23^\circ - 23^\circ$
			
$45^\circ = 45^\circ$	$46^\circ = 23^\circ + 23^\circ$	$47^\circ = 150^\circ - 103^\circ$	$48^\circ = 54^\circ + 54^\circ - 60^\circ$
			



$49^\circ = 103^\circ - 54^\circ$	$50^\circ = 103^\circ - 23^\circ - 30^\circ$	$51^\circ = 45^\circ + 60^\circ - 54^\circ$	$52^\circ = 45^\circ + 30^\circ - 23^\circ$
			
$53^\circ = 30^\circ + 23^\circ$	$54^\circ = 54^\circ$	$55^\circ = 135^\circ + 23^\circ - 103^\circ$	$56^\circ = 103^\circ + 103^\circ - 150^\circ$
			
$57^\circ = 103^\circ - 23^\circ - 23^\circ$	$58^\circ = 103^\circ - 45^\circ$	$59^\circ = 90^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	$60^\circ = 60^\circ$
			
$61^\circ = 30^\circ + 54^\circ - 23^\circ$	$62^\circ = 120^\circ + 45^\circ - 103^\circ$	$63^\circ = 54^\circ + 54^\circ - 45^\circ$	$66^\circ = 120^\circ - 54^\circ$
			
$67^\circ = 90^\circ - 23^\circ$	$68^\circ = 45^\circ + 23^\circ$	$69^\circ = 54^\circ + 45^\circ - 30^\circ$	$70^\circ = 150^\circ + 23^\circ - 103^\circ$
			
$71^\circ = 54^\circ + 120^\circ - 103^\circ$	$72^\circ = 103^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	$73^\circ = 103^\circ - 30^\circ$	$74^\circ = 120^\circ - 23^\circ - 23^\circ$
			
$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$	$76^\circ = 23^\circ + 23^\circ + 30^\circ$	$77^\circ = 180^\circ - 103^\circ$	$78^\circ = 54^\circ + 54^\circ - 30^\circ$
			
$79^\circ = 103^\circ + 30^\circ - 54^\circ$	$80^\circ = 103^\circ - 23^\circ$	$81^\circ = 180^\circ - 54^\circ - 45^\circ$	$82^\circ = 60^\circ + 45^\circ - 23^\circ$
			

$83^\circ = 23^\circ + 60^\circ$	$84^\circ = 30^\circ + 54^\circ$	$85^\circ = 54^\circ + 54^\circ - 23^\circ$	$86^\circ = 135^\circ + 54^\circ - 103^\circ$
			
$88^\circ = 103^\circ + 45^\circ - 60^\circ$	$89^\circ = 120^\circ + 23^\circ - 54^\circ$	$90^\circ = 90^\circ$	
			

上述畫角方法和量角器一比，當然顯得較麻煩，較不方便，但是如果把畫角當作一種數學遊戲，給他們一套三角板，讓他們去動動腦，看看如何畫出各種角度，可以使大家數學運算更加熟練，從動手、動腦中學習角度，當可得到更深刻的瞭解和更高的學習興趣。本班同學以往常有人對角度觀念不清，畫  $75^\circ$  角可能畫到  $105^\circ$  去，但透過三角板的操作後， $75^\circ$  角就是  $75^\circ$  角，絕對不可能畫到  $105^\circ$  去，而對角度的大小也更有了明確的概念，因此我們認為值得向大眾推薦這四套三角板及這種畫角遊戲，只要一張厚紙板，讓孩子們動手自製三角板，讓孩子陶醉於畫角的快感中，不是很好嗎？

## 六、參考資料

國小數學指引第七冊。

## 評 語

集體的合作，長期累積大面的資料，具體的操作，合適初小程度。題目為補足現行儀器之缺失，動機甚好。其中引用了誤差概念及極小原理等數學想法，數學味道很足。