一種排列的探討

國中組數學科第一名

台北縣立重慶國民中學　　作　　者：連淵淥、潘清岳

指導教師：黃照維、楊文玲

一、研究動機與目的

這是換位子引起的問題。有一次，老師想讓每位同學都有同鄰而坐的機會且要在換最少次數內達成這個目的？這引發了我們的深思。

在最完美的狀態是每一次換位子都使每位同學與上次相鄰而坐的同學不再相鄰，且在最少次數下達成目的。由於面的討論複雜且一直無法突破，只好先考慮線型排列的換位。問題是這樣的：

設從 1 到 x 個自然數原先排列爲 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n-1, n, n+1, \cdots\cdots, x$，今將這 x 個自然數重新排列得 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \cdots\cdots, P_x$，但任二相鄰數不得連號，（即滿足 $P_i \pm 1 \neq P_{i+1}$，$1 \leqslant i \leqslant x-1$），這樣的換法有多少種？

二、研究過程

(一)開始研究時，因毫無頭緒，只好先借助於電腦，共有多少組符合條件的新排列（如下頁）：

(二)嘗試了多次，我們使用底下的遞迴方式可以求出方法總數來。

1. 設有 1 到 x 的 x 個自然數，其原排列爲：

$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n-1, n, n+1, \cdots\cdots, x$ ………(A)式

現將此 x 個自然數重新排列，但必須任二相鄰的數不再連號，設其解數共有 a_x 組，而其任一組解爲：

$W_1, W_2, \cdots\cdots, W_{n-1}, x, W_{n+1}, \cdots\cdots, W_x$ ………………(B)式

```
program math ( input.output ) :
var p : text :
    a : array [ 0--20 ] of integer :
    c.n.t : integer :

    procedure eat ( x : integer ) :
    var tn : integer :
    begin
        for tn :'= 1 to n do
           begin
               if a [ tn ] = -1 then
                  begin
                     if ( a [ tn-1 ] <> x-1 )  and
                        ( a [ tn+1 ] <> x-1 )      then
                                                    begin
                                                       a [ tn ] : = x :
                            a [ tn ] : = x :
                                                       if x = n then t : = t+1
                                                          else eat ( x+1 ) :
                                                       a [ tn ] : = -1 :
                                                    end :
                  end :
           end :
    end :
begin
    assign ( p. 'prn' ) :
    rewrite ( p ) :
    for n : = 1 to 9 do
       begin
          t : = 0 :
          for c : = 0 to 20 do a [ c ] : = -1 :
          eat ( 1 ) :
          writeln ( p. '### THE DATA OF '.n.' WORDS IS '.t:6.'. ### ' ) :
       end :
    close ( p ) :
end :
```

```
### THE DATA OF 1 WORDS IS      1. ###
### THE DATA OF 2 WORDS IS      0. ###
### THE DATA OF 3 WORDS IS      0. ###
### THE DATA OF 4 WORDS IS      2. ###
### THE DATA OF 5 WORDS IS     14. ###
### THE DATA OF 6 WORDS IS     90. ###
### THE DATA OF 7 WORDS IS    646. ###
### THE DATA OF 8 WORDS IS   5242. ###
### THE DATA OF 9 WORDS IS -17914. ###
```
→因電腦數值運算極限問題，故原數值應爲 47622

（其中 $W_i \pm 1 \neq W_i + 1$，$1 \leq i \leq x-1$）

2. 將(B)式中的數 x 提出得排列爲：

W_1，W_2，……，W_{n-1}，W_{n+1}，……，W_x …………………(C)式

(C)式中 W_{n-1}，W_{n+1} 有以下兩種情形：

(1) 情形一 ：W_{n-1}，W_{n+1} 不連號時，則(C)式實際上是由 1 到 $x-1$ 個自然數重新排列的一組解，∴這樣的(C)應有 a_{x-1}

組。反過來，在此情形下，我們由(C)式倒推回到(B)式，即將數 x 接插在(C)式的 x 個間隔，（包括 W_1 的左邊與 W_x 的右邊），但數 x 絕對不能放在 $x-1$ 的左邊或右邊。∴當 W_{n-1}, W_{n+1} 不連號時，(B)式的解數有 $a_{x-1}\times(x-2)$ 組。

(2) $\boxed{\text{情形二}}$ ：W_{n-1} ，W_{n+1} 連號時，這時採取將 W_{n-1}, W_{n+1} 合併的方式。

ㄅ.合併的方式是取 $\min\{W_{n-1}, W_{n+1}\}=k$（另一個數當然為 $k+1$），來代替 W_{n-1} , W_{n+1} 。

ㄆ.然後再將(C)式中比 $k+1$ 大的數都減 1。則由①，②得

$$\begin{array}{ccccccccccc}
W_1, & W_2, & \cdots, & W_{n-2}, & \boxed{W_{n-1}, W_{n+1}}, & W_{n+2}, & \cdots, & W_x & \cdots\cdots\text{(C)式} \\
\Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & \text{取 } k=\min\{W_{n-1}, W_{n+1}\} & & & \\
u_1, & u_2, & \cdots, & u_{n-2}, & k & , u_{n+2}, & \cdots, & u_x & \cdots\cdots\text{(D)式}
\end{array}$$

ㄇ.實際上，(D)式為由 1 到 $x-2$ 的 $x-2$ 個自然數的一種排列情況，但其中除了 U_{n-2} 與 k 或 k 與 U_{n+2} 有可能連號外，其餘任二個不連號。

ㄈ.ㄇ的理由如下：設 W_p ，W_{p+1} 為(C)中不為 W_{n-2} 與 W_{n-1} ，W_{n-1} 與 W_{n+1} 或 W_{n+1} 與 W_{n+2} 的任二相鄰數，∴ W_p ，W_{p+1} 不連號，但有下列三種情形：

ⓐ W_p , $W_{p+1}<k\Rightarrow U_p=W_p$ ，$U_{p+1}=W_{p+1}$ ，∴ U_p 與 U_{p+1} 不連號。

ⓑ W_p ，$W_{p+1}>k\Rightarrow U_p=W_p-1$ ，$U_{p+1}=W_{p+1}-1$ ，∴ U_p 與 U_{p+1} 不連號。

ⓒ $W_p\geq k+2$ ，$W_{p+1}\leq k-1$ ，∴ $W_p-W_{p+1}\geq 3$ ，即 $U_p-U_{p+1}=(W_p-1)-W_{p+1}\geq 2$ ，∴ U_p 與 U_{p+1} 不連號。

ⓓ由ⓒ知 U_{n-2} ，k ，U_{n+2} 三數的關係又有下列三種情形：

3.《第一種情形》：

U_{n-2} ，k ，U_{n+2} 三數中任二種不連號，則由(c)可知：(D)實為由 1 到 $x-2$ 的 $x-2$ 個自然數重新排列的一組解，這樣的(D)應有 a_{x-2} 組，反過來我們由(D)例推回到(B)，在此我們採用將

數分裂的方法由 $x-2$ 個數生成爲 x 個數。

先由(D)：$U_1, U_2, \cdots, U_{n-2}, k, U_{n+2}, \cdots, U_x$

$$\xrightarrow[\text{二種情形}]{\text{分裂}}\begin{cases} W_1, W_2, \cdots, W_{n-2}, k, k+1, W_{n+2}, \cdots, W_x \\ \text{(右分裂)} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(E)式} \\ W_1, W_2, \cdots, W_{n-2}, k+1, k, W_{n+2}, \cdots, W_x \\ \text{(左分裂)} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(F)式} \end{cases}$$

(1)在(E)中 $W_{n+2}=U_{n+2}$，或 $W_{n+2}=U_{n+2}+1$（∵在得到(D)時比 $k+1$ 大的數都減 1 ）

(2)但 $W_{n+2}\neq k+1$ 或 $k-1$，∴ $W_{n+2}\neq k+2$，∴ $k+1$，W_{n+2} 不會連號，同理在(F)中 W_{n-2}，$k+1$ 也不會連號。

(3)由(1)，(2)回復到(C)，剩下的就是再安插數 x 回去。

(4)而 k 可能爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots, x-2$，總共 $x-2$ 個。

(5)但 $k=x-2$ 時，(E)變爲：$W_1, W_2, \cdots\cdots, W_{n-2}, \boxed{x-2, x-1}, W_{n+2}, \cdots\cdots, W_x$ ⇒再將原先提出的數 x 放回去得 $W_1, W_2, \cdots\cdots, W_{n-2}, \underbrace{\boxed{x-2, x, x-1}}_{\text{(已連號)}}, W_{n+2}, \cdots\cdots, W_x$，同理，在(F)的情況下也不合。

(6)由上面所述，第一種關係的情形下，由 1 到 x 的 x 個自然數的重新排列的方法數應有：

$$\underbrace{2}_{\text{由(1)，(2)}} \times a_{x-2} \times \underbrace{(x-2)}_{\text{由(4)}} \underset{\text{扣去}}{-} \underbrace{2 \times a_{x-2}}_{\text{由(5)}}$$

4.《第二種情形》

U_{n-2} 與 k 連號，但 k 與 U_{n+2} 不連號（或情形相反），這時我們再採取 U_{n-2} 與 k 合併的方式。

(1) U_{n-2} 與 k 連號⇒ $U_{n-2}=k-1$ 或 $k+1$。

(2)合併方式是取 U_{n-2} 與 k 較小的數，而將較大數刪去，且大於較大數的所有數皆減 1。

(3) $U_{n-2}=k-1$（或 $k+1$），則 $\min\{U_{n-2}, k\}=k-1$（或 k），則

$W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, W_{n-2}, W_{n-1}, \boxed{x}, W_{n+1}, W_{n+2}, W_{n+3}, \cdots,$
W_x …………(B)

$\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, W_{n-2}, \boxed{W_{n-1}, W_{n+1}}, W_{n+2}, W_{n+3}, \cdots,$
W_x ………(C)

取 $\min\{W_{n-1}, W_{n+1}\} = k$，且比 $k+1$ 大的數皆減 1

$\Rightarrow U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, \boxed{U_{n-2}, k}, U_{n+2}, U_{n+3} \cdots U_x$ ……(D)

取 $\min\{U_{n-2}, k\} = k-1$，且比 k 大的數都減 1

（一組連號）

$\Rightarrow V_1, V_2, \cdots, V_{n-3}, \boxed{k-1}, V_{n+2}, V_{n+3} \cdots V_x$ ……(G)

在(G)中，V_{n-3}，$k-1$，V_{n+2} 三數的關係有下列三種：

【關係一】V_{n-3}，$k-1$ 不連號，$k-1$，V_{n+2} 亦不連號，則(3)中的(G)實際上是由 1 到 $x-3$ 的 $x-3$ 個自然數重新排列的一組解，所以這樣的(G)式應有 a_{x-3} 組解。

(4)反過來說，我們要由(G)倒排還原到(B)的情形，我們還是採用數分裂的方法。

$V_1, V_2, \cdots, V_{n-3}, k-1, V_{n+1}, \cdots, V_{x-1}, V_x$ ……（G）

$\Rightarrow$ 二種情況
$\begin{cases} U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, k-1, k, U_{n+1}, \cdots, U_{x-1}, U_x \\ \text{（右分裂）} \cdots\cdots(H) \\ U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, k, k-1, U_{n+1}, \cdots, U_{x-1}, U_x \\ \text{（左分裂）} \cdots\cdots(I) \end{cases}$

(5)在(H)中 $k-1$，k 必須再分裂回到(C)去，但 $k-1$ 只能作左分裂，k 只能作右分裂，理由：

ㄅ以 $k-1$ 作向左分裂（只討論(H)，(I)同理）

$U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, \boxed{k-1}, \boxed{k}, U_{n+1}, \cdots, U_{x-1}, U_x$

$\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, \boxed{k, k-1}, \boxed{k+1}, W_{n+1}, \cdots, W_{x-1}, W_x$

↓（前式比 $k-1$ 大的必須加回 1）

$\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, k, x, k-1, k+1, W_{n+1}, \cdots,$
W_{x-1}, W_x（將原先提出的 x 安插在 k 與 $k-1$ 之間）

其中 k 可能為 2，3，4，…，$x-2$，共有 $x-3$ 個，且上式皆不連號。

ㄆ以 $k-1$ 作右分裂，則 $U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}$，$\boxed{k-1}$，$\boxed{k}$，$U_{n+1}, \cdots, U_{x-1}, U_x$

$\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}$，$\boxed{k-1 , k}$，$\boxed{k+1}$，$W_{n+1}, \cdots, W_{x-1}, W_x$

$\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}$，$k-1$，$x$，$\underbrace{k, k+1}$，$W_{n+1}, \cdots, W_{x-1}, W_x$（將 x 放入得）

在上式中造 k，$k+1$ 的連號情形，這種情形不合題意。同理 k 的分裂只能作右分裂。

(6)由上面所述：

$$\underbrace{2}_{\text{由(5)}} \times \underbrace{a_{x-3}}_{\text{由(4)}} \times \underbrace{(x-3)\times 2}_{\text{由(6)}} - \underbrace{2\times a_{x-3}} = 2^2 \times a_{x-3} \times (x-3) - 2\times a_{x-3}$$

【關係二】若 V_{n-3} 與 $k-1$ 連號而 V_{n+2} 與 $k-1$ 不連號，則可依《第二種情形》的方式繼續討論下去。

【關係三】V_{n+2} 與 $k-1$ 連號，且 V_{n-3} 亦與 $k-1$ 相鄰，這種情況是已經過二次合併才面臨三數連號的，與待會要討論的《第三種情形》類似，故在此不贅述。

5.《第三種情形》

U_{n-2} 與 k 連號，且 k 與 U_{n+2} 亦連號。

(1)此三數必為 $U_{n-2}=k-1$，k，$U_{n+2}=k+1$（或 $U_{n-2}=k+1$，k，$U_{n+2}=k-1$）

(2)此三數中最小值為 $k-1$，則除去三數中較大的兩數（即 $k+1$，k）僅保留最小數（即 $k-1$）而將大於 $k+1$ 的所有數皆減 2，自原式至此情況的合併過程如下：

$W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, W_{n-2}, W_{n-1}, x, W_{n+1}, W_{n+2}, W_{n+3}, \cdots W_x$ —(B)

$W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, W_{n-2}$，$\boxed{W_{n-1} , W_{n+1}}$，$W_{n+2}, W_{n+3}, \cdots, W_x$ —(C)

$U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, U_{n-2}$，$\boxed{k}$，$U_{n+2}, U_{n+3}, \cdots, U_x$ —(D)

$V_1, V_2, \cdots, V_{n-3}, \quad \boxed{k-1} \quad, V_{n+3}, \cdots, V_x$ —(J)

(3)在(J)中，V_{n-3}, $k-1$, V_{n+3} 有以下三種關係：

【關係一】V_{n-3} 與 $k-1$ 不連號，$k-1$ 與 V_{n+3} 亦不連號，則(2)中的(J)實際上是由 1 到 $x-4$ 的 $x-4$ 個自然數重新排列的一組解，所以這樣的(J)應有 a_{x-4} 個。

(4)與《第二種情形》中(5)的步驟相同，我們亦要由(J)共 $x-4$ 個數的排列推回(B)的 x 個數的排列：

$V_1, V_2, \cdots, V_{n-3}, k-1, V_{n+3}, \cdots, V_x$ —(J)

共兩種情況 $\begin{cases} U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, k-1, k, k+1, U_{n+3}, \cdots, U_x & \text{—(K)} \\ U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, k+1, k, k-1, U_{n+3}, \cdots, U_x & \text{—(L)} \end{cases}$

(5)在(K)（或(L)）再分裂爲(C)去時，由剛才(2)的合併過程中可知，(K)（或(L)）中只有**K**能作分裂，而(K)（或(L)）中的 K 僅能作一個方向的分裂。

理由：(K)作分裂（(L)的情況恰相反，故只討論(K)）

$U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, k+1, k, k-1, U_{n+3} \cdots U_x$ —(K)

向右分裂 $\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, k+2, k, k+1, k-1, W_{n+3} \cdots W_x$

將 x 插 x $\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, k+2, k, x, k+1, k-1, W_{n+3} \cdots W_x$ —(M)

則所得的(M)爲符合條件的解。但若(K)中的 K 向右分裂如下：

K 向左分裂 $U_1, U_2, \cdots, U_{n-3}, k+1, k, k-1, U_{n+3} \cdots U_x$ —(K)

$\Rightarrow W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, k+2, k+1, k, k-1, W_{n-3} \cdots W_x$ —(N)

至此(N)已不符合(C)的條件，故不合。

則(K)中的 K 只能向右分裂，同理可知(L)中的 K 只能作向左分裂，由上所述可得：

$\underline{2 \times a_{x-4} \times (x-4)}$

└→ a_{x-4} 中的任一數字皆可分裂

理由：觀察(M)

$W_1, W_2, \cdots, W_{n-3}, k+2, k, x, k+1, W_{n+3} \cdots W_x$ —(M)

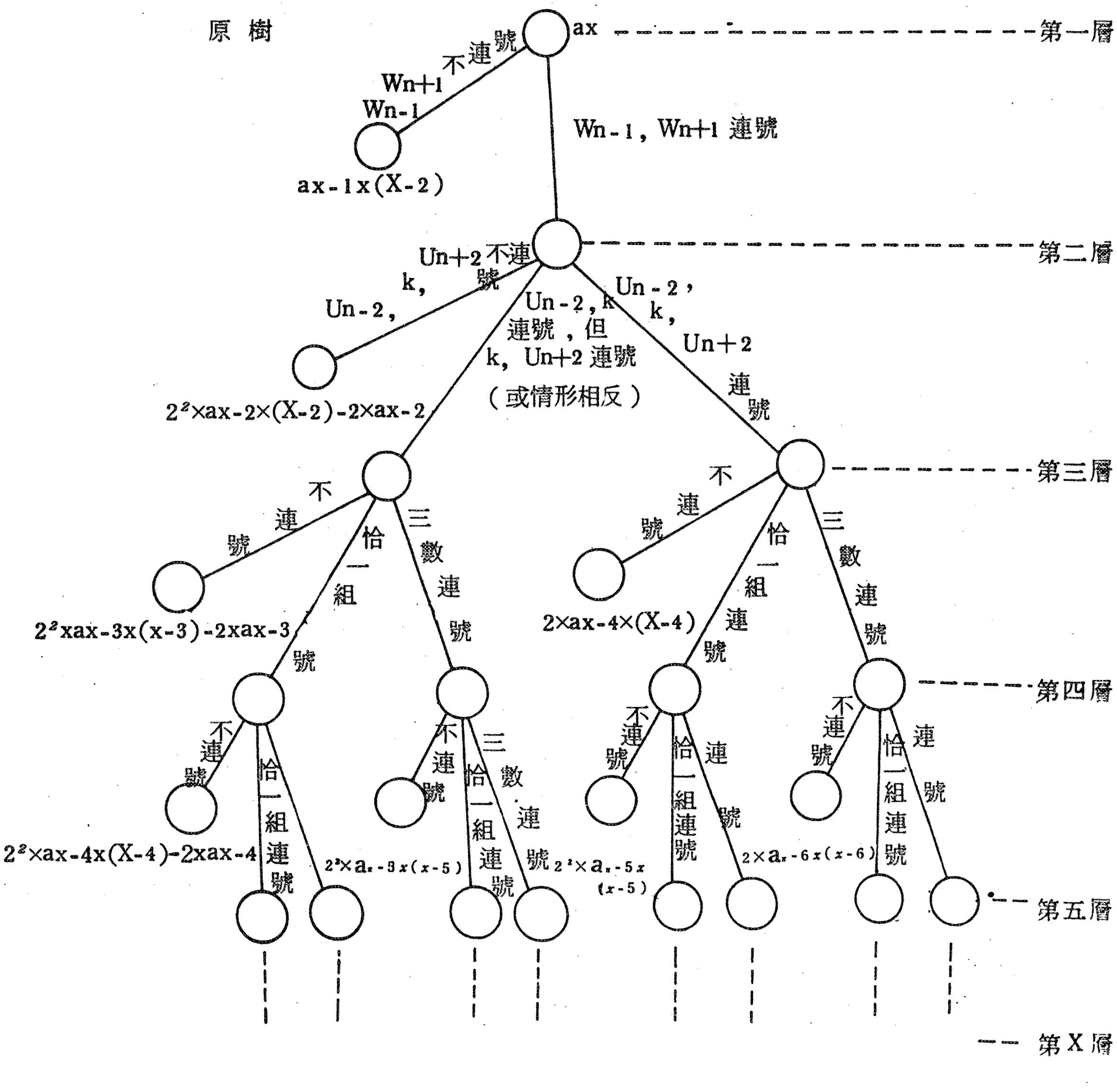
因爲式中有 $k+2$ 的存在，∴ k，$k+1$ 至多爲 $x-3$，x

－2，不會造成不合的情況，因此可作一結論，只要經過一次連號的合併，就沒有減數這一部分。

【關係二】V_{n-3}與$k-1$連號，但$k-1$與$k+3$ 不連號時與用《.第三種關係》的討論方式相同。

【關係三】V_{n-3}與$k-1$連號，V_{n+3}與$k-1$亦連號，這情況可依《第三種關係》的討論方式繼續探討。

㈢ 1.我們利用上述討論的方法，計算出一些式子，將之表成一樹：



2.為了探討方便，將每個子葉分成三部分討論：

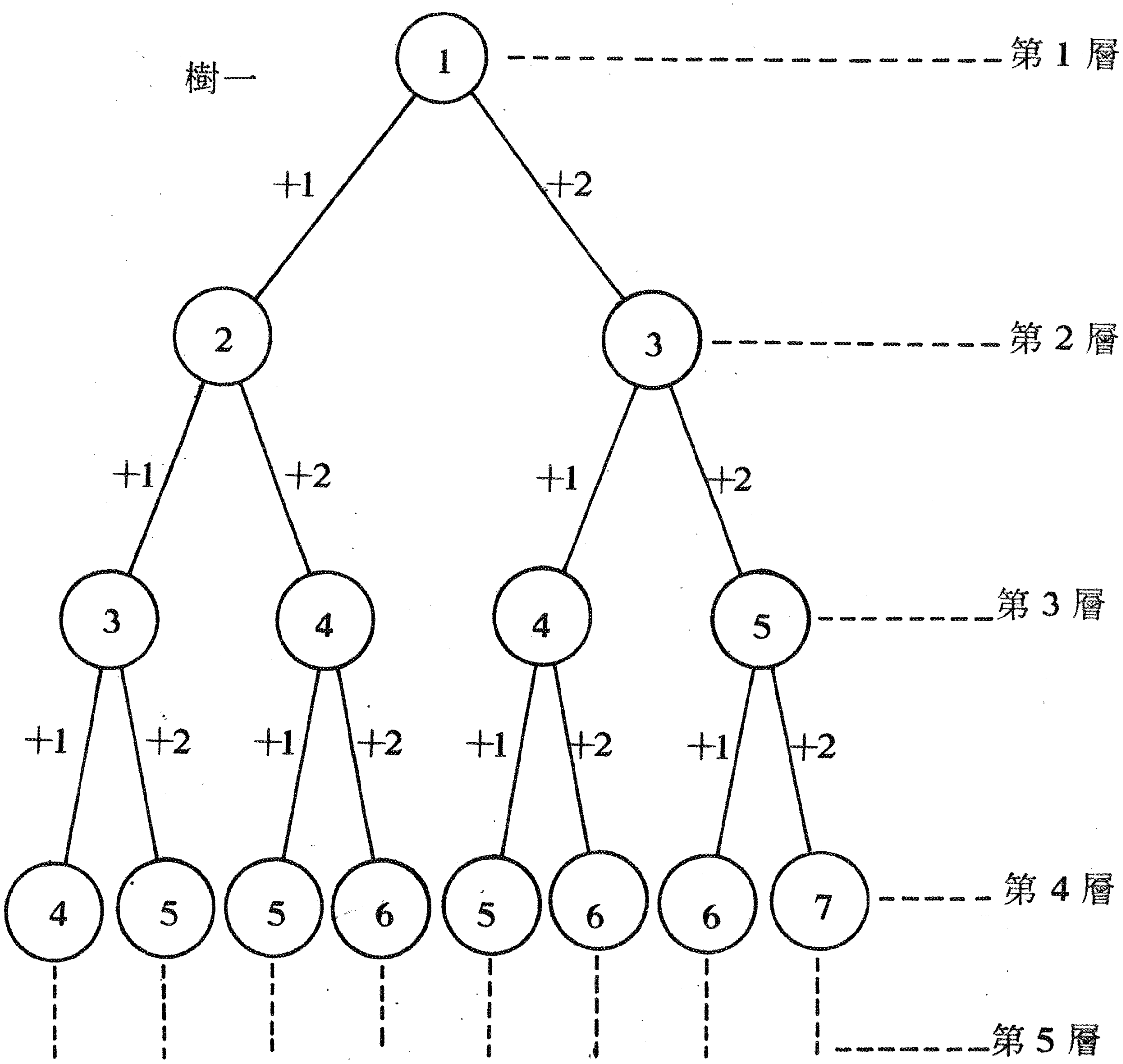
(1)乘數①

(2) a_{x-m} 部分

(3)乘數②，有些子葉還多了「減數」這一部分

例：$\underbrace{2}_{\text{乘數①}} \times \underbrace{a_{x-2}}_{a_{x-m}\text{部分}} \times \underbrace{(x-2)}_{\text{乘數②}} - \underbrace{2 \times a_{x-2}}_{\text{減數}}$

由原樹可知，除第一層的分支度爲 2 外，其它節點之分支度皆爲 3，因此若將第一層刪去，保留其子節點成爲新的樹根，而其右子樹則成爲新的樹，在此新樹中，可知每一節點下均有一樹葉（即分支度爲 0 之節點），爲了方便探討，我們便將所有的樹葉併入其上的節點中，又爲簡化分析，先探討每一式中 a_{x-m} 的部分，$\because$ $2 \leq m \leq x-1$，$m \in N$，又因第一層已刪去，所以新樹中 m 是大於第於 2 的，因而再用 n 代表 m－1 得出完整之滿二元樹，如下：



(1)樹一中，若節點上的數字爲n，則n在原樹中所對應的爲 $a_{x-(n+1)}=a_{x-m}$，如節點1→a_{x-2}……，節點k→$a_{x-(k+1)}$……。

(2)我們先討論在樹一中的第k層出現n（$n\in N$）的個數。

ㄅ.定義：在某個節點下的節點稱爲其子節點，在其上的節點稱爲其父節點。

ㄆ.由樹一知，某節點的數爲n時，其子節點所對應的數必向左爲n＋1，向右爲n＋2。

ㄇ.由ㄅ，ㄆ知"第k層出現n（$n\in N$）的個數"這個問題可以轉化爲：第一個數字是1，其餘k－1個數字是1或2，而這k個數字相加等於n的情形有多少種？

例如：第四層出現三個5，而這三個5，由左而右分別是這樣得來的，即：

$$5=\underset{\triangle}{1}+1+1+2$$

$$5=\underset{\triangle}{1}+1+2+1 \quad （由左而右）$$

$$5=\underset{\triangle}{1}+2+1+1\downarrow$$

ㄈ.∵每一個數字至少是1至多爲2，且第一個數字是1，∴"第k層出現n（$n\in N$）的個數"這個問題又可轉化爲"第一個數字是0，其餘k－1個數字是0或1，而這k－1個數字（因第一個數必爲0）相加等於n－k的情況有多少種？"由組合原理知：

"第k層出現n（$n\in N$）的個數有

$$C^{k-1}_{n-k}=\frac{(k-1)!}{(n-k)!(2k-n-1)!}\text{個}"$$

即第k層出現m－1的個數爲 C^{k-1}_{m-1-k} 個，例如：第4層出現6的個數有 $C^{4-1}_{6-4}=C^{3}_{2}=3$ 個。

(3)接著我們討論在樹二中，n最早出現在何層？n最後結束於何層？

ㄅ.∵每一層至少要加 1，又∴第一層固定為 1，∴第 k 層最小的數字為 k。

ㄆ.又∵每一層至多加 2，且第一層固定為 1，∴第 k 層最大的數為：

$$\underbrace{1+2+\cdots\cdots+2}_{(k-1)\text{個}}=1+2(k-1)=2k-1$$

ㄇ.∴在前 k 層最大的數為 2 k－1。

ㄈ.第 k 層中 2 k－1 的左子節點為 2 k，右子節點為 2k＋1 ∴ 2k，2 k＋1 最早出現在第 k＋1 層。

若 $n=2k \Rightarrow \left[\frac{n}{2}+1\right]=k+1$

若 $n=2k+1 \Rightarrow \left[\frac{n}{2}+1\right]=k+1$

故 n 最早出現在第 $\left[\frac{n}{2}+1\right]$ 層，而結束在第 n 層。

綜合(2)(3)所論，∴這樣的節點總數共有

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}+1\right]}^{n} C_{n-k}^{k-1} \text{ 個}$$

(4)由(1)∵節點 $n \to a_{x-m}$ ∴在原樹中出現 a_{x-m} 的個數共有→

$$\sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m-1} C_{m-1-k}^{k-1} \text{ 個}$$

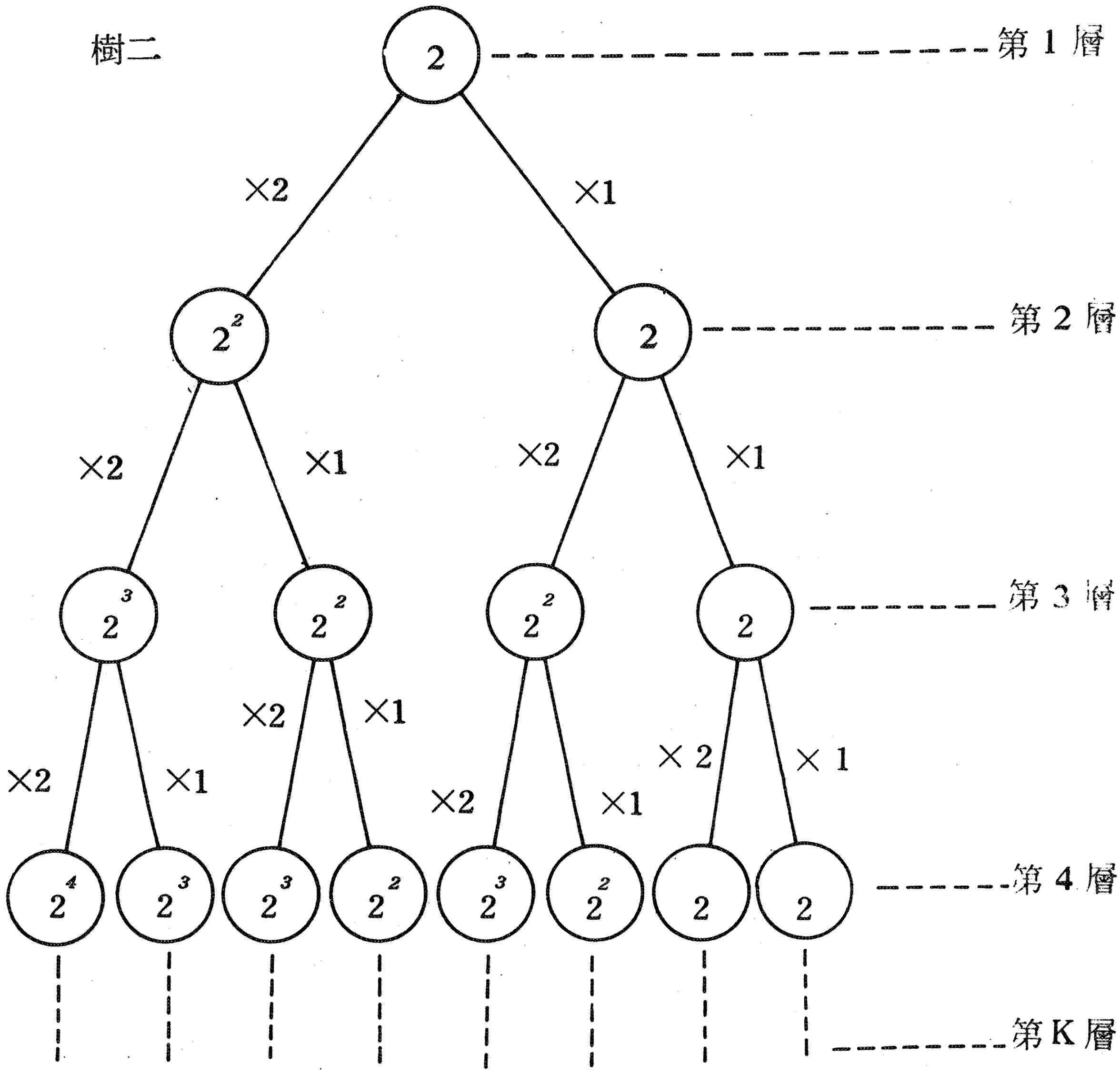
3.在原樹中，仔細觀察“乘數①”部分，可知：

(1)某一節點向左分支即得 2 倍的乘積。

(2)某一節點向右分支不能得到任何乘積，設得到乘數 1。

利用上述二種關係，畫成二元樹如下：

樹二



4. 底下我們要探討的是第 k 層中，a_{x-m} 的"乘數①"爲何？

(1)我們對照原樹及樹一，當某一節點向左加 1 時（在樹一），在樹二的相對位置，即得到 2 倍乘數，而若某節點向右加 2 時（在樹一），在樹二的相對位置即得 1 倍乘數。

(2)前面論及，第 k 層中出現 n 的個數爲 C^{k-1}_{n-k} 個。

而 $n-k=0+\underbrace{a_1+\cdots\cdots+a_{k-1}}$

$\Downarrow$ 其中有 n − k 個 1，其餘是 0 轉化回去

（將等號右邊每個數皆加 1，共 k 個）

$n=\underbrace{1+b_1+\cdots\cdots+b_{k-1}}$

其中有 n − k 個 2，其餘是 1。

由(1)→第 k 層中 $a_{x-(n+1)}$ 的乘數應為 $2^{k-(n-k)}=2^{2k-n}$

$\Rightarrow a_{x-m}$ 的乘數應為 2^{2k-m+1}

(3)由註 1 及註 2 的討論可知“減數”這一部分，只有在皆為一組連號合併下來的情況才會發生，對應到原樹上，即為每一層最左邊的節點才有減數這一項，又由前面的討論可知，原樹中每層最左邊的節點中的 a_{x-m} 中的 m，呈一種遞加關係，也就是原樹中每層最左邊節點中的 a_{x-m} 部分均不同，又因原樹中每一層只有最左邊的節點才有減數這項，因此反過來說，原樹中所有 a_{x-m} 部分相同的式子中，只有一個須要有減數這一項。如 m = 5 時，原樹中共有三式之 m 值為 5。

$16\times a_{x-5}\times(x-5)-2\times a_{x-5}$ …①（某層中最左節點之式）

$4\times a_{x-5}\times(x-5)$ ………………②

$4\times a_{x-5}\times(x-5)$ ………………③

而其中只有①式有減數部分，②③式均無此一部分。綜合前面所論，我們可得一式：

$$\left(\sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m=1} C_{m-k-1}^{k-1}\times 2^{2k-m+1}\times a_{x-m}\times(x-m)\right)-2\times a_{x-m}$$

但此式並不完美，因為它只求出原樹中，所有有關 a_{x-m} 的部分的和，所以應將 m = 1 到 x − 1 之 a_{x-m} 相加，又原樹中第一層的式子也必須加上，故得全式為：

$$a_x=\left[\sum_{m=2}^{x-1}\left(\sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{m-1} C_{m-k-1}^{k-1}\times 2^{2k-m+1}\times a_{x-m}\times(x-m)\right)-2\times a_{x-m}\right]+a_{x-1}\times(x-2)$$

評　語

關於排列問題應該是相當普遍，但是如果能將整個過程很嚴謹地證明出來就不是很容易的事了，兩位作者對於內容相當熟悉，想必花費很多的時間在本題之研究上。

其次利用電腦之實驗來幫助數學之證明，像這種將電腦應用到數

學上之作法實在值得獎勵。