

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國小-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 小 組

作品名稱：『先下手為強』 嗎？

關 鍵 詞：三角形、頂點、機率

編 號：080403

學校名稱：

臺北縣三重市永福國民小學

作者姓名：

黃偉城、林智仁、陳彥儒

指導老師：

田德勝



『先下手為強』 嗎？

壹、 摘要

- 一、介紹一個簡單好玩的小遊戲。
- 二、小遊戲進行時，有人先下；有人後下，但先後兩方對下的勝算卻不同！
- 三、研究分析小遊戲先後兩方對下的勝算為何不同？
- 四、根據研究分析小遊戲先後勝算所得的 4 個發現來推算先後兩方對下真正(實際)的勝算！

貳、 研究動機

最近我們班流行一種小遊戲，是從隔壁班傳來的。因為這個遊戲有趣好玩，所以我們常利用下課時間找老師一起玩。起初玩的時候我們也不覺得這個遊戲有什麼特別的地方，只是這個遊戲一開始下的時候，必須有人先下；有人後下，基於尊師重道，禮讓老師為先，所以我們每次都先讓老師出手，結果一連玩了三局，老師居然一局也沒贏！想不到老師竟然這麼「肉腳」！原來老師並沒有我們想像的那樣聰明！可是老師一向是聰明過人，怎麼這次老師變得這麼笨呢？是什麼原因讓老師變得那麼笨！我們都讓老師先出招了，況且古人也說：「先下手為強！」怎麼老師還連輸三局呢？就是這個原因引起我們的研究動機。

參、 研究目的

- 一、在這個遊戲中，先下手的和後下手的人，他們輸贏的機率一樣嗎？
- 二、在這個遊戲中，有人得先下，有人得後下，如果是先下的人，要怎樣下才會勝算較大？如果是後下的人，要怎麼下才會勝算較大？

肆、 研究器材

一、 紙

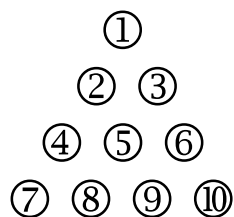
二、 筆

三、 自製簡易的遊戲紙板(便於分析推論的時候使用)

伍、 研究過程

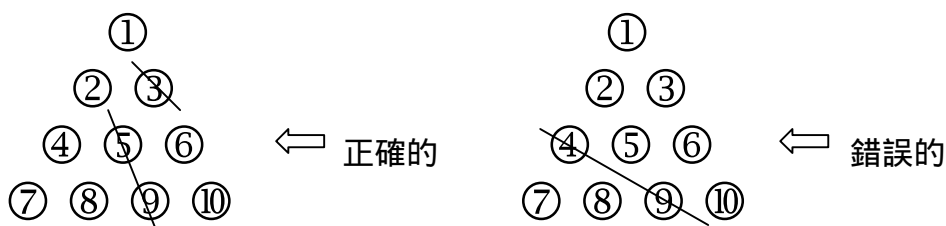
一、 玩法解說：

(一) 遊戲的圖形，如下圖所示：



總共有 10 個圓圈疊羅漢成 4 層，然後排列成一個三角形。以①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩表示 10 個圓圈，其中的①⑦⑩三個圓圈代表三角形的三個頂點；而其中的⑤代表三角形的中心點。

(二) 先後兩方輪流把圓圈劃掉，一次可以劃 1 個；一次也可以劃 2 個，但是必須劃直線，不可以劃曲線，也不可以跳著劃線。



(三) 遊戲的勝敗：先後的兩方，在對下的過程中，輪到誰劃最後的 1 個圓圈，誰就輸了！也就是說，最後的 1 個圓圈是誰劃掉的，誰就輸！

二、研究：

研究一：看看先下手的人和後下手的人，他們各自的勝算有多大？

方法：請老師找班上 20 個同學來實驗，每兩人為一組，分成 10 組，然後每一組各玩 10 局，其中五局由兩人中的一人先下，另外五局再由兩人中的另一人先下，也就是說 10 局裡頭，每組中的每個人先下、後下的局數都是一樣五局，這樣才公平。

結果：最後得到全班的勝負統計表如下：

共 100 局	攻 守 勝 負	先下手者	後下手者
	贏的局數	27	73
	贏的機率	27 %	73 %

從上面的實驗可以知道：

- (1) 先下手者的勝算較小！；後下手者的勝算較大！
- (2) 先下手者贏的局數：後下手者贏的局數
= 先下手者贏的機率：後下手者贏的機率

$$= 27 \% : 73 \%$$

$$= 27 : 73$$

$$1 : 3$$

(3) 先下手者贏的機率：後下手者贏的機率

$$= 27 : 73 \quad 1 : 3$$

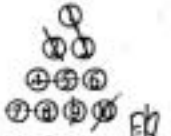
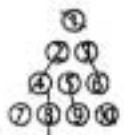

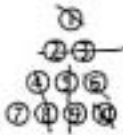


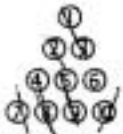
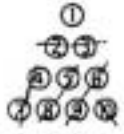
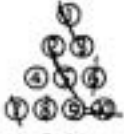
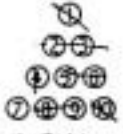
(27 : 73 大約如 25 : 75 = 1 : 3)

後下手者的勝算是先下手者的 3 倍！

也就是說先下手者的勝算只有後下手者的 1/3 倍！





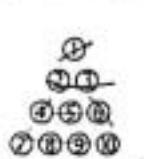


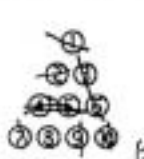
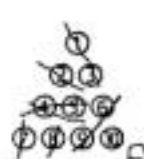
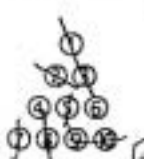
十組同學(共 20 人)對下的情形表，一一如下！(每組一張，共十張)

組別：第 7 組

	(1)  先下手者： <u>敗</u>	
(2)  先下手者： <u>敗</u>	(3)  先下手者： <u>敗</u>	(4)  先下手者： <u>敗</u>
(5)  先下手者： <u>勝</u>	(6)  先下手者： <u>敗</u>	(7)  先下手者： <u>敗</u>
(8)  先下手者： <u>勝</u>	(9)  先下手者： <u>敗</u>	(10)  先下手者： <u>敗</u>




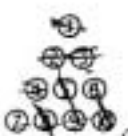






第 <u>7</u> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	2	8
		贏的機率	20%	80%

組別：第 2 組

	(1)  先下手者：勝	
(2)  先下手者：勝	(3)  先下手者：勝	(4)  先下手者：勝
(5)  先下手者：勝	(6)  先下手者：勝	(7)  先下手者：勝
(8)  先下手者：勝	(9)  先下手者：敗	(10)  先下手者：敗





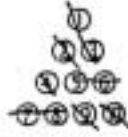

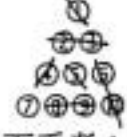
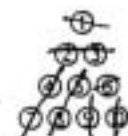


<div>第 <div>✓</div> 組</div>	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	5	5
		贏的機率	50%	50%

組別：第 3 組

	(1)  先下手者： <u>敗</u>	
(2)  先下手者： <u>敗</u>	(3)  先下手者： <u>勝</u>	(4)  先下手者： <u>敗</u>
(5)  先下手者： <u>敗</u>	(6)  先下手者： <u>敗</u>	(7)  先下手者： <u>敗</u>
(8)  先下手者： <u>敗</u>	(9)  先下手者： <u>勝</u>	(10)  先下手者： <u>敗</u>

第 <u>3</u> 組	共 10 局	結果	攻守	先下手者	後下手者
		贏的次數		2	8
		贏的機率		20%	80%

組別：第 4 組

	(1)  先下手者： <u>白</u>	
(2)  先下手者： <u>白</u>	(3)  先下手者： <u>白</u>	(4)  先下手者： <u>白</u>
(5)  先下手者： <u>白</u>	(6)  先下手者： <u>白</u>	(7)  先下手者： <u>白</u>
(8)  先下手者： <u>白</u>	(9)  先下手者： <u>白</u>	(10)  先下手者： <u>白</u>

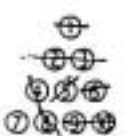
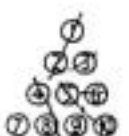
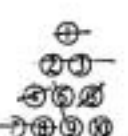
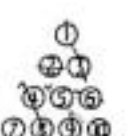
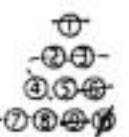


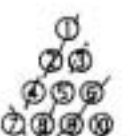

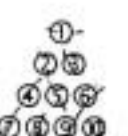
第 <u>4</u> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
			贏的次數	8
		贏的機率	20%	80%

組別：第 5 組

	<p>(1)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>	
<p>(2)</p> <p>先下手者：<u>勝</u></p>	<p>(3)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(4)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>
<p>(5)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(6)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(7)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>
<p>(8)</p> <p>先下手者：<u>勝</u></p>	<p>(9)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(10)</p> <p>先下手者：<u>敗</u></p>


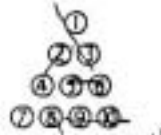

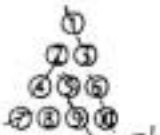
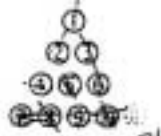
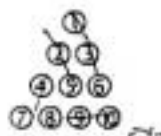
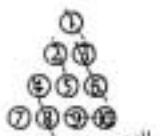

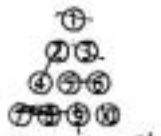
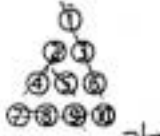
第 <div>5</div> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	2	8
		贏的機率	20%	80%

組別：第 6 組

	<p>(1)</p>  <p>先下手者：<u>勝</u></p>	
<p>(2)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(3)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(4)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>
<p>(5)</p>  <p>先下手者：<u>勝</u></p>	<p>(6)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(7)</p>  <p>先下手者：<u>勝</u></p>
<p>(8)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(9)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>	<p>(10)</p>  <p>先下手者：<u>敗</u></p>

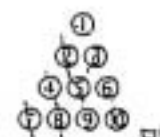
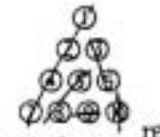


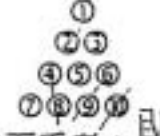

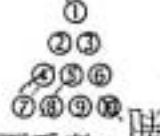

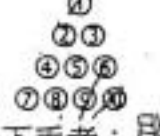

第 <u>6</u> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	3	7
		贏的機率	30%	70%

組別：第 7 組

	(1)  先下手者： <u>勝</u>	
(2)  先下手者： <u>勝</u>	(3)  先下手者： <u>勝</u>	(4)  先下手者： <u>敗</u>
(5)  先下手者： <u>敗</u>	(6)  先下手者： <u>敗</u>	(7)  先下手者： <u>勝</u>
(8)  先下手者： <u>敗</u>	(9)  先下手者： <u>敗</u>	(10)  先下手者： <u>敗</u>



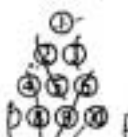
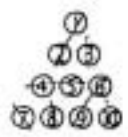
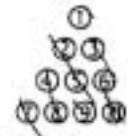




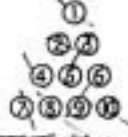
第 <u>7</u> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	4	6
		贏的機率	40%	60%

組別：第 8 組

	(1)  先下手者： <u>敗</u>	
(2)  先下手者： <u>勝</u>	(3)  先下手者： <u>敗</u>	(4)  先下手者： <u>敗</u>
(5)  先下手者： <u>敗</u>	(6)  先下手者： <u>敗</u>	(7)  先下手者： <u>勝</u>
(8)  先下手者： <u>敗</u>	(9)  先下手者： <u>敗</u>	(10)  先下手者： <u>敗</u>

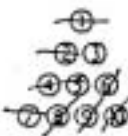
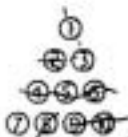

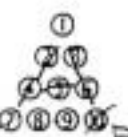
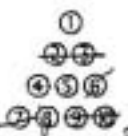

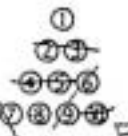
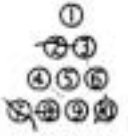
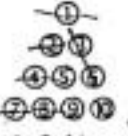
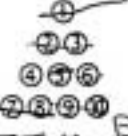
第 <u>8</u> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	<u>2</u>	<u>8</u>
		贏的機率	<u>20%</u>	<u>80%</u>

組別：第 9 組

	(1)  先下手者： <u>敗</u>	
(2)  先下手者： <u>敗</u>	(3)  先下手者： <u>敗</u>	(4)  先下手者： <u>敗</u>
(5)  先下手者： <u>敗</u>	(6)  先下手者： <u>勝</u>	(7)  先下手者： <u>敗</u>
(8)  先下手者： <u>勝</u>	(9)  先下手者： <u>敗</u>	(10)  先下手者： <u>勝</u>

第 <u>9</u> 組	共 10 局	攻守 結果	先下手者	後下手者
		贏的次數	<u>2</u>	<u>8</u>
		贏的機率	<u>20%</u>	<u>80%</u>

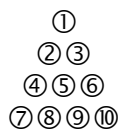
組別：第 10 組

<p>(1)</p>  <p>先下手者：勝</p>		
<p>(2)</p>  <p>先下手者：敗</p>	<p>(3)</p>  <p>先下手者：勝</p>	<p>(4)</p>  <p>先下手者：敗</p>
<p>(5)</p>  <p>先下手者：敗</p>	<p>(6)</p>  <p>先下手者：敗</p>	<p>(7)</p>  <p>先下手者：敗</p>
<p>(8)</p>  <p>先下手者：勝</p>	<p>(9)</p>  <p>先下手者：敗</p>	<p>(10)</p>  <p>先下手者：敗</p>

第 <u>10</u> 組	共 10 局	攻守	先下手者	後下手者
		結果		
		贏的次數	3	7
		贏的機率	30%	30%

研究二：藉由兩人實際對下的過程，來研究先下手的人和後下手的人他們各自的
教戰手冊（攻防策略）！

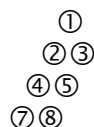
第一局



甲 先下

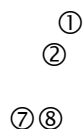
第一步：先劃掉⑥，這一步會這麼做並沒有什麼依據的道理，也就是隨意劃掉的

第二步：現在剩下 7 個圓圈，如下圖：



我隨意劃掉④⑤

第三步：現在剩下 4 個圓圈，如下圖：



分析：1.若我劃掉①，對方劃掉⑦⑧，則剩下②，我輸了！

2.我劃掉①②，對方劃掉⑦或⑧，我輸了！

3. 我若劃掉⑦或⑧，對方劃掉①②，一樣我輸了！

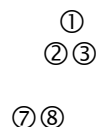
4.我劃掉⑦⑧，對方劃掉①或②任一個，我也輸了！

結果：第一局我先下，下到這裡剩下 4 個圓圈，接下來無論如何我怎麼下，我都輸了！

乙 後下

第一步：劃掉⑨⑩，這一步是任意劃掉的，並沒有依據的道理。

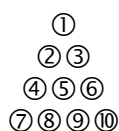
第二步：現在剩下 5 個圓圈，如下圖：



分析：這時我若劃掉任意 2 個圓圈，我必輸，換句話說，我只能劃掉 1 個圓圈，想一想，我就隨意劃掉③

第一局結果：先下手的人輸了！

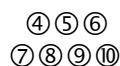
第二局



甲 先下

第一步：先隨意劃掉②③

第二步：這時剩下 7 個圓圈如下圖：



隨意劃掉 2 個圓圈，所以我劃掉⑥⑩

第三步：這時剩下④⑤⑧⑨四個圓圈如下圖：



分析：1.我如果劃掉④或⑤或⑧或⑨其中任何一個圓圈，對方再劃掉另外兩個圓圈，則剩下一個圓圈，我輸了！

2.我如果劃掉④⑤或⑤⑨或⑧⑨或④⑧其中任何兩個圓圈，對方再劃掉另外一個圓圈，則剩下一個圓圈，我輸了！

結果：第二局我也先下，下到這裡，剩下 4 個圓圈，接下來無論如何我怎麼下，我都輸了！

乙 後下

第一步：先隨意劃掉①

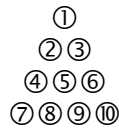
第二步：現在圓圈剩下 5 個，如下圖：



分析：這時，我若任意劃掉 2 個圓圈，我必輸！換句話說，我祇能劃掉一個圓圈，想一想，我就隨意劃掉⑦

第二局結果：先下手的人輸了！

第三局



甲 先下

第一步：先隨意劃掉④⑤

第二步：這時剩下 7 個圓圈，如下圖：



隨意劃掉⑦

第三步：這時剩下 4 個圓圈，如下圖：



分析：這時我不管是劃掉一個圓圈或兩個圓圈，我都輸！但是還是得玩下去，所以我隨意劃掉⑧⑨

結果：第三局我又先下，下到這裡，剩下 4 個圓圈，接下來無論如何我怎麼下，我都輸了！

第三局結果：先下手的人輸了！

先後兩方對下三局得到第一個發現：

10 個圓圈劃剩下到最後的 4 個圓圈時是決勝的關鍵！

- 因為
1. 剩下 4 個圓圈時才出手的人，這時他劃掉 1 個圓圈，對方劃掉 2 個圓圈，剩下最後 1 個圓圈，他輸了！
 2. 剩下 4 個圓圈時才出手的人，這時他劃掉 2 個圓圈，對方劃掉 1 個圓圈，剩下最後 1 個圓圈，他也輸了！

所以，劃剩下到最後 4 個圓圈的局面時，對這時才出手的人很不利！不論攻守哪一方，若能將局勢導引到剩下 4 個圓圈時，再讓對方來下，那他的勝算就很大！

乙 後下

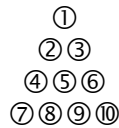
第一步：先隨意劃掉①

第二步：這時剩下 6 個圓圈，如下圖：



我隨意劃掉②③

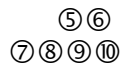
第四局



甲 先下

第一步：先隨意劃掉②④

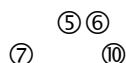
第二步：這時剩下 6 個圓圈，如下圖：



分析：1. 根據前面三局所得到的第一個發現，這時我一定得劃掉兩個圓圈，讓圓圈剩下 4 個，因為這時對方接著下，局勢對對方很不利，而有利於我！

- 2.
- (1) 我如果劃掉⑤⑥，這時剩下⑦⑧⑨⑩ 4 個圓圈 我贏了！
 - (2) 我如果劃掉⑥⑩，這時剩下⑤⑦⑧⑨ 4 個圓圈 我贏了！
 - (3) 我如果劃掉⑤⑨，這時剩下⑥⑦⑧⑩ 4 個圓圈 我贏了！
 - (4) 我如果劃掉⑨⑩，這時剩下⑤⑥⑦⑧ 4 個圓圈 我贏了！
 - (5) 我如果劃掉⑦⑧，這時剩下⑤⑥⑨⑩ 4 個圓圈 我贏了！

* 但是 (6) 我如果劃掉⑧⑨，這時剩下⑤⑥⑦⑩ 4 個圓圈 我會輸！如下圖，對方只要劃掉⑤或⑥，我就輸了！



所以，我選擇 (2) 的情形，劃掉⑥⑩

乙 後下

第一步：先隨意劃掉①③

第二步：這時剩下 4 個圓圈，如下圖：



分析：1. 根據前面三局所得的第一個發現：下到剩下 4 個圓圈時的局勢，對這時才出手的人很不利！

- 2.
- (1) 若我劃掉⑤或⑦或⑧或⑨其中一個，對方祇要劃掉任意兩個 我輸了！
 - (2) 若我劃掉⑤⑨或⑤⑧或⑧⑨或⑦⑧任意兩個，對方祇要劃掉其中 1 個 我也輸了！

結果：第四局我後下手，下到這裡剩下 4 個圓圈 我輸了！

以這局而言，一開始對方劃掉 2 個圓圈時，我不應該接著也劃掉 2 個圓圈，因為這時圓圈數目剩下 6 個，對方根據前三局所得的第一個發現，他必然選擇劃掉 2 個圓圈，讓圓圈數目剩下 4 個，這時才輪到我下，局勢不利於我！

所以，當對方一開始劃掉 2 個圓圈時，我應該選擇劃掉 1 個圓圈！這時剩下 7 個圓圈，接著對方若劃掉 1 個圓圈，我可以選擇劃掉 2 個圓圈；若對方劃掉 2 個圓圈，則我可以選擇劃掉 1 個圓圈，因為這時圓圈數目剩下 4 個，局勢不利對方！而有利於我了！

第四局結果：先下手的人輸了！

先後兩方對下到第四局，得到第二個發現：

10 個圓圈中的前面 3 個圓圈是另外一個決勝的關鍵！

也就是說，誰先湊前面 3 個圓圈被劃掉，則局勢對誰就比較有利！

舉例而言：

先下手的人一開始若祇劃掉 1 個圓圈時，則後下手的人必然選擇劃掉 2 個圓圈。同理，先下手的人一開始若劃掉 2 個圓圈，則後下手的人接著必然選擇劃掉一個圓圈，來湊前 3 個圓圈被劃掉，因為誰先湊前 3 個圓圈被劃掉，則愈能主導之後的局面。因為這時剩下 7 個圓圈，有兩種情形如下：

1. 若先下的人劃掉 1 個圓圈，則後下的人可以選擇劃掉 2 個圓圈，讓圓圈數目剩下四個！
2. 若先下的人劃掉 2 個圓圈，則後下的人可以選擇劃掉 1 個圓圈，讓圓圈數目剩下四個！

這時，不論是第 1 種情形或第 2 種情形都符合上述的第一個發現：剩下四個圓圈時是決勝的關鍵！

所以，從這可以看出此時局勢有利於後下手的人！而我們也可以從這看出這個遊戲一開始對先下手的人就比較不利！（因為這個遊戲的主動權，不在先下手的人，而是在後下手的人；後下手的人可以根據先下手的人的下法來因應變化、見招拆招！）

攻守兩方對下到第四局，從第四局甲的分析(6)得到第三個發現：

10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中若有 2 個或 3 個圓圈位在頂點和中心點的位置時，對這時接著才下手的人反而有利！

雖然，根據上述第一個發現：

10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，對這時才接著下手的人很不利！

但是若這剩下的 4 個圓圈的位置，有 2 個或 3 個圓圈是位在頂點和中心點的位置時，則局勢由原本不利這時下手的人轉變成有利於這時才下手的人！

也就是說：10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，若是這 4 個圓圈的位置，有 2 個或 3 個是位在頂點和中心點的位置時，則對這時才下手的人反而有利！

故！從這也衍生出第四個發現：

這個遊戲一開始對先下手的人就比較不利！然而未必完全不利！故，對於先下手的人而言，在遊戲的過程中，應該盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉！因為先下手的人如能保有頂點和中心點位置的圓圈在 2 個或 3 個以上，這時反而對先下手的人有利！

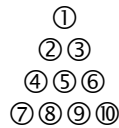
根據上述的第二個發現：

我們得知：

這個遊戲一開始就不利於先下的人！但如何在位於不利局勢，盡力扭轉成有利局勢，這是先下的人的首要課題！

也因為如此，一開始即居於劣勢的先下手者，必須盡量在遊戲過程中保有頂點和中心點位置的圓圈數目維持在 2 個以上。因為如此，先下的人才可以保有些許勝算！

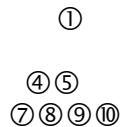
第五局



甲 先下

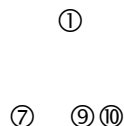
第一步：根據上述的第四個發現：先下手的人應該保有頂點和中心點位置的圓圈盡量不被劃掉！所以祇要不去劃掉頂點和中心點位置的圓圈都可以，所以我先劃掉②

第二步：這時剩下 7 個圓圈，如下圖：



根據上述的第四個發現：對於先下的我而言，我得盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉！所以我選擇劃掉④

第三步：這時剩下 4 個圓圈，如下圖：



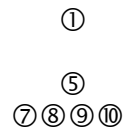
根據上述的第一個發現：剩下四個圓圈時，局勢對這時才下手的人不利！也就是說，現在局勢不利於我！

但又根據上述第三個發現：若剩下的 4 個圓圈，其中有 2 個或 3 個圓圈的位置是位在頂點和中心點位置，這時局勢會逆轉反而對這時才下手的人有利！所以，現在的我會反敗為勝！因為現在剩下的 4 個圓圈，有 3 個圓圈是位在頂點位置上，所以局勢反而對我有利！故，我選擇劃掉⑨，我贏了！

乙 後下

第一步：根據上述第二個發現：我必然選擇劃掉兩個圓圈，因為這樣對我有利！所以我劃掉③⑥

第二步：這時剩下 6 個圓圈，如下圖：



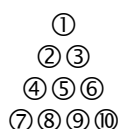
根據上述的第一個發現：我必然選擇劃掉 2 個圓圈，讓圓圈數目剩下 4 個，這時對方接著下，局勢不利於對方！所以，我劃掉⑤⑧

第三步：這時剩下①、⑦、⑨、⑩三個圓圈，我祇能選擇劃掉其中一個圓圈！但我不管劃掉哪一個圓圈，都會剩下 2 個圓圈，對方祇要劃掉其中 1 個，這時剩下最後 1 個圓圈，結果我輸了！

結果：第五局下到這裡，結果後下的我，卻輸了！

第五局結果：先下手的人贏了！

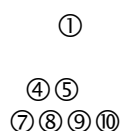
第六局



甲 先下

第一步：我劃掉②

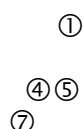
第二步：這時剩下 7 個圓圈，如下圖：



根據上述的第四個**發現**：

對於先下的我而言，我得盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉！所以我選擇劃掉⑧

第三步：這時剩下 4 個圓圈，如下圖：



根據上述的第三個**發現**：

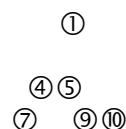
10 個圓圈劃剩 4 個圓圈，這 4 個圓圈中若有 2 個或 3 個圓圈位在頂點和中心點的位置時，對這時才下手的人有利！現在剩下的 4 個圓圈，有①⑦ 2 個圓圈位在頂點位置上，局勢對我有利！所以我選擇劃掉④ 我贏了！

乙 後下

第一步：根據上述第二個**發現**：

我必然選擇劃掉兩個圓圈，因為這樣對我有利！所以我劃掉③⑥

第二步：這時剩下 6 個圓圈，如下圖：



根據上述的第一個**發現**：

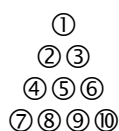
我必然選擇劃掉 2 個圓圈，讓圓圈數目剩下 4 個，讓對方這時接著下，局勢不利於對方！

而且再根據上述第三個**發現**：

要劃掉的圓圈一定要選擇劃掉頂點和中心點位置的圓圈，這樣才有利於我！所以，我劃掉⑨⑩

第六局結果：**先下手的人贏了！**

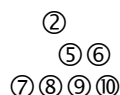
第七局



甲 先下

第一步：先劃掉④

第二步：這時剩下 7 個圓圈，如下圖：



根據上述的第四個發現：

對於先下的我而言，我得盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉！所以我選擇劃掉⑨

第三步：這時剩下 4 個圓圈，如下圖：

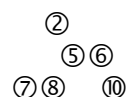


根據上述的第一個發現，這時局勢對我不利！雖然這 4 個圓圈有 1 個圓圈⑩是位在頂點的位置上；另 1 個圓圈⑤是位在中心點上，但是這一局，我還是輸了！

乙 後下

第一步：根據上述第二個發現，再根據上述的第四個發現，所以我劃掉①③

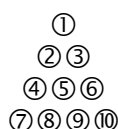
第二步：這時剩下 6 個圓圈，如下圖：



根據上述的第一個發現，再根據上述的第四個發現，所以我劃掉⑦⑧

第七局結果：先下手的人輸了！

第八局



甲 先下

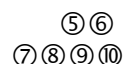
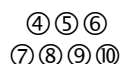
乙 後下

第一步：先劃掉②

第一步：根據上述第二個發現，再根據上述的第四個發現，所以我還是選擇劃掉①③

第二步：這時剩下 7 個圓圈，如下圖：

第二步：這時剩下 6 個圓圈，如下圖：



根據上述的第四個發現：

根據上述的第四個發現：我劃掉⑦⑧

對於先下的我而言，我得盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉！所以我選擇劃掉④

第三步：這時剩下 4 個圓圈，如下圖：



根據上述的第一個發現：

這時局勢對我不利！

再根據上述的第四個發現：這 4 個圓圈

雖有 1 個圓圈⑩位在頂點；1 個圓圈⑤位在中心點，這一局，我還是輸了！

第八局結果：先下手的人輸了！

這個遊戲一開始即不利於先下手的人，如果後下手的人又掌握到第四個發現的要領，盡量先劃掉頂點和中心點位置的圓圈，那麼先下手的人贏的機率實在很小！至於先下手的人贏的機率真正是多少？我們將在研究三推算出來！

研究三：在這研究中，我們將根據上面研究二兩人實際對下的過程所獲得的四個發現，來推算先下手的人如果根據這四個發現來玩這個遊戲，先下手的人真正能獲勝的機率到底

是多少？首先，我們先將研究二所獲得的四個發現列出來於下：

發現（一） 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈是決勝的關鍵！

發現（二） 10 個圓圈誰先劃掉前 3 個圓圈是決勝的另一個關鍵！

（PS. 誰先劃掉前 3 個圓圈其意思與誰先劃掉前 6 個圓圈的意思是相同的，因為 6 個圓圈可以看成 3 個圓圈+3 個圓圈。）

發現（三） 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，這時剩下的 4 個圓圈的分布位置是決勝的最後關鍵！

發現(四) 承接發現（三）我們可以得到另外兩個小發現：

- （1）對於先下手的人而言，在兩人對下的過程中，先下手的人應盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉，因為當 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，剩下的 4 個圓圈有 2 個或 3 個圓圈是位在頂點和中心點位置，這時局勢：對先下的人有利！；對後下的人反而不利！
- （2）對於後下手的人而言，在兩人對下的過程中，後下手的人應盡量優先劃掉頂點和中心點位置的圓圈，因為當 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，愈少圓圈位保留在頂點和中心點的位置，這時局勢：對後下的人有利！；對先下的人反而不利！

為了驗證上述四個發現，我們可以將 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，剩下的 4 個圓圈的所有分布位置的情形（也就是這 4 個圓圈的排列組合情形）一一羅列出來，詳見於後！而從中我們就可以來推算出先下手的人和先下手的人如果根據這四個發現來玩這個遊戲，先下手的人真正能夠獲勝的機率到底是多少？（相對的，我們也可以藉此得知後下手的人真正能夠獲勝的機率到底是多少？）

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有1號圓圈的所有排列組合的情形：共有84種。

1.2.3.4	1.2.4.5	1.2.5.6	1.2.6.7	1.2.7.8	1.2.8.9	1.2.9.10
1.2.3.5	1.2.4.6	1.2.5.7	1.2.6.8	1.2.7.9	1.2.8.10	1種
1.2.3.6	1.2.4.7	1.2.5.8	1.2.6.9	1.2.7.10	2種	
1.2.3.7	1.2.4.8	1.2.5.9	1.2.6.10	3種		
1.2.3.8	1.2.4.9	1.2.5.10	4種			
1.2.3.9	1.2.4.10	5種				
1.2.3.10	6種					
7種						

$$7+6+5+4+3+2+1=28$$

1.3.4.5	1.3.5.6	1.3.6.7	1.3.7.8	1.3.8.9	1.3.9.10
1.3.4.6	1.3.5.7	1.3.6.8	1.3.7.9	1.3.8.10	1種
1.3.4.7	1.3.5.8	1.3.6.9	1.3.7.10	2種	
1.3.4.8	1.3.5.9	1.3.6.10	3種		
1.3.4.9	1.3.5.10	4種			
1.3.4.10	5種				
6種					

$$6+5+4+3+2+1=21$$

$$\text{※}28+21+15+10+6+3+1=84$$

1.4.5.6	1.4.6.7	1.4.7.8	1.4.8.9	1.4.9.10
1.4.5.7	1.4.6.8	1.4.7.9	1.4.8.10	1種
1.4.5.8	1.4.6.9	1.4.7.10	2種	
1.4.5.9	1.4.6.10	3種		
1.4.5.10	4種			
5種				

$$5+4+3+2+1=15$$

1.5.6.7	1.5.7.8	1.5.8.9	1.5.9.10
1.5.6.8	1.5.7.9	1.5.8.10	1種
1.5.6.9	1.5.7.10	2種	
1.5.6.10	3種		
4種			

$$4+3+2+1=10$$

1.6.7.8	1.6.8.9	1.6.9.10
1.6.7.9	1.6.8.10	1種
1.6.7.10	2種	
3種		

$$3+2+1=6$$

1.7.8.9	1.7.9.10
1.7.8.10	1種
2種	
1.8.9.10	
1種	
1	

$$2+1=3$$

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有2號圓圈的所有排列組合的情形：共有56種。

2.3.4.5	2.3.5.6	2.3.6.7	2.3.7.8	2.3.8.9	2.3.9.10
2.3.4.6	2.3.5.7	2.3.6.8	2.3.7.9	2.3.8.10	1種
2.3.4.7	2.3.5.8	2.3.6.9	2.3.7.10	2種	
2.3.4.8	2.3.5.9	2.3.6.10	3種		
2.3.4.9	2.3.5.10	4種			
2.3.4.10	5種				
6種					

$$6+5+4+3+2+1=21$$

2.4.5.6	2.4.6.7	2.4.7.8	2.4.8.9	2.4.9.10
2.4.5.7	2.4.6.8	2.4.7.9	2.4.8.10	1種
2.4.5.8	2.4.6.9	2.4.7.10	2種	
2.4.5.9	2.4.6.10	3種		
2.4.5.10	4種			
5種				

$$5+4+3+2+1=15$$

$$\underline{\underline{\times 21+15+10+3+6+1=56}}$$

2.5.6.7	2.5.7.8	2.5.8.9	2.5.9.10
2.5.6.8	2.5.7.9	2.5.8.10	1種
2.5.6.9	2.5.7.10	2種	
2.5.6.10	3種		
4種			

$$4+3+2+1=10$$

2.6.7.8	2.6.8.9	2.6.9.10
2.6.7.9	2.6.8.10	1種
2.6.7.10	2種	
3種		

$$3+2+1=6$$

2.7.8.9	2.7.9.10
2.7.8.10	1種
2種	

$$2+1=3$$

2.8.9.10
1種
1

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有3號圓圈的所有排列組合的情形：共有35種。

3.4.5.6	3.4.5.7	3.4.5.8	3.4.5.9	3.4.5.10
3.4.5.7	3.4.5.8	3.4.5.9	3.4.5.10	1種
3.4.5.8	3.4.5.9	3.4.5.10	2種	
3.4.5.9	3.4.5.10	3種		
3.4.5.10	4種			
5種				

$$5+4+3+2+1=15$$

3.5.6.7	3.5.7.8	3.5.8.9	3.5.9.10
3.5.6.8	3.5.7.9	3.5.8.10	1種
3.5.6.9	3.5.7.10	2種	
3.5.6.10	3種		
4種			

$$4+3+2+1=10$$

$$\underline{\underline{\ast 15+10+6+3+1=35}}$$

3.6.7.8	3.6.8.9	3.6.9.10
3.6.7.9	3.6.8.10	1種
3.6.7.10	2種	
3種		

$$3+2+1=6$$

3.7.8.9	3.7.9.10
3.7.8.10	1種
2種	

$$2+1=3$$

3.8.9.10
1種
1

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有4號圓圈的所有排列組合的情形：共有20種。

4.5.6.7	4.5.6.8	4.5.6.9	4.5.6.10
4.5.6.8	4.5.6.9	4.5.6.10	1種
4.5.6.9	4.5.6.10	2種	
4.5.6.10	3種		
4種	$4+3+2+1=10$		

4.6.7.8	4.6.8.9	4.6.9.10
4.6.7.9	4.6.8.10	1種
4.6.7.10	2種	
3種	$3+2+1=6$	

$$\underline{\underline{\times 10+6+3+1=20}}$$

4.7.8.9	4.7.9.10
4.7.8.10	1種
2種	$2+1=3$

4.8.9.10
1種
1

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有5號圓圈的所有排列組合的情形：共有10種。

5.6.7.8	5.6.8.9	5.6.9.10
5.6.7.9	5.6.8.10	1種
5.6.7.10	2種	
3種	3+2+1=6	

※6+3+1=10

5.7.8.9	5.7.9.10
5.7.8.10	1種
2種	2+1=3

5.8.9.10
1種
1

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有6號圓圈的所有排列組合的情形：共有4種。

6.7.8.9	6.7.9.10
---------	----------

6.7.8.10	1種
----------	----

2種 2+1=3

※3+1=4

6.8.9.10

1種

1

◎下表是10個圓圈劃剩4個圓圈時，這4個圓圈中有7號圓圈的所有排列組合的情形：共有1種。

7,8,9,10

1種

1

※1

下列各表是 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時,這 4 個圓圈所有排列組合情形:

<p>一. (剩下 4 個圓圈時, 第 1 個圓圈位在①時的所 有情形!)</p> <p>(1) $7+6+5+4+3+2+1=28$ (2) $6+5+4+3+2+1=21$ (3) $5+4+3+2+1=15$ (4) $4+3+2+1=10$ (5) $3+2+1=6$ (6) $2+1=3$ (7) $1=1$</p> <p>$28+21+15+10+6+3+1=84$</p> <p>上面這個算式的說明 如下:</p> <p>這 84 種情形是 當 10 個圓圈, 劃剩 4 個圓圈時, 這 4 個 圓圈, 其中有 1 個圓 圈設定位在①, 其餘 3 個圓圈任意變換, 這時 4 個圓圈所有 排列組合的情形。</p>	<p>(1) 第一排: 10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是②, 第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 28 種。</u></p> <p>(2) 第二排: 10 個圓圈 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是③, 第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 21 種。</u></p> <p>(3) 第三排: 10 個圓圈 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是④, 第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 15 種。</u></p> <p>(4) 第四排: 10 個圓圈 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是⑤, 第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 10 種。</u></p> <p>(5) 第五排: 10 個圓圈 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是⑥, 第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 6 種。</u></p> <p>(6) 第六排: 10 個圓圈 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是⑦, 第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 3 種。</u></p> <p>(7) 第七排: 10 個圓圈 4 個圓圈時, 這 4 個圓圈中第 一個圓圈設定是①, 第 2 個圓圈設定是⑧, 第 3 個和第 4 個圓圈變換不了時: <u>這 4 個圓圈所有排列組合的情形, 共有 1 種。</u></p>
--	---

二. (剩下 4 個圓圈時，第 1 個圓圈位在②時的所有情形！)

$$(1) 6+5+4+3+2+1=21$$

$$(2) 5+4+3+2+1=15$$

$$(3) 4+3+2+1=10$$

$$(4) 3+2+1=6$$

$$(5) 2+1=3$$

$$(6) 1=1$$

$$21+15+10+6+3+1=56$$

上面這個算式的說明如下：

這 84 種情形是當 10 個圓圈，劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈，其中有 1 個圓圈設定位在②，其餘 3 個圓圈任意變換，這時 4 個圓圈所有排列組合的情形。

(1) 第一排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是②，第 2 個圓圈設定是③，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 21 種。

(2) 第二排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是②，第 2 個圓圈設定是④，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 15 種。

(3) 第三排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是②，第 2 個圓圈設定是⑤，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 10 種。

(4) 第四排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是②，第 2 個圓圈設定是⑥，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 6 種。

(5) 第五排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是②，第 2 個圓圈設定是⑦，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 3 種。

(6) 第六排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是②，第 2 個圓圈設定是⑧，第 3 個和第 4 個圓圈變換不了時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 1 種。

三. (剩下 4 個圓圈時，第 1 個圓圈位在③時的所有情形！)

$$(1) 5+4+3+2+1=15$$

$$(2) 4+3+2+1=10$$

$$(3) 3+2+1=6$$

$$(4) 2+1=3$$

$$(5) 1=1$$

$$15+10+6+3+1=35$$

上面這個算式的說明如下：

這 35 種情形是當 10 個圓圈，劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈，其中有 1 個圓圈設定位在③，其餘 3 個圓圈任意變換，這時 4 個圓圈所有排列組合的情形。

(1) 第一排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是③，第 2 個圓圈設定是④，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 15 種。

(2) 第二排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是③，第 2 個圓圈設定是⑤，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 10 種。

(3) 第三排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是③，第 2 個圓圈設定是⑥，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 6 種。

(4) 第四排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是③，第 2 個圓圈設定是⑦，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 3 種。

(5) 第五排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是③，第 2 個圓圈設定是⑧，第 3 個和第 4 個圓圈變換不了時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 1 種。

四. (剩下 4 個圓圈時, 第 1 個圓圈位在④時的所有情形!)

$$(1) 4+3+2+1=10$$

$$(2) 3+2+1=6$$

$$(3) 2+1=3$$

$$(4) 1=1$$

$$10+6+3+1=20$$

上面這個算式的說明如下：

這 20 種情形是當 10 個圓圈，劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈，其中有 1 個圓圈設定位在④，其餘 3 個圓圈任意變換，這時 4 個圓圈所有排列組合的情形。

(1) 第一排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是④，第 2 個圓圈設定是⑤，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 10 種。

(2) 第二排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是④，第 2 個圓圈設定是⑥，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 6 種。

(3) 第三排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是④，第 2 個圓圈設定是⑦，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 3 種。

(4) 第四排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是④，第 2 個圓圈設定是⑧，第 3 個和第 4 個圓圈變換不了時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 1 種。

五. (剩下 4 個圓圈時，
第 1 個圓圈位在⑤時的所有情形！)

(1) $3+2+1=6$

(2) $2+1=3$

(3) $1=1$

$6+3+1=10$

上面這個算式的說明如下：

這 10 種情形是當 10 個圓圈，劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈，其中有 1 個圓圈設定位在⑤，其餘 3 個圓圈任意變換，這時 4 個圓圈所有排列組合的情形。

(1) 第一排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是⑤，第 2 個圓圈設定是⑥，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 6 種。

(2) 第二排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是⑤，第 2 個圓圈設定是⑦，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 3 種。

(3) 第三排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是⑤，第 2 個圓圈設定是⑧，第 3 個和第 4 個圓圈變換不了時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 1 種。

六. (剩下 4 個圓圈時, 第 1 個圓圈位在⑥時的所有情形!)

$$(1) 2+1=3$$

$$(2) 1=1$$

$$3+1=4$$

上面這個算式的說明如下：

這 4 種情形是當 10 個圓圈，劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈，其中有 1 個圓圈設定位在⑥，其餘 3 個圓圈任意變換，這時 4 個圓圈所有排列組合的情形。

(1) 第一排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是⑥，第 2 個圓圈設定是⑦，第 3 個和第 4 個圓圈任意變換時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 3 種。

(2) 第二排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是⑥，第 2 個圓圈設定是⑧，第 3 個和第 4 個圓圈變換不了：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 1 種。

七. (剩下 4 個圓圈時, 第 1 個圓圈位在⑦時的所有情形!)

$$(1) 1 = 1$$

1

上面這個算式的說明如下：

這 1 種情形是當 10 個圓圈，劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈，其中有 1 個圓圈設定位在⑦，其餘 3 個圓圈變換不了，這時 4 個圓圈所有排列組合的情形。

第一排：10 個圓圈 4 個圓圈時，這 4 個圓圈中第一個圓圈設定是⑦，第 2 個圓圈設定是⑧，第 3 個和第 4 個圓圈變換不了時：

這 4 個圓圈所有排列組合的情形，共有 1 種。

(1) - (10) 種情形

	1. <div><div>① ②③ ④</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>4</div></div></div>	
2. <div><div>① ②③ ⑤</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>5</div></div></div>	3. <div><div>① ②③ ⑥</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>6</div></div></div>	4. <div><div>① ②③ ⑦</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>7</div></div></div>
5. <div><div>① ②③ ⑧</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>8</div></div></div>	6. <div><div>① ②③ ⑨</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>9</div></div></div>	7. <div><div>① ②③ ⑩</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>3</div><div>10</div></div></div>
8. <div><div>① ② ④⑤</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>5</div></div></div>	9. <div><div>① ② ④⑥</div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>6</div></div></div>	<div><div>① ② ④ ⑦</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>7</div></div></div>

(11) - (20) 種情形

11. ①
 ②
 ④
 ⑧
先下手者 : (敗)

1	2	4	8
---	---	---	---

12. ①
 ②
 ④
 ⑨
先下手者 : (勝)

1	2	4	9
---	---	---	---

13. ①
 ②
 ④
 ⑩
先下手者 : (勝)

1	2	4	10
---	---	---	----

14. ①
 ②
 ⑤ ⑥
先下手者 : (敗)

1	2	5	6
---	---	---	---

15. ①
 ②
 ⑤
 ⑦
先下手者 : (勝)

1	2	5	7
---	---	---	---

16. ①
 ②
 ⑤
 ⑧
先下手者 : (敗)

1	2	5	8
---	---	---	---

17. ①
 ②
 ⑤
 ⑨
先下手者 : (敗)

1	2	5	9
---	---	---	---

18. ①
 ②
 ⑤
 ⑩
先下手者 : (勝)

1	2	5	10
---	---	---	----

19. ①
 ②
 ⑥
 ⑦
先下手者 : (勝)

1	2	6	7
---	---	---	---

20. ①
 ②
 ⑥
 ⑧
先下手者 : (勝)

1	2	6	8
---	---	---	---

(21) - (30) 種情形

21.	<div>① ② ⑥ ⑨</div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>9</td></tr></table></div>	1	2	6	9	
1	2	6	9			
22.	<div>① ② ⑥ ⑩</div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td></tr></table></div>	1	2	6	10	23.
1	2	6	10			
	<div>① ② ⑦ ⑧</div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>8</td></tr></table></div>	1	2	7	8	24.
1	2	7	8			
	<div>① ② ⑦ ⑨</div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>9</td></tr></table></div>	1	2	7	9	
1	2	7	9			
25.	<div>① ② ⑦ ⑩</div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>10</td></tr></table></div>	1	2	7	10	26.
1	2	7	10			
	<div>① ② ⑧ ⑨</div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td><td>9</td></tr></table></div>	1	2	8	9	27.
1	2	8	9			
	<div>① ② ⑧ ⑩</div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td><td>10</td></tr></table></div>	1	2	8	10	
1	2	8	10			
28.	<div>① ② ⑨ ⑩</div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>9</td><td>10</td></tr></table></div>	1	2	9	10	29.
1	2	9	10			
	<div>① ③ ④ ⑤</div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table></div>	1	3	4	5	30.
1	3	4	5			
	<div>① ③ ④ ⑥</div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><table><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table></div>	1	3	4	6	
1	3	4	6			

(31) - (40) 種情形

	<div>31.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>④</div><div>⑦</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>4</div><div>7</div></div>	
<div>32.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>④</div><div>⑧</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>4</div><div>8</div></div>	<div>33.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>④</div><div>⑨</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>4</div><div>9</div></div>	<div>34.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>④</div><div>⑩</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>4</div><div>10</div></div>
<div>35.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>⑤</div><div>⑥</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>5</div><div>6</div></div>	<div>36.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>⑤</div><div>⑦</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>5</div><div>7</div></div>	<div>37.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>⑤</div><div>⑧</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>5</div><div>8</div></div>
<div>38.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>⑤</div><div>⑨</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>5</div><div>9</div></div>	<div>39.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>⑤</div><div>⑩</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>5</div><div>10</div></div>	<div>40.</div> <div><div>①</div><div>③</div><div>⑥</div><div>⑦</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>6</div><div>7</div></div>

(41) - (50) 種情形

	21. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑥</div><div>⑧</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>6</div><div>8</div></div>	
22. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑥</div><div>⑨</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>6</div><div>9</div></div>	23. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑥</div><div>⑩</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>6</div><div>10</div></div>	24. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑦ ⑧</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>7</div><div>8</div></div>
25. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑦ ⑨</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>7</div><div>9</div></div>	26. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑦ ⑩</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>7</div><div>10</div></div>	27. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑧ ⑨</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>8</div><div>9</div></div>
28. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑧ ⑩</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>8</div><div>10</div></div>	29. <div><div>①</div><div>③</div><div>⑨ ⑩</div></div> <div>先下手者 : (敗)</div> <div><div>1</div><div>3</div><div>9</div><div>10</div></div>	30. <div><div>①</div><div>④ ⑤ ⑥</div></div> <div>先下手者 : (勝)</div> <div><div>1</div><div>4</div><div>5</div><div>6</div></div>

(51) - (60) 種情形

51.	① ④⑤ ⑦ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr></table>	1	4	5	7	
1	4	5	7			
52.	① ④⑤ ⑧ 先下手者 : (敗) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>8</td></tr></table>	1	4	5	8	53.
1	4	5	8			
	① ④⑤ ⑨ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td></tr></table>	1	4	5	9	54.
1	4	5	9			
	① ④⑤ ⑩ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>10</td></tr></table>	1	4	5	10	55.
1	4	5	10			
① ④⑥ ⑦ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>	1	4	6	7	56.	
1	4	6	7			
① ④⑥ ⑧ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>	1	4	6	8	57.	
1	4	6	8			
① ④⑥ ⑨ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>	1	4	6	9	58.	
1	4	6	9			
① ④⑥ ⑩ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>10</td></tr></table>	1	4	6	10	59.	
1	4	6	10			
① ④ ⑦⑧ 先下手者 : (敗) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	1	4	7	8	60.	
1	4	7	8			
① ④ ⑦⑨ 先下手者 : (勝) <table><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>9</td></tr></table>	1	4	7	9		
1	4	7	9			

(61) - (70) 種情形

	61.	①					
		④					
		⑦	⑩				
	先下手者 : (勝)						
	<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td></tr></table>			1	4	7	10
1	4	7	10				
62.	①						
	④						
	⑧ ⑨						
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>				1	4	8	9
1	4	8	9				
63.	①						
	④						
	⑧	⑩					
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>10</td></tr></table>				1	4	8	10
1	4	8	10				
64.	①						
	④						
		⑨ ⑩					
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>10</td></tr></table>				1	4	9	10
1	4	9	10				
65.	①						
		⑤ ⑥					
	⑦						
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>				1	5	6	7
1	5	6	7				
66.	①						
		⑤ ⑥					
		⑧					
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td></tr></table>				1	5	6	8
1	5	6	8				
67.	①						
		⑤ ⑥					
		⑨					
先下手者 : (敗)							
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td></tr></table>				1	5	6	9
1	5	6	9				
68.	①						
		⑤ ⑥					
		⑩					
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>10</td></tr></table>				1	5	6	10
1	5	6	10				
69.	①						
		⑤					
		⑦ ⑧					
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>				1	5	7	8
1	5	7	8				
60.	①						
		⑤					
		⑦ ⑨					
先下手者 : (勝)							
<table><tr><td>1</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr></table>				1	5	7	9
1	5	7	9				

(71) - (80) 種情形

	71.	① ⑤ ⑦ ⑩ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>5</td><td>7</td><td>10</td></tr></table>	1	5	7	10											
1	5	7	10														
72.	① ⑤ ⑧ ⑨ 先下手者 : (<u>敗</u>) <table><tr><td>1</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	1	5	8	9	73.	① ⑤ ⑧ ⑩ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>5</td><td>8</td><td>10</td></tr></table>	1	5	8	10	74.	① ⑤ ⑨ ⑩ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td><td>10</td></tr></table>	1	5	9	10
1	5	8	9														
1	5	8	10														
1	5	9	10														
75.	① ⑥ ⑦ ⑧ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	1	6	7	8	76.	① ⑥ ⑦ ⑨ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr></table>	1	6	7	9	77.	① ⑥ ⑦ ⑩ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>10</td></tr></table>	1	6	7	10
1	6	7	8														
1	6	7	9														
1	6	7	10														
78.	① ⑥ ⑧ ⑨ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>	1	6	8	9	79.	① ⑥ ⑧ ⑩ 先下手者 : (<u>勝</u>) <table><tr><td>1</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr></table>	1	6	8	10	80.	① ⑥ ⑨ ⑩ 先下手者 : (<u>敗</u>) <table><tr><td>1</td><td>6</td><td>9</td><td>10</td></tr></table>	1	6	9	10
1	6	8	9														
1	6	8	10														
1	6	9	10														

(81) - (90) 種情形

81.	①					
⑦⑧⑨ 先下手者 : (勝)						
<table><tr><td>1</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr></table>			1	7	8	9
1	7	8	9			
82.	①					
⑦⑧ ⑩ 先下手者 : (勝)						
<table><tr><td>1</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td></tr></table>			1	7	8	10
1	7	8	10			
83.	①					
⑦ ⑨⑩ 先下手者 : (勝)						
<table><tr><td>1</td><td>7</td><td>9</td><td>10</td></tr></table>			1	7	9	10
1	7	9	10			
84.	①					
⑧⑨⑩ 先下手者 : (勝)						
<table><tr><td>1</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr></table>			1	8	9	10
1	8	9	10			
85.						
②③ ④⑤ 先下手者 : (敗)						
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>			2	3	4	5
2	3	4	5			
86.						
②③ ④ ⑥ 先下手者 : (敗)						
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>			2	3	4	6
2	3	4	6			
87.						
②③ ④ ⑦ 先下手者 : (敗)						
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr></table>			2	3	4	7
2	3	4	7			
88.						
②③ ④ ⑧ 先下手者 : (敗)						
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>8</td></tr></table>			2	3	4	8
2	3	4	8			
89.						
②③ ④ ⑨ 先下手者 : (勝)						
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>9</td></tr></table>			2	3	4	9
2	3	4	9			
90.						
②③ ④ ⑩ 先下手者 : (勝)						
<table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>10</td></tr></table>			2	3	4	10
2	3	4	10			

(91) - (100) 種情形

91.

② ③
⑤ ⑥

先下手者 : (敗)

2	3	5	6
---	---	---	---

92.

② ③
⑤
⑦

先下手者 : (敗)

2	3	5	7
---	---	---	---

93.

② ③
⑤
⑧

先下手者 : (敗)

2	3	5	8
---	---	---	---

94.

② ③
⑤
⑨

先下手者 : (敗)

2	3	5	9
---	---	---	---

95.

② ③
⑤
⑩

先下手者 : (敗)

2	3	5	10
---	---	---	----

96.

② ③
⑥
⑦

先下手者 : (勝)

2	3	6	7
---	---	---	---

97.

② ③
⑥
⑧

先下手者 : (勝)

2	3	6	8
---	---	---	---

98.

② ③
⑥
⑨

先下手者 : (敗)

2	3	6	9
---	---	---	---

99.

② ③
⑥
⑩

先下手者 : (敗)

2	3	6	10
---	---	---	----

100.

② ③
⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

2	3	7	8
---	---	---	---

(101) - (110) 種情形

101.

②
 ④ ⑥
 ⑦

先下手者 : (勝)

2	4	6	7
---	---	---	---

102.

②
 ④ ⑥
 ⑧

先下手者 : (勝)

2	4	6	8
---	---	---	---

103.

② ③
 ⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

2	3	8	9
---	---	---	---

104.

② ③
 ⑧ ⑩

先下手者 : (勝)

2	3	8	10
---	---	---	----

105.

② ③
 ⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

2	3	9	10
---	---	---	----

106.

②
 ④ ⑤ ⑥

先下手者 : (敗)

2	4	5	6
---	---	---	---

107.

② ③
 ④ ⑤
 ⑦

先下手者 : (敗)

2	4	5	7
---	---	---	---

108.

②
 ④ ⑤
 ⑧

先下手者 : (敗)

2	4	5	8
---	---	---	---

109.

②
 ④ ⑤
 ⑨

先下手者 : (敗)

2	4	5	9
---	---	---	---

110.

②
 ④ ⑤
 ⑩

先下手者 : (敗)

2	4	5	10
---	---	---	----

(111) - (120) 種情形

111.

②
④ ⑥
⑦

先下手者 : (勝)

2	4	6	7
---	---	---	---

112.

②
④ ⑥
⑧

先下手者 : (勝)

2	4	6	8
---	---	---	---

113.

②
④ ⑥
⑨

先下手者 : (敗)

2	4	6	9
---	---	---	---

114.

②
④ ⑥
⑩

先下手者 : (敗)

2	4	6	10
---	---	---	----

115.

②
④
⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

2	4	7	8
---	---	---	---

116.

②
④
⑦ ⑨

先下手者 : (勝)

2	4	7	9
---	---	---	---

117.

②
④
⑦ ⑩

先下手者 : (勝)

2	4	7	10
---	---	---	----

118.

②
④
⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

2	4	8	9
---	---	---	---

119.

②
④
⑧ ⑩

先下手者 : (勝)

2	4	8	10
---	---	---	----

120.

②
④
⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

2	4	9	10
---	---	---	----

(121) - (130) 種情形

121.

②
 ⑤ ⑥
 ⑦

先下手者 : (勝)

2	5	6	7
---	---	---	---

122.

②
 ⑤ ⑥
 ⑧

先下手者 : (勝)

2	5	6	8
---	---	---	---

123.

②
 ⑤ ⑥
 ⑨

先下手者 : (敗)

2	5	6	9
---	---	---	---

124.

②
 ⑤ ⑥
 ⑩

先下手者 : (敗)

2	5	6	10
---	---	---	----

125.

②
 ⑤
 ⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

2	5	7	8
---	---	---	---

126.

②
 ⑦ ⑨

先下手者 : (勝)

2	5	7	9
---	---	---	---

127.

②
 ⑤
 ⑦ ⑩

先下手者 : (勝)

2	5	7	10
---	---	---	----

128.

②
 ⑤
 ⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

2	5	8	9
---	---	---	---

129.

②
 ⑤
 ⑧ ⑩

先下手者 : (勝)

2	5	8	10
---	---	---	----

130.

②
 ⑤
 ⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

2	5	9	10
---	---	---	----

(131) - (140) 種情形

131.		
	②	
		⑥
	⑦	
	先下手者 : (勝)	
	2	6 7 8
132.		
	②	
	⑦	⑨
	先下手者 : (勝)	
	2	6 7 9
133.		
	②	
		⑥
		⑩
	先下手者 : (勝)	
	2	6 7 10
134.		
	②	
		⑥
	⑧	⑨
	先下手者 : (勝)	
	2	6 8 9
135.		
	②	
		⑥
	⑧	⑩
	先下手者 : (勝)	
	2	6 8 10
136.		
	②	
		⑥
	⑨	⑩
	先下手者 : (敗)	
	2	6 9 10
137.		
	②	
	⑦	⑧ ⑨
	先下手者 : (勝)	
	2	7 8 9
138.		
	②	
	⑦ ⑧	⑩
	先下手者 : (勝)	
	2	7 8 10
139.		
	②	
	⑦	⑨ ⑩
	先下手者 : (勝)	
	2	7 9 10
140.		
	②	
	⑧ ⑨ ⑩	
	先下手者 : (勝)	
	2	8 9 10

(141) - (150) 種情形

141.

③
④ ⑤ ⑥

先下手者 : (敗)

3	4	5	6
---	---	---	---

142.

③
④ ⑤
⑦

先下手者 : (敗)

3	4	5	7
---	---	---	---

143.

③
④ ⑤
⑧

先下手者 : (敗)

3	4	5	8
---	---	---	---

144.

③
④ ⑤
⑨

先下手者 : (勝)

3	4	5	9
---	---	---	---

145.

③
④ ⑤
⑩

先下手者 : (勝)

3	4	5	10
---	---	---	----

146.

③
④ ⑥
⑦

先下手者 : (敗)

3	4	6	7
---	---	---	---

147.

③
④ ⑥
⑧

先下手者 : (敗)

3	4	6	8
---	---	---	---

148.

③
④ ⑥
⑨

先下手者 : (勝)

3	4	6	9
---	---	---	---

149.

③
④ ⑥
⑩

先下手者 : (勝)

3	4	6	10
---	---	---	----

150.

③
④
⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

3	4	7	8
---	---	---	---

(151) - (160) 種情形

151.

③
④
⑦ ⑨

先下手者 : (勝)

3	4	7	9
---	---	---	---

152.

①
② ③
④ ⑤ ⑥
⑦ ⑧ ⑨ ⑩

先下手者 : (勝)

3	4	7	10
---	---	---	----

153.

③
④
⑧ ⑨ ⑩

先下手者 : (勝)

3	4	8	9
---	---	---	---

154.

③
④
⑧ ⑩

先下手者 : (勝)

3	4	8	10
---	---	---	----

155.

③
④
⑨ ⑩

先下手者 : (勝)

3	4	9	10
---	---	---	----

156.

③
⑤ ⑥
⑦

先下手者 : (敗)

3	5	6	7
---	---	---	---

157.

③
⑤ ⑥
⑧

先下手者 : (敗)

3	5	6	8
---	---	---	---

158.

③
⑤ ⑥
⑨

先下手者 : (敗)

3	5	6	9
---	---	---	---

159.

③
⑤ ⑥
⑩

先下手者 : (敗)

3	5	6	10
---	---	---	----

160.

③
⑤
⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

3	5	7	8
---	---	---	---

(161) - (170) 種情形

161.

③
 ⑤
 ⑦ ⑨

先下手者 : (勝)

3	5	7	9
---	---	---	---

162.

③
 ⑤
 ⑦ ⑩

先下手者 : (勝)

3	5	7	10
---	---	---	----

163.

③
 ⑤
 ⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

3	5	8	9
---	---	---	---

164.

③
 ⑤
 ⑧ ⑩

先下手者 : (勝)

3	5	8	10
---	---	---	----

165.

③
 ⑤
 ⑨ ⑩

先下手者 : (勝)

3	5	9	10
---	---	---	----

166.

③
 ⑥
 ⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

3	6	7	8
---	---	---	---

167.

③
 ⑥
 ⑦ ⑨

先下手者 : (勝)

3	6	7	9
---	---	---	---

168.

③
 ⑥
 ⑦ ⑩

先下手者 : (勝)

3	6	7	10
---	---	---	----

169.

③
 ⑥
 ⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

3	6	8	9
---	---	---	---

170.

③
 ⑥
 ⑧ ⑩

先下手者 : (勝)

3	6	8	10
---	---	---	----

(171) - (180) 種情形

	171. <div><div>③ ⑥ ⑨⑩</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>3</div><div>6</div><div>9</div><div>10</div></div></div>	
172. <div><div>③ ⑥ ⑦⑧⑨</div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>3</div><div>7</div><div>8</div><div>9</div></div></div>	173. <div><div>③ ⑦⑧⑩</div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>3</div><div>7</div><div>8</div><div>10</div></div></div>	174. <div><div>③ ⑦⑨⑩</div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>3</div><div>7</div><div>9</div><div>10</div></div></div>
175. <div><div>③ ⑧⑨⑩</div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>3</div><div>8</div><div>9</div><div>10</div></div></div>	176. <div><div>④⑤⑥ ⑦</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>4</div><div>5</div><div>6</div><div>7</div></div></div>	177. <div><div>④⑤⑥ ⑧</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>4</div><div>5</div><div>6</div><div>8</div></div></div>
178. <div><div>④⑤⑥ ⑨</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>4</div><div>5</div><div>6</div><div>9</div></div></div>	179. <div><div>④⑤⑥ ⑩</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>4</div><div>5</div><div>6</div><div>10</div></div></div>	180. <div><div>④⑤ ⑦⑧</div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>4</div><div>5</div><div>7</div><div>8</div></div></div>

(181) - (190) 種情形

181.

④ ⑤
⑦ ⑨

先下手者 : (敗)

4	5	7	9
---	---	---	---

182.

④ ⑤
⑦ ⑩

先下手者 : (勝)

4	5	7	10
---	---	---	----

183.

④ ⑤
⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

4	5	8	9
---	---	---	---

184.

④ ⑤
⑧ ⑩

先下手者 : (敗)

4	5	8	10
---	---	---	----

185.

④ ⑤
⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

4	5	9	10
---	---	---	----

186.

④ ⑥
⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

4	6	7	8
---	---	---	---

187.

④ ⑥
⑦ ⑨

先下手者 : (敗)

4	6	7	9
---	---	---	---

188.

④ ⑥
⑦ ⑩

先下手者 : (敗)

4	6	7	10
---	---	---	----

189.

④ ⑥
⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

4	6	8	9
---	---	---	---

190.

④ ⑥
⑧ ⑩

先下手者 : (敗)

4	6	8	10
---	---	---	----

(191) - (200) 種情形

191.

④ ⑥
 ⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

4	6	9	10
---	---	---	----

192.

④
⑦ ⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

4	7	8	9
---	---	---	---

193.

④
⑦ ⑧ ⑩

先下手者 : (敗)

4	7	8	10
---	---	---	----

194.

④
⑦ ⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

4	7	9	10
---	---	---	----

195.

④
 ⑧ ⑨ ⑩

先下手者 : (敗)

4	8	9	10
---	---	---	----

196.

 ⑤ ⑥
⑦ ⑧

先下手者 : (敗)

5	6	7	8
---	---	---	---

197.

 ⑤ ⑥
⑦ ⑨

先下手者 : (敗)

5	6	7	9
---	---	---	---

198.

 ⑤ ⑥
⑦ ⑩

先下手者 : (勝)

5	6	7	10
---	---	---	----

199.

 ⑤ ⑥
⑧ ⑨

先下手者 : (敗)

5	6	8	9
---	---	---	---

200.

 ⑤ ⑥
⑧ ⑩

先下手者 : (敗)

5	6	8	10
---	---	---	----

(201) - (210) 種情形

	201. <div><div><div>⑤⑥</div><div>⑨⑩</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>5</div><div>6</div><div>9</div><div>10</div></div></div>	
202. <div><div><div>⑤</div><div>⑦⑧⑨</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>5</div><div>7</div><div>8</div><div>9</div></div></div>	203. <div><div><div>①</div><div>⑤</div><div>⑦⑧⑩</div></div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>5</div><div>7</div><div>8</div><div>10</div></div></div>	204. <div><div><div>⑤</div><div>⑦⑨⑩</div></div><div>先下手者 : (勝)</div><div><div>5</div><div>7</div><div>9</div><div>10</div></div></div>
205. <div><div><div>⑤</div><div>⑧⑨⑩</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>5</div><div>8</div><div>9</div><div>10</div></div></div>	206. <div><div><div>⑥</div><div>⑦⑧⑨</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>6</div><div>7</div><div>8</div><div>9</div></div></div>	207. <div><div><div>⑥</div><div>⑦⑧⑩</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>6</div><div>7</div><div>8</div><div>10</div></div></div>
208. <div><div><div>⑥</div><div>⑦⑨⑩</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>6</div><div>7</div><div>9</div><div>10</div></div></div>	209. <div><div><div>⑥</div><div>⑧⑨⑩</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>6</div><div>8</div><div>9</div><div>10</div></div></div>	210. <div><div><div>⑦⑧⑨⑩</div></div><div>先下手者 : (敗)</div><div><div>7</div><div>8</div><div>9</div><div>10</div></div></div>

研究三的研究結果：

10 個圓圈劃剩 4 個圓圈時，這 4 個圓圈的分布位置是決勝的最後關鍵！而這 4 個圓圈所有分布情形，共有 210 種情形。然後我們在從這 210 種情形一一加以細數，得知其中有 98 種是先下手的人獲勝情形！另外的 112 種是後下手的人獲勝的情形！另外很重要的是：先下手的人獲勝的 98 種情形中，與頂點和中心點無關的情況只有 6 種，與頂點和中心點有關的情況高達 92 種，而這剛好印證了我們發現（四）的推論：

『對先下手的人而言，在兩人對下的過程中，在兩人對下的過程中，先下手的人應盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉，因為如果能夠做到這樣，先下手的人就能保有些許的勝算！』

所以，從上面研究三我們得知：

在這個遊戲中，先下手的人和後下手的人如果根據我們研究二的四個發現來玩這個遊戲，那麼我們推算出先下手的人的勝算機率是 $98/210$ ；後下手的人的勝算機率是 $112/210$ ，因為 $98/210 < 112/210$ ，所以我們得知如下結果：

先下手的人的勝算機率 < 後下手的人的勝算機率

陸、 結論

(一)

10 個圓圈劃剩剩下到最後的 4 個圓圈時是決勝的關鍵！也就是說 10 個圓圈誰先劃剩 4 個，誰的勝算就大！（劃剩四四個圓圈之後才下手的人比較不利！）上述的結論是用文字表示，我們可以用數學式表示： $4 \div (1+2) = 1...1$ 或 $4 \div (2+1) = 1...1$ 上面的數學式就是說當圓圈剩下 4 個時，之後才下手的人很容易會劃到最後 1 個圓圈，所以當剩下 4 個圓圈時才下手的人，這時他輸的可能性很大！

(二)

10 個圓圈中的前面 3 個圓圈是另外一個決勝的關鍵！也就是說 10 個圓圈誰先讓前 3 個圓圈被劃掉的人，誰的勝算就比較大！這個結論我們可以用數學式來表示：

$$\underline{3 \div (1+2) = 1...0} \quad \text{或} \quad \underline{3 \div (2+1) = 1...0}$$

$$\text{而 } \underline{6 = 2 \times 3 = 3 + 3}$$

而我們得知 10 個圓圈誰先讓前 3 個圓圈被劃掉的人，誰的

勝算就比較大！其實也等於是說 10 個圓圈誰先讓前 6 個圓圈被劃掉的人，誰的勝算就比較大！因為 $\underline{6 = 2 \times 3 = 3 + 3}$ ，
 $\underline{6 \text{ 個圓圈} = 3 \text{ 個圓圈} + 3 \text{ 個圓圈}}$ ；換句話說這個結論也等於說 10 個圓圈誰先讓前 6 個圓圈被劃掉（這時剩下 4 個圓圈，正是決勝的關鍵），誰的勝算就比較大！

(三)

當 10 個圓圈劃剩下 4 個時, 這 4 個圓圈若有 2 個或 3 個是位在頂點和中心點的位置時, 對之後才下手的人反而有利! 這個結論我們可以用數學式來表示:

$$\begin{aligned}\frac{4 \div (1+1+1+1)}{1} &= \frac{4 \div \{ (1+1) + (1+1) \}}{1} \\ &= \underline{4 \div 4 = 1... 0}\end{aligned}$$

也就是說, 剩下 4 個圓圈時, 若這 4 個圓圈有 2 個或 3 個是位在頂點和中心點位置時, 對之後才下手的人反而容易讓對方劃到最後 1 個圓圈, 這時才下手的人獲勝機率會變大!

(四)

- (1) 對先下手的人而言, 在遊戲的過程中應該盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉! (因為如能保有頂點和中心點位置的圓圈在兩顆以上時, 對先下的人才比較有利!)

這個結論我們可以用數學式來表示, 則與結論(三)的數學式相同:

$$\begin{aligned}\frac{4 \div (1+1+1+1)}{1} &= \frac{4 \div \{ (1+1) + (1+1) \}}{1} \\ &= \underline{4 \div 4 = 1... 0}\end{aligned}$$

- (2) 對後下手的人而言, 在這遊戲的過程中應該盡量優先劃掉頂點和中心點位置的圓圈, 因為對後下手的人而言如果越多頂點和中心點位置的圓圈保留下來這對後下手的人比較不利反而對先下手的人有利!

總結：這個遊戲一開始就不利於先下手的人！因為 10 個圓圈很容易剩下一個圓圈讓先下手的人劃到，關於這一點我們可以用數學式說明：

$$\underline{10 \div (1+2) = 3 \dots 1} \quad \text{或} \quad \underline{10 \div (2+1) = 3 \dots 1}$$

但是先下手的人若能理解與掌握上述的 4 個結論，尤其能夠做到盡量保有頂點和中心點位置的圓圈不被劃掉！那麼先下手的人獲勝機率會有 $\underline{98/210}$ ，相對的後下手的人也能理解與掌握上數 4 個結論而能夠做到盡量優先劃掉頂點位置的圓圈，後下手的人獲勝機率是 $\underline{112/210}$

由此可知攻守雙方都得知上述 4 個結論，那麼先下手的人獲勝機率 = $\underline{98/210}$ ；後下手的人獲勝機率 = $\underline{112/210}$ 是，因為 $\underline{98/210} < \underline{112/210}$ ，所以先下手的人獲勝機率是小於後下手的人獲勝機率。

這個遊戲告訴我們先下手的人未必為強！

心得：這個遊戲雖然只是由簡單的 10 個圓圈所構成，但是經過一些排列組合，卻可以得到許多簡單的結論，雖然這之中的一些過程有些繁瑣、有些辛苦，但是大家同心協力，彼此互助互諒的精神，卻讓我們非常珍惜，藉由研究的過程，也培養我們一份忍耐細膩的心，這對我們日後做事的態度有很大的幫助。

柒：參考書目

南一書局國小六下數學第 12 冊（第八單元：機率）

(第三名)(最佳團隊合作獎)

報告內容詳實，能完整表達，且作者熟知遊戲規則，團體合作默契佳。