

維納斯的秘密

國中組數學科第三名

台北縣立漳和國民中學

作者：鄭文俊

指導教師：孫芸芬、戴青田

一、研究動機

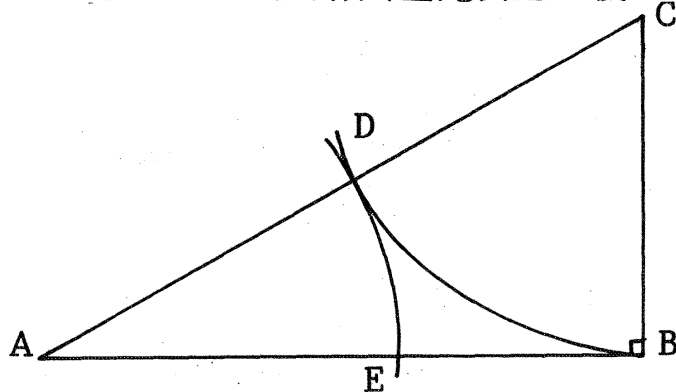
在一次偶然中，我們在牛頓雜誌上看到了一個題目：“已知一線段 $\overline{AB}$ ，欲求 $\overline{AB}$ 上一點 E 使 $\overline{AE} : \overline{BE}$ 為黃金比。”

作法如下：(1)取 $\overline{AC}$ 長的一半為 $\overline{BC}$ ，使之垂直 $\overline{AB}$ 於 B ，並連接 $\overline{CA}$ 。

(2)以 C 為圓心， $\overline{BC}$ 為半徑，畫弧交 $\overline{AC}$ 於 D 點。

(3)以 A 為圓心， $\overline{AD}$ 為半徑，畫弧交 $\overline{AB}$ 於 E 點。

(4)則 $\overline{AB}$ 被 E 點分成具有黃金比例之二綫段。



從數值上來分析：

$$(1) \text{ 令 } \overline{AB} = 2a, \text{ 則 } \overline{BC} = \overline{CD} = a$$

$$(2) \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} \\ = \sqrt{5}a$$

$$(3) \overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = (\sqrt{5} - 1)a$$

$$(4) \overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AE} = 2a - (\sqrt{5} - 1)a \\ = (3 - \sqrt{5})a$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{BE} : \overline{AE} &= (3 - \sqrt{5})a : (\sqrt{5} - 1)a \\ &= 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

雖然作法簡潔、特殊，且能由值的計算得到證明，但是，我們卻無法了解為什麼這樣作就能得到黃金分割，它的動機、思考方向引起了我們的興趣，而促成了我們深入去研究——黃金矩形。

二、研究目的

大多數的人，即使在國民中學學過黃金矩形和黃金分割，但是對它們的了解卻十分的粗淺，例如：只知道它的名詞、定義、比值，而不能對它有深一層的認識，於是，我們這群不知天高地厚的國中學子，決定深入研究探索，期望找出黃金矩形的新性質，突破傳統的作法，用自己的構想與所學來創造出美麗的黃金矩形。

三、研究過程

古人說溫故而後知新，首先我們先要找出歐幾里德之黃金分割作法的理由。

(一)由代數解析法：

1. 設 a 為黃金矩形的長，且令 b 為黃金矩形的寬

$$\text{由黃金比知 } a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} b \quad \therefore b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$$

$$\therefore a : b = a : \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a = 2a : (\sqrt{5} - 1)a$$

2. 所以若令 $\overline{AB} = 2a$ ， $\overline{AE} = (\sqrt{5} - 1)a$

$$\overline{AB} : \overline{AE} = 2a : (\sqrt{5} - 1)a = a : b \dots\dots\dots ①$$

(二)再由黃金矩形的基本定義：

$$\frac{b}{a} = \frac{a - b}{b}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{BE} : \overline{EA} &= (\overline{AB} - \overline{AE}) : \overline{AE} \\ &= (a - b) : b \text{ (分比性質)} = b : a \dots\dots\dots ②\end{aligned}$$

由② $\therefore \overline{BE} : \overline{EA}$ 亦為黃金比

(三)所以用代數解析，再用黃金矩形的基本性質，就很容易解釋這個方法的來源。

知道理由後，接下來就展開我們自己的研究：

既然我們想跳出傳統，用自己的構想造出黃金矩形，於是給自己定了個“以摺紙代替尺規作圖黃金矩形”的目標。

問題 1：以一張方形紙摺出一黃金矩形，使其長恰為方形紙的邊長。

思考 1：在一般作圖中，已知長為 a ，設寬為 b 時，由定義知：

$$b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a = (\sqrt{5} a - a) \div 2$$

$$\text{而 } \sqrt{5} a = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$$

【作法】：(1)作 $\overline{AB} = 2a$

(2)過 B 作 $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ 於 B，且 $\overline{BC} = a$

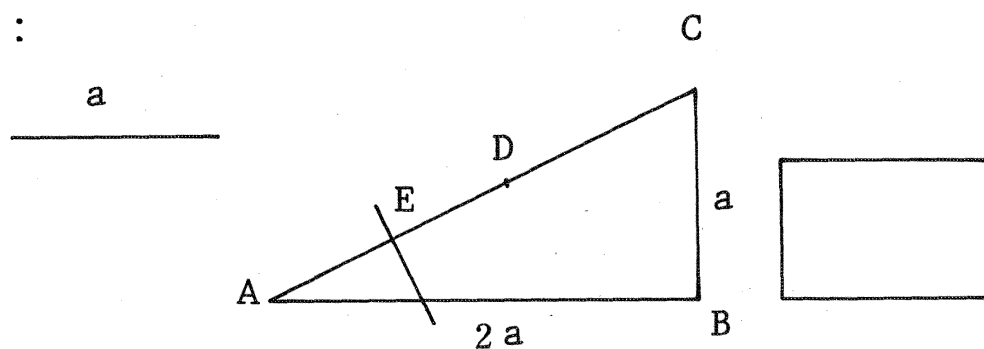
(3)連 $\overline{AC}$ ，在 $\overline{AC}$ 上取 $\overline{CD} = a$

(4)取 $\overline{AD}$ 中點 E

(5)以 $\overline{BC}$ 長為長， $\overline{AE}$ 長為寬

作一矩形為所求。(如圖(一))

圖一：



question：摺紙時，若以方形紙的邊長為所求之黃金矩長之長，由於已知邊不能延長，所以上述方法無法使用。

think：若已知邊長為 a ，設寬為 b

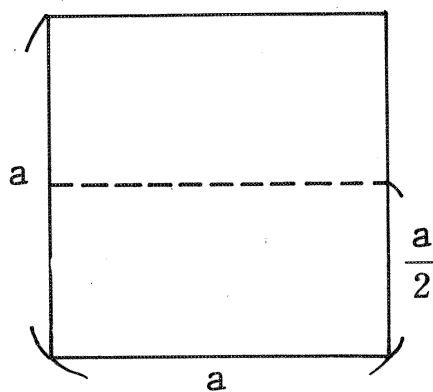
$$b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{1}{2}a \\
&= \sqrt{\frac{4a^2 + a^2}{4}} - \frac{a}{2} \\
&= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}a
\end{aligned}$$

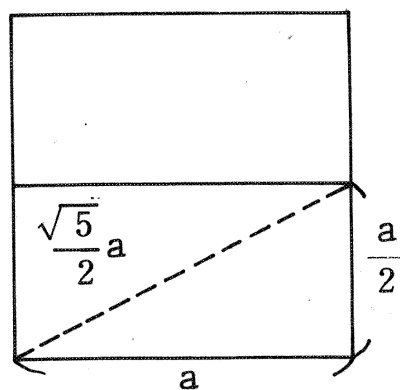
由於摺紙時 $\frac{a}{2}$ 可以作出，所以，可以得到。

摺法 1：

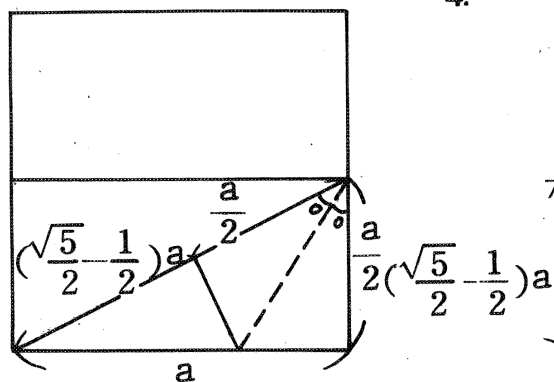
1.



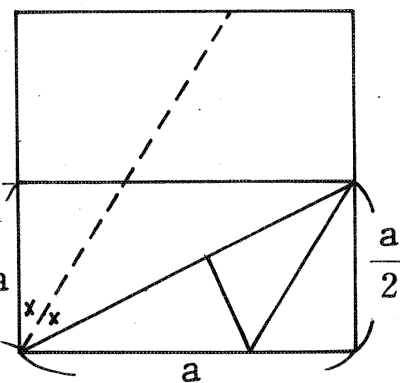
2.



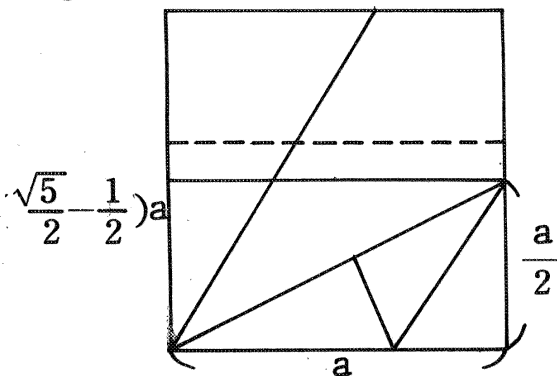
3.



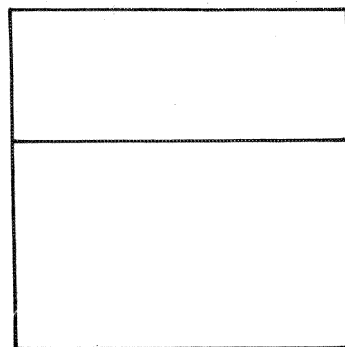
4.



5.

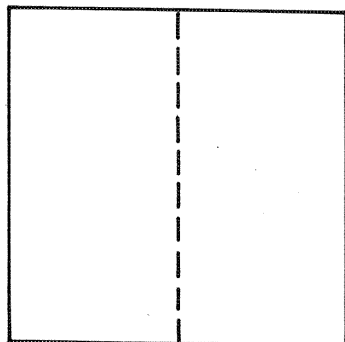


6.

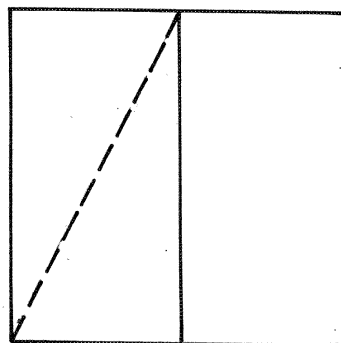


摺法 2 :

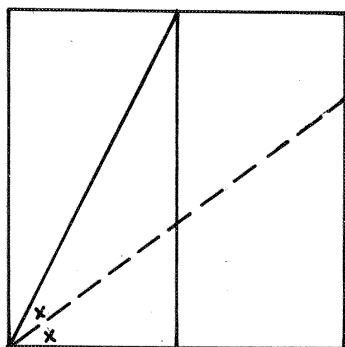
1.



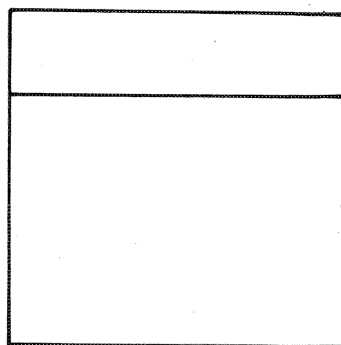
2.



3.



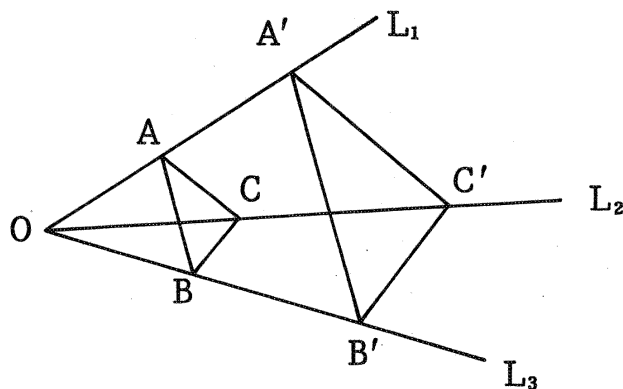
4.



摺法 2 的構想是我們研究到最後才發現的，所以現在無法交代思考方向，留待最後再加說明。

問題 2：設黃金矩形的長寬和為方形紙的邊長。

思考 1：在國中教科書中，曾提到類似下面圖形的例子。若在以



O 為原點而射出的三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 ，在三線上任取不共線之三點 A 、 B 、 C ，形成 $\triangle ABC$ ，而在 L_1 取 A' ，作直線 $A'B'$ 平行於 $\overline{AB}$ ，交 L_2 於 B' ，作直線 $A'C'$ 平行於 $\overline{AC}$ 交 L_2 於 C' ，連 $B'C'$ ，則 $\triangle ABC \sim$

$\triangle A'B'C'$ ，同理，可以這種方法放大或縮小的圖形。以上性質，我們發現，在黃金矩形的對角線上任取一點，所作出的矩形，都成爲一黃金矩形。

作法：基本性質法：

利用問題 1 的摺法，摺出黃金矩形 AEGH

在 $\overline{AE}$ 上取 H' ，使 $\overline{AH'} = \overline{AH}$

由黃金矩形的基本性質知：

$\ell = \overline{AE}$ ， $W = \overline{AH}$ ，若 $\overline{AH'} = \overline{AH} = \ell'$ 時

$W' = \overline{AE} - \overline{AH} = \overline{H'E}$

$\therefore \ell' + W' = \overline{AH'} + \overline{H'E} = \overline{AE} = \text{方形紙的邊長}$

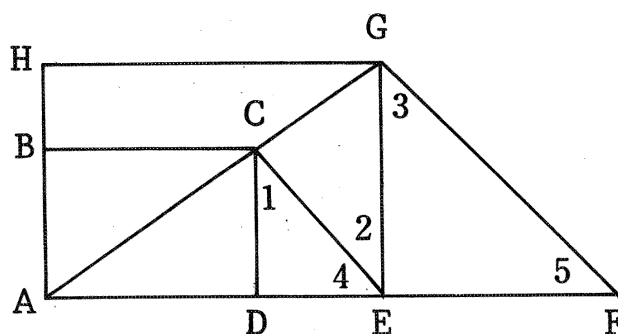
作法：比例法：

同上，AEGH 爲已知黃金矩形。

由所求矩形亦爲黃金矩形知兩矩形相似，所以對應線段成比例。

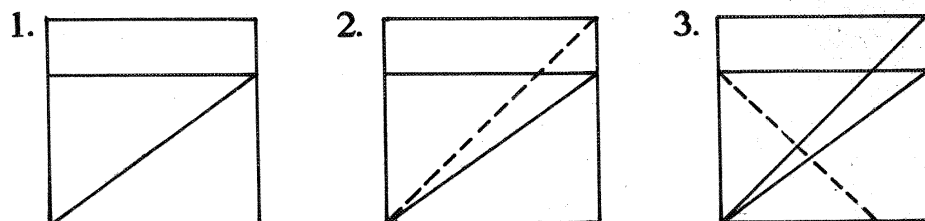
在直線 AE 上取 $\overline{EF} = \overline{EG}$ ，則 $\angle 5 = 45^\circ$ ，連 $\overline{FG}$

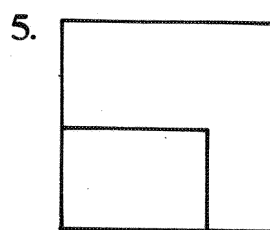
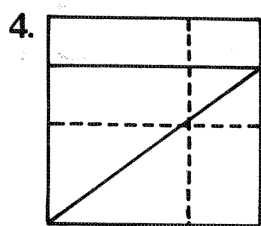
過 E 作 $\overline{FG}$ 之平行線交 $\overline{AG}$ 於 C，則 $\angle 4 = \angle 5 = 45^\circ$ （同位角）且 $\overline{AC}$ 爲所求矩形之對角線。



摺法 基本性質法：

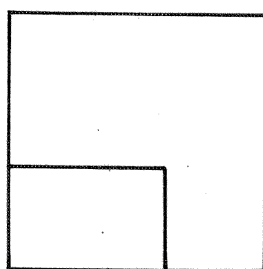
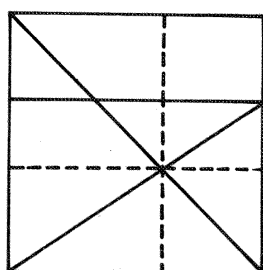
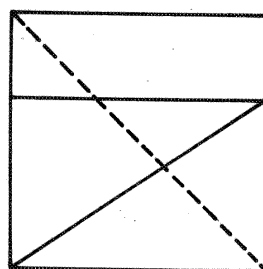
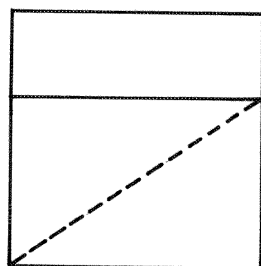
利用問題 之摺法摺出一黃金矩形。





摺法

利用第 題之摺法摺出一黃金矩形



問題：若以方形紙的一邊為所求黃金矩形的長寬及對角線之和，如何摺出此黃金矩形。

思考：

想法：基本性質法

黃金矩形的基本性質為長，寬之間的加、減重覆性，無法推得與對角線和的關係，所以此想法失敗。

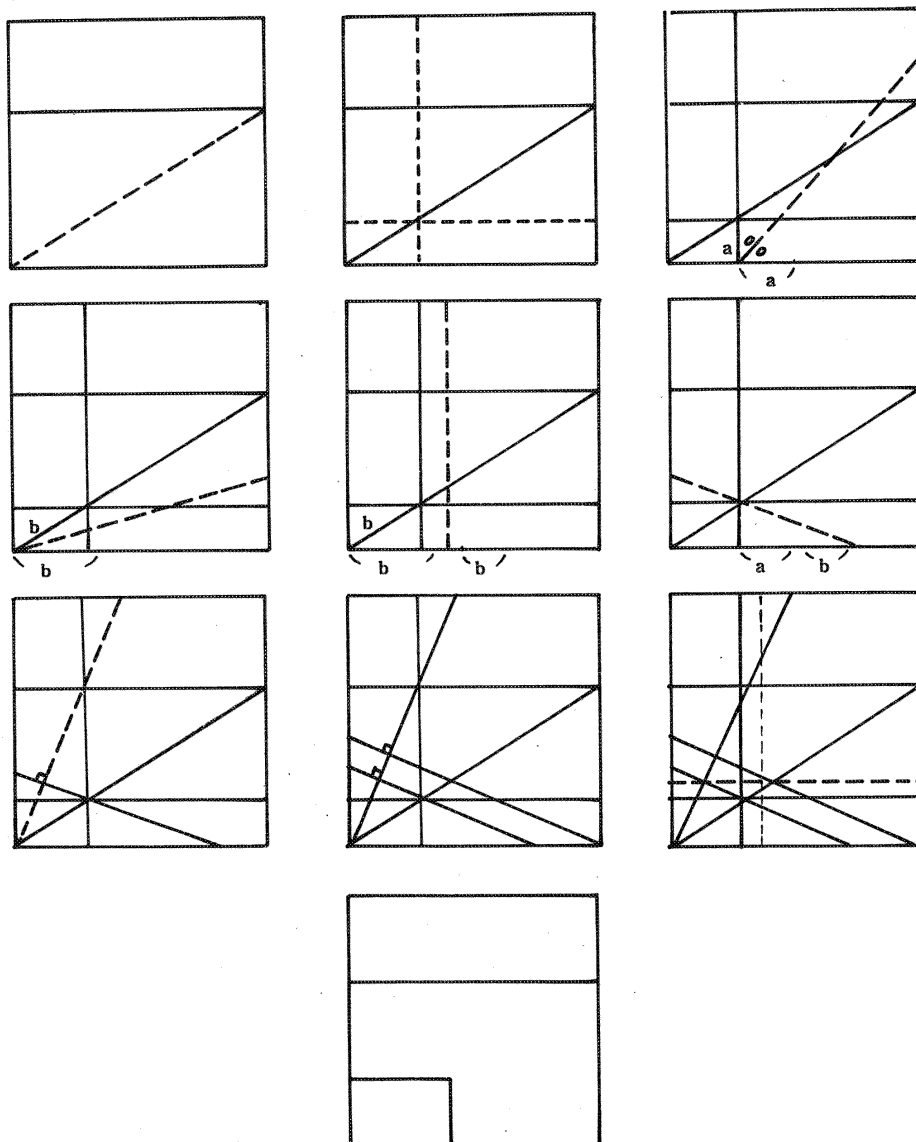
想法：比例法

每一個黃金矩形皆相似，所以

$$\frac{\text{求長}}{\text{知長}} = \frac{\text{求寬}}{\text{知寬}} = \frac{\text{求對角線}}{\text{知對角線}} = \frac{\text{求和}}{\text{知和}}$$

摺法：

利用(1)之摺法摺出一大黃金矩形。



解決了三個問題後，我們的興趣更加濃厚，又再定下下列七個不同的問題做為研究目標：

EX：(1)已知黃金矩形的對角線長且為方形紙之邊長，求作並摺出黃金矩形。

(2)已知黃金矩形的寬，且為方形紙之邊長的 $\frac{1}{2}$ ，求作並摺出黃金矩形。

(3)已知黃金矩形的周長，且為方形紙之邊長，求作並摺出黃金矩形。

(4)已知黃金矩形之長寬差，且為方形紙之邊長的 $\frac{1}{3}$ ，求作

並摺出黃金矩形。

(5)已知黃金矩形中，周長及對角線之和，且為方形紙之邊長，求作並摺出黃金矩形。

(6)已知黃金矩形中，頂點到對角線之距離，且為方形紙邊長的 $\frac{1}{3}$ ，求作並摺出黃金矩形。

(7)已知黃金矩形兩對角頂點到另兩角之對角線的垂直線間的距離，且為方形紙邊長的 $\frac{1}{4}$ ，求作並摺出黃金矩形。

經過多次思考，終將所有條件的黃金矩形摺出，因其思考過程及摺紙步驟繁雜，於是另外寫出做為補充資料，當場再行解說。

在研究過程中，我們發現所有的黃金矩形似有一共同特性，經證明，我們將此性質推廣成黃金矩形的另一種作法：

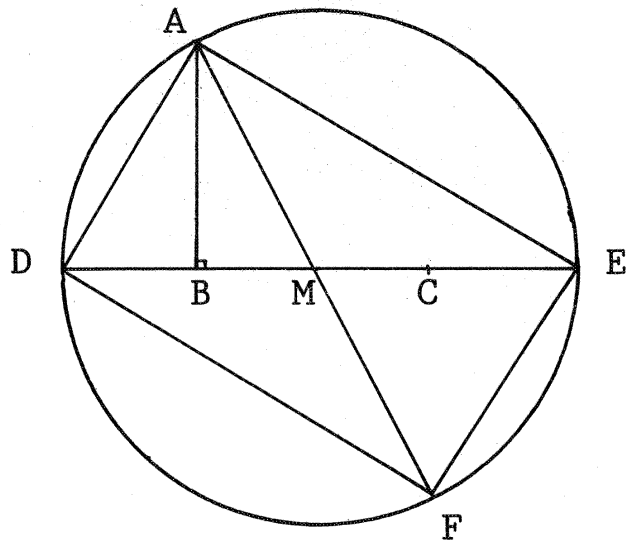
作法：1.作 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} = \overline{BC}$

2.取 $\overline{BC}$ 中點M，連 $\overline{AM}$

3.以M為圓心， $\overline{AM}$ 為半徑畫圓M

4.設圓M交直線 $\overline{BC}$ 於D、E，交直線 $\overline{AM}$ 於A、F

5.連 $\overline{AD}$ 、 $\overline{DF}$ 、 $\overline{FE}$ 、 $\overline{EA}$ 則四邊形ADFE為一黃金矩形



證明：1.設 $\overline{BM} = a = \overline{CM}$ ， $\overline{AB} = 2a = \overline{BC}$

2. $\overline{AM} = \overline{DM} = \overline{ME} = \sqrt{5}a$

3. $\overline{BD} = \overline{DM} - \overline{BM} = (\sqrt{5} - 1)a$

$\overline{BE} = \overline{BM} + \overline{ME} = (\sqrt{5} + 1)a$

4. $\because \overline{DE}$ 爲圓M直徑 $\therefore \angle DAE = 90^\circ$, 又 $\overline{AB} \perp \overline{DE}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2} &= \frac{\overline{BD} \times \overline{DE}}{\overline{BE} \times \overline{DE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{(\sqrt{5}+1)a} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AD} : \overline{AE} = (\sqrt{5}-1) : 2 \dots\dots\dots(a)$$

$$\begin{aligned}5. \angle DAE = 90^\circ (\text{直徑圓周角}) &= \angle DFE = \angle ADF \\ &= \angle AEF \dots\dots\dots(b)\end{aligned}$$

6. 由(a)(b) ADFE 爲黃金矩形。

由上述做法及研究過程中，我們又發現一種新作法：

已知： $\overline{AB}$

求作：以 $\overline{AB}$ 爲(1)長之黃金矩形

(2)寬之黃金矩形

作法：1. 作 $\overline{AE} \perp \overline{AB}$ ，且 $\overline{AE} = 2\overline{AB}$

2. 連 $\overline{BE}$ 作 $\angle ABE$ 之平分線交 $\overline{AE}$ 於D

3. 矩形ABCD即爲所求

證明：1. 設 $\overline{AB} = a$ ，則 $\overline{AE} = 2a$

$$\overline{BE} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

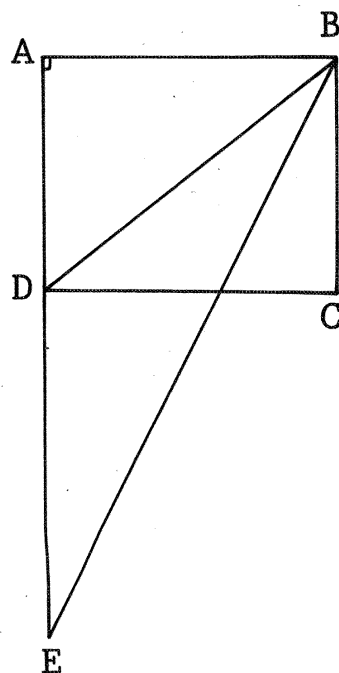
2. $\because \overline{BD}$ 平分 $\angle ABE$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AD} : \overline{DE} &= \overline{AB} : \overline{BE} (\text{內分比}) \\ &= a : \sqrt{5}a \\ &= 1 : \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \therefore \overline{AD} &= \frac{1}{1+\sqrt{5}} \times \overline{AE} (\text{比例分配}) \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{5}} \times 2a\end{aligned}$$

$$4. \overline{AB} : \overline{AD} = a : \frac{2}{1+\sqrt{5}}a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$$

$\therefore$ ABCD 即爲所求



四、結 論

當現有的理論不足以解決問題時，我們就必須發展新的理論來謀求解決之道。因此，有研究就會有收獲。

評 語

黃金分割雖然談得不少，但作者能用相當熟練的折紙方式予以表現出來，相當不錯。