

# 臺灣二〇〇七年國際科學展覽會

科 別：工程學

作 品 名 稱：樂器聲波之探討 (The Study of A Sound Wave on Musical Instruments)

得 獎 獎 項：第三名

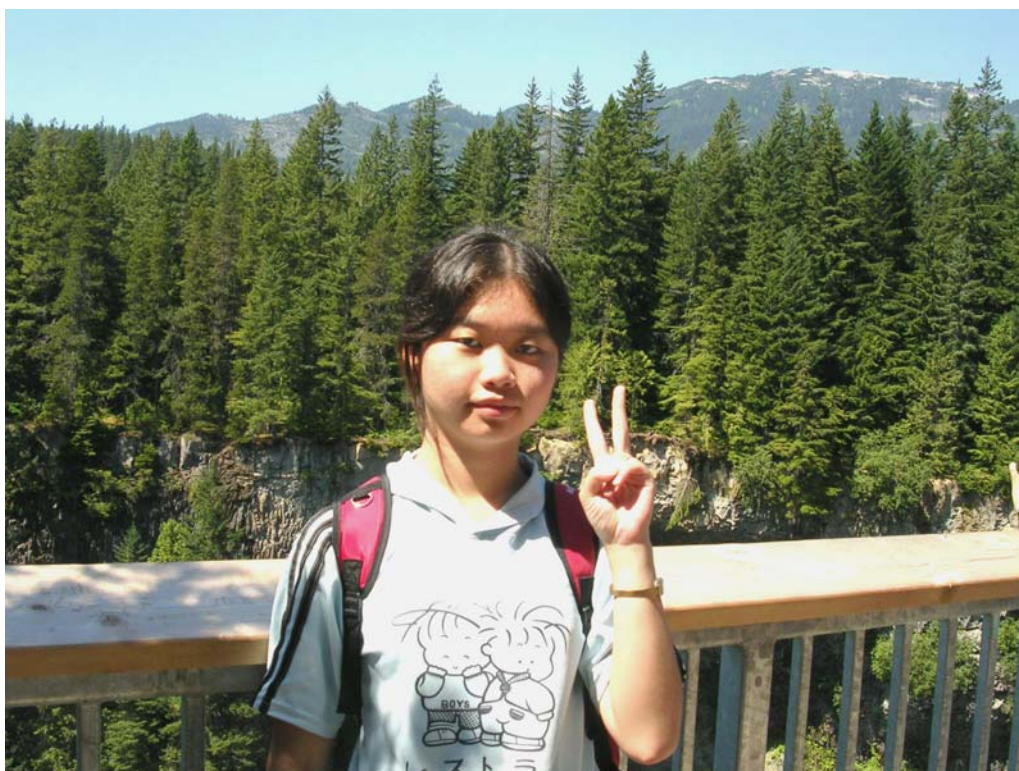
美國正選代表：美國第 58 屆國際科技展覽會

赫伯特胡佛青年工程獎：第一名

學校 / 作者：國立臺中文華高級中學

林雨蓉

## 作者簡介



國中時，媽媽的體諒與支持，有幸接觸到全國及國際科展，就像習慣的養成一般，對科學的執著與日聚增。上高中後，有感於學校課程無法深入主題之研討，於是參加中興大學物理輔導班吸收更深廣的知識及實驗方法。音樂課的報告，因緣際會的讓我有機會參觀后里產業文化－薩克斯風製造廠。了解到這個文化產業面臨窘境，便現學現用的試圖解決問題。這個研究報告的完成，除了感謝指導老師審稿及實驗指導外，要特別感謝中興大學物理系林立教授對於數學理論的教導及逢甲大學機電系固體力學組趙魯丕教授和黃錦煌教授對有限元素軟體 ANSYS、計算 Mathematica 軟體的解惑。

## Abstract

Playing musical instrument is to make sounding part produce stationary wave so as to give off various gentle sounds and tones. According to different modes of sound producing, musical instruments which comprise vibrator (sounding part) and resonator can be divided into stringed instruments (which vibrate the strings to produce stationary wave), wind instruments (which produce stationary wave with vibration of the air column) and percussion instruments (which produce stationary wave with natural frequency of boards, films or bricks). Three Essentials of sound include amplitude, frequency and waveform, in which the amplitude decides the volume, tones are related to frequency and the waveforms are composed of different frequency and volume. Various musical sounds are mainly due to different timbres and tones. Timbres, sounding characteristics of sounding part, is decided by waveform of the sounding part. Tone means pitch of the sound and is closely related to vibrating frequency of sounding part. Higher frequency makes higher tones and pitch of a musical scale is decided by different tones. Music composing and playing is necessarily connected with music temperament including producing of stationary wave, discussion of temperament, measurement of frequency, establishment of vibrating mode of keys and observation of waveform. We adopted frequency counter, wave inspector, ANSYS software and Mathematica software and designed a series of experiment to get further knowledge of technique of handling musical instrument wave.

After visiting musical instrument manufacturers, we learnt that design and improvement are still the essential subjects for instrument craftsmen. Experimental method in this article can provide reference for on-the-spot tuning of large concert, musical instrument tuner and musical instrument designing and manufacturing by craftsmen, and more economic and practical suggestion for cultural industry development.

## 中文摘要

演奏樂器時，是使發聲體產生駐波而發出各式各樣悠揚的聲音及音調；樂器主要分成振動體(發聲體)及共鳴器兩部分，依發音方式分為弦樂器(使弦振動產生駐波)、管樂器(利用空氣柱振動產生駐波)及打擊樂器(利用板、膜或磚等彈性材料的固有頻率振動產生駐波)。聲音有三要素：振幅、頻率及波型，響度取決於振幅大小、音調與頻率有關、波型則由不同的頻率及響度組成。樂音多變的主因是音色及音調。音色是發聲體的發音特性，取決於該發聲體的聲波波型。音調即聲音的高低，與發聲體的振動頻率材質息息相關，頻率愈高，其音調愈高，而樂曲中的音階高低則是由音調高低所構成。樂曲的製作及演奏必涉及到律制，從駐波的產生、律制的探討、頻率的測量和琴鍵的振動模型建立與波形

的觀察，我們使用計頻器、示波器及有限元素 ANSYS 軟體、數學計算 Mathematica 軟體，我們設計一系列實驗，企圖對樂器聲波操作技巧有更進一步的認知。

從實地走訪樂器製造廠，了解到設計與改良仍是樂器工藝家重要課題，本文的實驗方法可提供大型演奏會現場調音、樂器調音師或樂器工藝家設計製造樂器時參考用，對於發展文化產業期待提供更經濟與實用的建議。

## 一、研究動機 (Motive)

在「學琴的孩子不會變壞」與「學鋼琴可以訓練手眼協調反應」原則下，我們之間有人從幼稚園、有人從國小低年級開始學習鋼琴。很多學琴的人能來一段即席演奏，也有很多人通過各個音樂協會的各種檢定；但很少人注意到琴聲為何如此動聽。十八、九世紀一些科學家對音樂很有興趣，但不見得能夠演奏，他們用科學的方法，把聲音的現象用數學的觀點做系統的整理。參觀了薩克斯風製造廠後；又在「生活的數學」書中看到「琴鍵上的數學」一文，了解到音符中的頻率成等比關係。興起一窺究竟的想法，努力去探討波動與聲音的基本概念，著手找有關音符與聲音的相關資料，並設計實驗活動，試圖從活動中去獲得更多與音律相關的數學知識。老師也告訴我們：「音律、物理聲學、數學分別在現實生活中早已普及化，但其相互間應用技術改良與實用性的探討，符合本世紀科學跨領域研究的潮流。」

## 二、研究目的(Object)

十八、十九世紀數理史上赫赫有名的 Euler、Helmholtz 等，對於音樂聲學的奠基都有相當大的貢獻。他們將自己所受的科學訓練跟音樂嗜好相結合，闡述了一些專業演奏家或音樂學者「只知其然」的聲音現象，西方音樂聲學這樣的歷史經驗，值得我們參考【1】。於是，我們使用較一般性的方法對音樂聲學作以下幾點探討：

1. 參訪薩克斯風製造廠，了解樂器製作流程與現況。
2. 以駐波的產生研討，了解弦樂器發聲及頻譜變化的原理。
3. 由研討音律數學模式(mathematical module)之發展，作為設計實驗依據，並以管樂器測量振動頻率去驗證音律的規則。
4. 以打擊樂器製作有限元振動模型分析(finite element mode analysis)，了解打擊樂器發聲的原理。
5. 示波器觀察各種樂音振動波形，作為頻譜分析的基礎。

## 三、研究器材與設備(Material And Equipment)

樂器：長笛、鐘琴。PC 個人電腦乙部、函數產生器、計頻器各乙部、指向性收音麥克風乙具、精度 0.02mm 游標卡尺、有限元素 ANSYS 軟體、Shimmer Curve 軟體、計算 Mathematica 軟體各乙套。

#### 四、研究過程和方法(Process And Method)

##### (一)、走訪台灣中小企業轉型文化產業—后里薩克斯風製造

##### 1.文化產業的時代意義

1970~1990 年，台灣中部為機械加工工業重鎮，帶領台灣經濟走向顛峰；曾幾何時，由於產業外移，這些中小企業面臨生存危機。幾經思量後，由經濟部工業局及工業技術研究院輔導轉型的文化產業。

##### 2.製造流程概述

- (1)管身形狀模具：音階的音準與材質及技術有關，設計模具初期，幾何尺寸及按鍵孔距離的量測，製成後調整（使用節拍器的 pitch 測量頻率），經過多次嘗試，設定模具型態。
- (2)大部分管身與連接部分的零件都是焊錫，如圖(1)；按鍵部份則焊銀；如圖(2)。
- (3)修整管身、表面處理(包括磨製細微零件及拋光)。
- (4)組裝、檢查、調音，成品如圖(3)。

##### 3. 再次的難題：環境重金屬污染。



圖(1)





圖(2)



圖(3)

## (二)、文獻探討

無論是演唱還是演奏，只要涉及音準就必定得涉及到律制，不同的律制有不同的音準標準。對於音律的研究，現今世人公認的三大律制，分別為三分損益律、純律和十二平均律。陳萬鼐於「清史樂志之研究」【2】為中國古代五音的數學基礎作可靠的考據，五音則由三分損益律定其音高（頻率）。李約瑟在「中國之科學與文明」一書中，提及中國聲學與數學發展關係【3】。明朝數學與音樂家朱載堉

增創十二平均律算出音高之頻率【4】。西方數學家畢達哥拉斯(Pythagoras)使用數學創七聲音階的平均律【5】。由於考據並未提到律管材質之詳細資料，我們取其三分損益律作純數學模式之研討，有關純律七聲音階之實用性與普及性有限，我們只略述其概要。本研究就十二平均律作數學理論探討，並使用現代聲學之理論建立實驗方法，試圖由實驗數據去驗證數學理論的精準與前瞻。

近代基礎聲學認為每一種音源皆有獨特的音色，這是波型不同造成的，當音源受到振動時會推動空氣，造成空氣擠壓產生聲音。其所產生的第一個聲音我們稱為“基音”，我們所認定的音高便是基音的頻率所決定的，當基音產生後它又會以其本身的頻率的倍數  $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ 、 $1/5$ ...繼續振動，在音樂上來說就是以基音的 8 度、5 度、4 度、大 3 度、小 3 度...繼續振動發出聲音，我們稱這些基音以外的聲音稱為泛音(overtone)或諧音(harmonics)。當基音混和了不同音量比例的泛音後便會產生不同的音色。因此每一種發聲體音色的不同，是由於每一種音源泛音振動的振幅皆不相同。這樣的理論與音樂的調和、節奏、美感要求是吻合的。古希臘的畢達哥拉斯(Pythagoras)學派信條是「萬物皆數也」。他們發現撥彈兩個長短不等的弦，其長度為最簡單整數比時，就會產生諧音。例如一個大 3 度接一個小 3 度的和絃就稱為「大三和絃」(如 1-3-5)；若一個小 3 度接一個大 3 度的和絃就稱為「小三和絃」(如 6-1-3)。但「大三和絃」聽起來比「小三和絃」更和諧。那是因為「大三和絃」的弦長比為  $4:5:6$  較「小三和絃」的弦長比為  $10:12:15$  更接近「最簡單整數比」【5】。

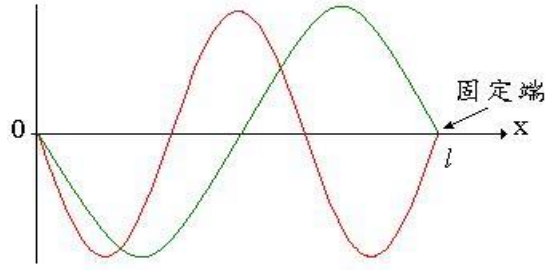
### (三)、計算

#### 1. 弦產生駐波的數學模型

設有兩列振幅、頻率完全相同的波沿相對方向在介質中行進，當兩行進波重疊時會產生駐波(standing wave)。描述波的函數通常可用  $\sin(kx \pm \omega t - \phi_{\pm})$  或  $\cos(kx \pm \omega t - \phi_{\pm})$  來表示，其中， $k = 2\pi\nu$ ， $\nu$  為波動的頻率， $\omega$  為角頻率(angular frequency)。 $\omega t$  取負號，表向正  $x$  方向傳遞的行進波，取正號，表向負  $x$  方向傳遞的波。 $\phi_{\pm}$  表示對應的起始相位(initial phase)。由於  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ， $\cos\theta = \text{Re}(e^{i\theta})$ ， $\sin\theta = \text{Im}(e^{i\theta})$ 。為了方便計算，使用複數  $e^{\pm i(kx \pm \omega t - \phi_{\pm})}$  表示波函數。一般而言，實際量測很難得到虛部。以複數的方式討論兩端固定且緊張的弦線，行進波產生駐波的條件，如圖(4)。

在長度為  $l$  的弦線上，有一橫波自  $x = 0$  處向  $+x$  方向傳遞，其數學形式寫成：

$$y_+ = y_m \cdot e^{-i(kx - \omega t - \phi_+)} = y_m \cdot e^{i(kx - \omega t + \phi_+)} \quad (1)$$



圖(4)

式中  $y_m$  為振幅。這個波傳遞至  $x = l$ ，會產生反射波。此反射波的振幅與行進波相同，但相位會改變，可用(2)式表示反射波。弦線上的波是線性重疊表示成(3)式：

$$y_- = y_m \cdot e^{i(kx - \omega t - \phi_-)} \quad (2)$$

$$y = y_+ + y_- = y_m \cdot e^{-i(kx - \omega t - \phi_+)} + y_m \cdot e^{i(kx - \omega t + \phi_-)} \quad (3)$$

在  $x = 0$  處， $y = 0$ ，則

$$y_m \cdot e^{-i(\omega t - \phi_+)} + y_m \cdot e^{i(\omega t + \phi_-)} = 0$$

$$\text{即 } e^{i\phi_-} + e^{i\phi_+} = 0, \therefore e^{i\phi_-} = -e^{i\phi_+} = e^{i\pi} \cdot e^{i\phi_+} = e^{i(\pi + \phi_+)} \Rightarrow \phi_- - \phi_+ = \pi \quad (4)$$

因此(3)式的波函數簡化成

$$y_m = y_m e^{i\omega t} (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{i\phi_+} \quad (5)$$

在  $x = l$  處也是固定端， $y = 0$ ，則  $e^{ikl} - e^{-ikl} = 2i \cdot \sin kl = 0$ ，由此可得  $kl$  必須滿足條件：

$$kl = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

波數  $k \equiv 2\pi / \lambda$ ，則  $l = n \cdot (\lambda / 2)$ 。此時合成波之形式  $y = 2iy_m e^{i(\phi_+ + \omega t)} \sin kx$ ，取實數部分(3)式

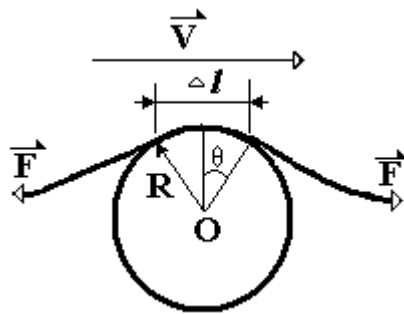
$$\text{寫成： } y = 2y_m \sin kx \cdot \sin(\omega t + \phi_+) \quad (7)$$

由(7)式知合成波在  $x = \lambda / 2, \lambda, 3\lambda / 2, \dots$  處產生節點(node)，此處當弦振動時，不隨時間移動位置；在  $x = \lambda / 4, 3\lambda / 4, \dots$  處產生波腹(antinode)，此處當弦振動時，隨時間在最大振幅間變化位置。稍後我們將以此數學式為基礎，使用 Mathematica 軟體，借由改變(7)式中的參數  $k$  及  $\omega$ ，呈現駐波動畫。

## 2. 波速與弦線張力關係

考慮一很長弦線，觀測者看到脈波速率向左平移(觀測者站在圓上)的系統，如圖(5)所示， $\mu$  是線質量、 $F$  是弦上張力，使長為  $\Delta l$  之弦線段的質量做半徑為  $R$  的圓周運動。其向心力為





圖(5)

$2F \cdot \sin \theta \approx 2F \cdot \theta$  (當  $\Delta l/R$  很小時,  $\theta$  也很小), 由  $F = ma$ , 得向心力  $= \mu \cdot \Delta l \frac{v^2}{R}$ , 又

$$2F\theta \approx \mu \cdot 2R\theta \cdot \frac{v^2}{R}, \text{ 化簡後脈波速率爲 } v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

### 3. 弦線振動頻率與張力關係

假設線長為  $l$ , 弦上有駐波  $n$  段, 則  $l = n \cdot \lambda / 2$ ; 再由  $v = f \cdot \lambda$  得  $f = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ,

若頻率固定且弦之線質量也固定, 上式寫成  $\frac{F}{\lambda^2} = \mu \cdot f^2$ 。

### 4. 各律制數學模型探討

研究聲學必先制定音律。如果沒有音律來規範的聲音, 那就不稱為音樂。例如: 常聽到的蟲鳴鳥叫都不是音樂。有了音律以後, 才能發展和聲和旋律。今公認的三大律制, 根據其出現的先後分別為:

#### (1) 三分損益律

中國音樂造音的方法, 最早見於《管子》卷〈地員〉篇, 其五音律數計算法如下:

宮音:  $1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  (Do)

徵音:  $81 \times (1 + 1/3) = 108$  (Sol)

商音:  $108 \times (1 - 1/3) = 72$  (Re)

羽音:  $72 \times (1 + 1/3) = 96$  (La)

角音:  $96 \times (1 - 1/3) = 64$  (Mi)

數字部份代表管的長度, 稱為律數【3】, (括符中為相對之唱名)。管的長短即代表發音的高低。吹愈短的管子, 發出的頻率愈高, 音調也愈高。《史記》〈律書〉之五音律數計算法稍有不同:

宮音:  $9 \times 9 = 81$  (Do)

徵音:  $81 \times (1 - 1/3) = 54$  (Sol)

商音:  $54 \times (1 + 1/3) = 72$  (Re)

羽音:  $72 \times (1 - 1/3) = 48$  (La)

角音:  $48 \times (1 + 1/3) = 64$  (Mi)

管子自宮音之律管，先用三分益一法，史記則先用三分損一法。「益一」名曰「上生」，「損一」名曰「下生」，管子先用上生，得徵音為「倍律」。史記先用下生，徵音為正律。「倍律徵音」為「正律徵音」之低八度音【7】；求得五聲音階如表(2)。

## (2)純律

五聲音階周公又增加了兩個半音，稱為「變徵」和「變宮」。目的是利用這兩個半音在音階中扮演輔助的角色。因為在角、徵音之間和羽、宮音之間的音程間隔較大，分別加入變徵和變宮可以作為音程間過渡的橋梁。變徵和變宮的律數求法仍沿用三分損益律的規則如下：

$$\text{變宮} : 64 \times (1 + 1/3) = 85.33 \quad (0.33 \div 1/3)$$

$$\text{變徵} : 85.33 \times (1 - 1/3) = 56.89 \quad (0.89 \div 8/9)$$

其中 64 是角音的律數；求得七聲音階如表(3)。

世人認為「簡單便是美」，因此使用兩個音頻的最簡單的整數比來決定純律。以音名 C D E F G A B C 為例，西洋七音的頻率比為 1 : 9/8 : 5/4 : 4/3 : 3/2 : 5/3 : 15/8 : 2 如此的設計可使演奏獲得非常和諧的效果，但在某些情形下，演奏者必須在樂器上移調才可演奏曲子，可是純律的樂器卻不允許移調演奏。舉例說明：維持純律的最簡單整數比，試著將原來 C 大調的曲子移調成 D 大調的曲子在樂器上演奏，則兩者之間的頻率差異就出現了，如表(1)所示：

表(1)

以 C、D 兩音為基音，以純律演算而得七聲音階的頻率					
以 C 為基音的唱名、音名及頻率			以 D 為基音的唱名、音名及頻率		
唱名	音名	頻率	唱名	音名	頻率
Do	C	512	-	-	-
Re	D	576	Do	D	576
Mi	E	640	Re	E	648
Fa	F	683	Mi	#F	720
Sol	G	768	Fa	G	768
La	A	853	Sol	A	864
Ti	B	960	La	B	960
Do	C'	1024	Ti	#C'	1080

### (3)十二平均律

發明十二平均律的是明朝鄭王世子朱載堉（1536—1611）。十二平均律又稱十二等律，即一組（我國古代稱一均）十二個半音，每相鄰的半音比值相等。十二平均律的生律公式為 $2^{1/12}$ ，相鄰二律之間的頻率比為1.05946309436，相鄰二律之間的弦長比為其倒數：0.943874312681，換言之，十二平均律的頻率及弦長皆成等比數列；如表(4)所示。

## (四)、實驗

### 1.長笛音高頻率測量

#### (1)長笛規格：

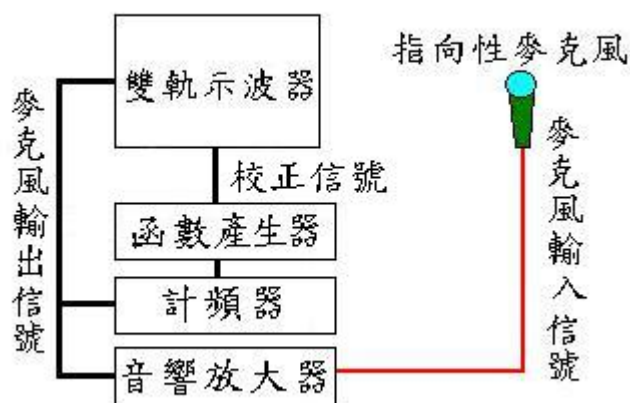
型號：YAMAHA(YEL-211) 調性：C 材質：鎳銀管

指鍵設計：閉鍵式 表面處理：鍍銀 按鍵：曲列式

附 E 鍵裝置。

量測條件：具隔音效果及冷氣溫濕度(乾球 24°C，濕球 21°C，相對溼度 64%)控制之室內。

#### (2)量測儀器如圖(6) 及圖(7)。



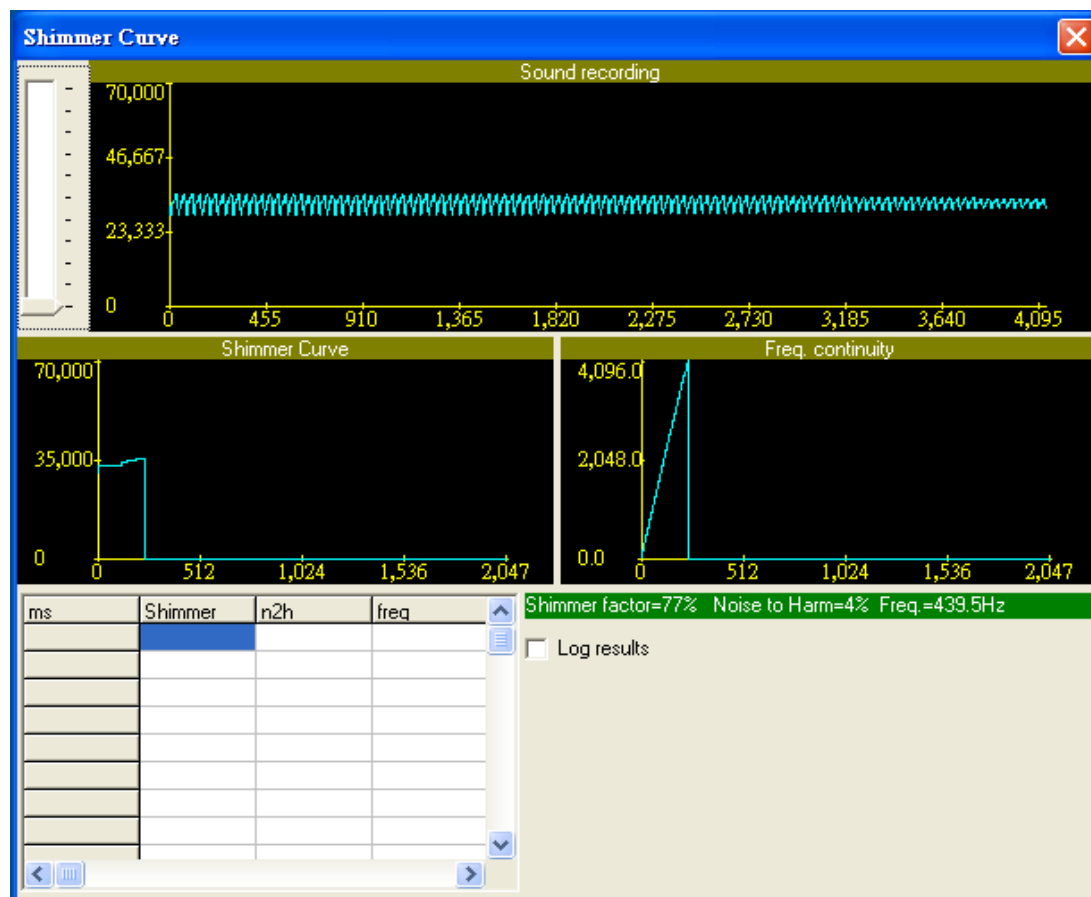
圖(6) 長笛音高頻率量測儀器示意圖

#### (3)方法：(圖(6)法)

(A)基音校正—依樂器廠商提供之長笛吹管音高修正量設為零，此時音名“A”之音頻為 440Hz，調整吹孔與嘴唇之位置，吹出聲響並觀察音頻儀 LED 顯示板的數字，並觀察示波器上的波形，直到找到吹孔與嘴唇之位置使 LED 顯示板的數字為 440，用白板筆在嘴唇下方與笛身作記號。

(B)依校正位置練習吹氣法，練習吹“A”之音頻為 440Hz 至純熟為止。

(C)實測 C、#C、D、#D、E、F、#F、G、#G、A、#A、B 等 12 音之頻率(讀數值時，注意示波器上波形)，記錄於表(5)中。



圖(7) Shimmer Curve 軟體測量音名“A”之音頻為 440Hz 時之狀況

(4)方法：(圖(7)法)

(A)基音校正—依樂器廠商提供之長笛吹管音高修正量設為零，此時音名“A”之音頻為 440Hz，調整吹孔與嘴唇之位置，吹出聲響並觀察軟體的數字變化及 Noise to Harm. 數字不可太高，並啟動 Log result 紀錄頻率值為 440，用白板筆在嘴唇下方與笛身作記號。

(B)實測 C、#C、D、#D、E、F、#F、G、#G、A、#A、B 等 12 音之頻率，並記錄於表(6)中。

## 2.鐘琴琴鍵長度量測與電腦振動模型製作

(1)鐘琴規格：

型號：YAMAHA(MBL-32A)

音域：32 音階，f2-c5 1/2 個八度音。

音板：鋁合金琴鍵尺寸 27.7\*8.3mm/mm，表面鏡面處理。

(2)方法：

(A)用精度 0.02mm 游標卡尺，量測所有琴鍵長度，並記錄於表(7)。

(B)依測量尺寸建立有限元素軟體 ANSYS 模擬琴鍵振動模型。

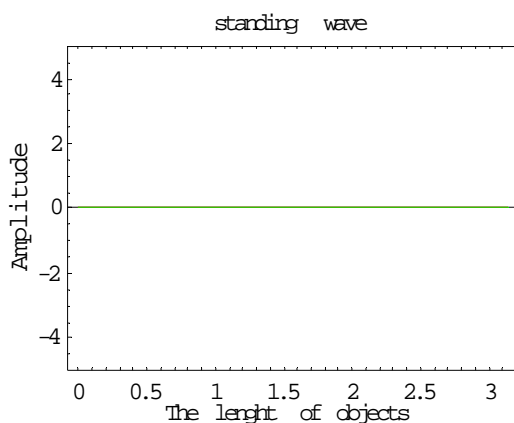
- (a) 定義元素及材料性質：琴鍵鋁合金係 70XX 系列材質，其楊氏模數是  $5.2 \times 10^9 \text{Gpa}$ ，密度為  $2800 \text{kg/m}^3$ ，卜易生比(poisons ratio)為 0.35；選用 SOLID92 元素。
- (b) 幾何形狀：依測量尺寸建立模型。
- (c) 生成網格(Meshing)。
- (d) 負載及挾持(Load and Constraints)。
- (e) 進行分析(Analysis)。
- (f) 製作動畫振動模型(Animate)。
- (g) 進行暫態分析。

## 五、研究結果(Result)

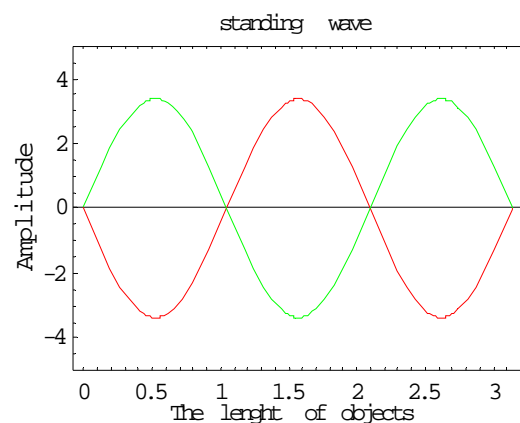
(一)駐波 Mathematica 軟體駐波動畫模擬：

考慮兩個波，綠色前進波  $y_1 = 4 \sin 3x \cdot \sin(-2t)$  及紅色反射波  $y_2 = 4 \sin 3x \cdot \sin 2t$ 。

- 1. 振幅 = 4， $k=3$  及  $\omega=2$  時，振動繩長= $\pi$ ，每 0.5 秒間隔的所有模型，如圖(8)~圖(14)。
- 2. 振幅 = 4，前進波  $k=4$ 、反射波  $k=4$  及  $\omega=2$  時，振動繩長= $\pi$ ，每 0.05 秒間隔的所有模型，在振動，如圖(15)~圖(17)。
- 3. 振幅 = 4，前進波  $\omega=1$ 、反射波  $k=4$  及  $\omega=2$  時，振動繩長= $\pi$ ，每 0.05 秒間隔的所有模型，在振動，如圖(17)~ 圖(21)。

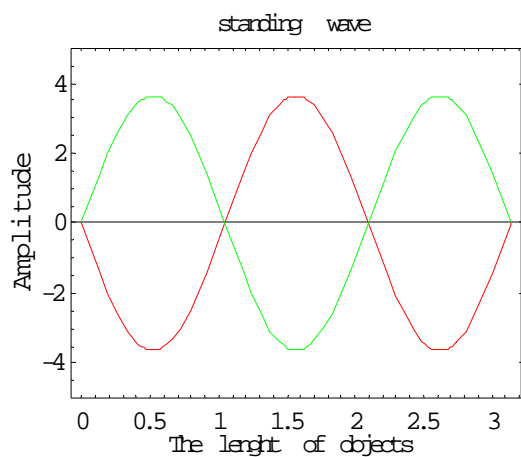


圖(8)  $t=0(\text{sec})$

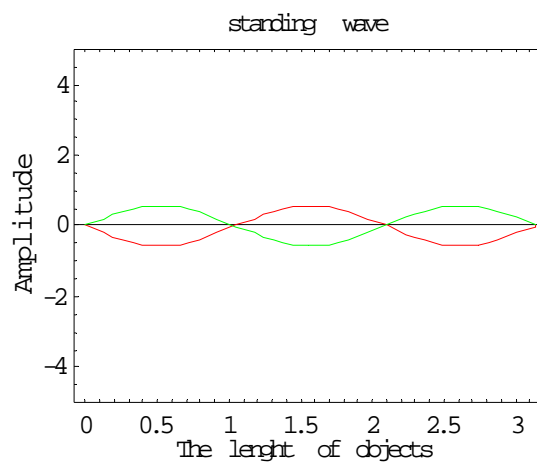


圖(9)  $t=0.5(\text{sec})$

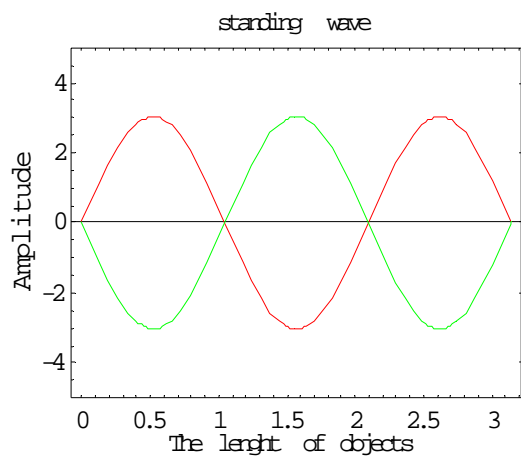




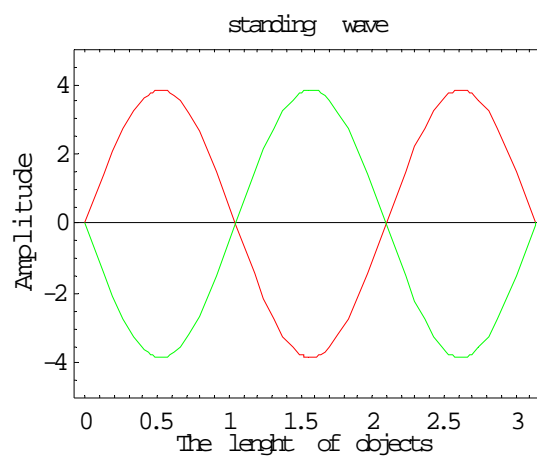
圖(10) $t = 1(\text{sec})$



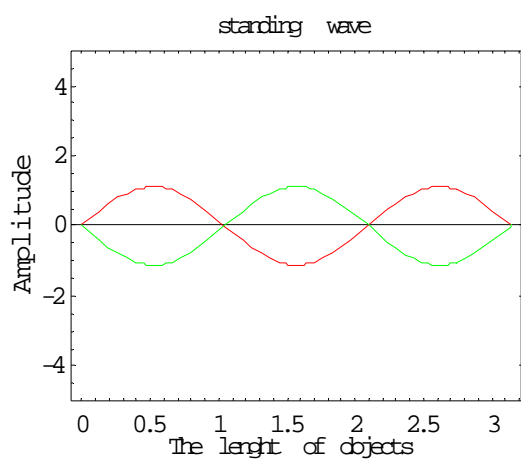
圖(11) $t = 1.5(\text{sec})$



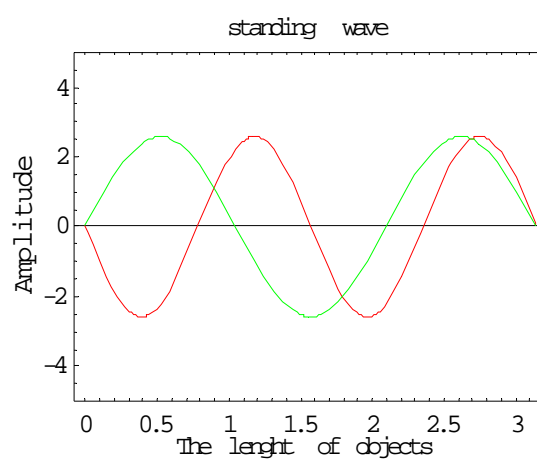
圖(12) $t = 2(\text{sec})$



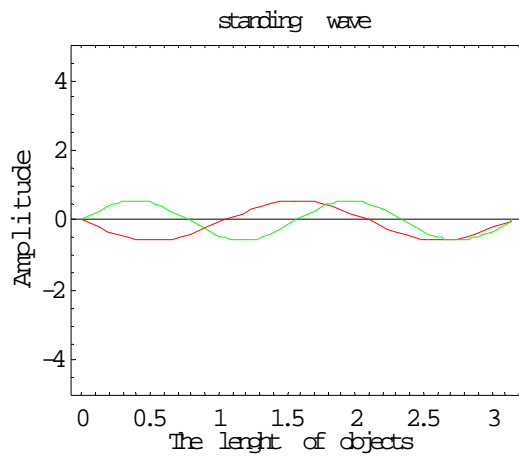
圖(13) $t = 2.5(\text{sec})$



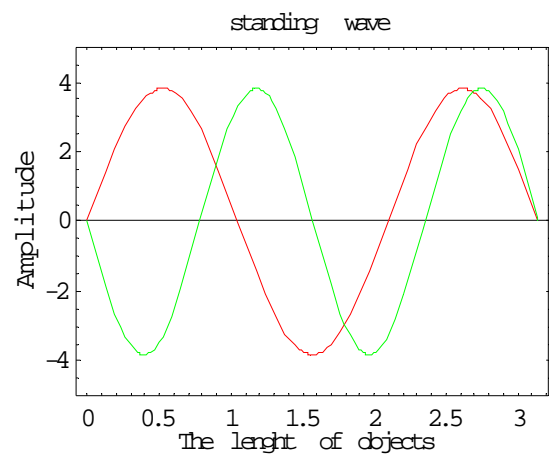
圖(14) $t = 3(\text{sec})$



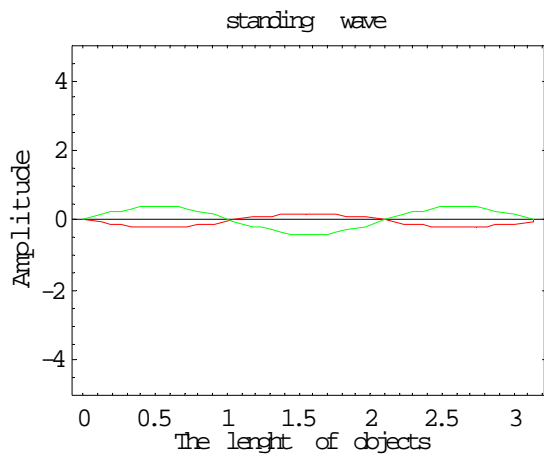
圖(15) $t = 0.5(\text{sec})$



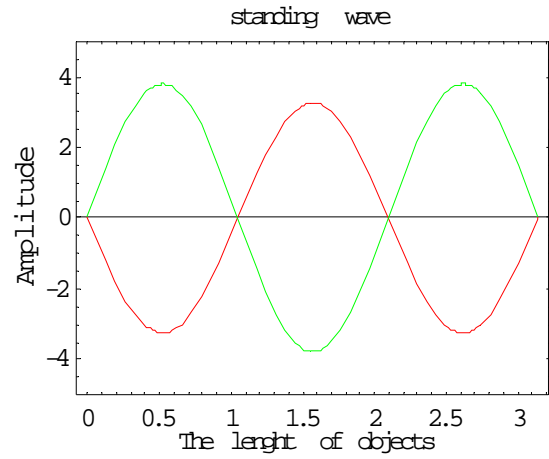
圖(16) $t = 1.5(\text{sec})$



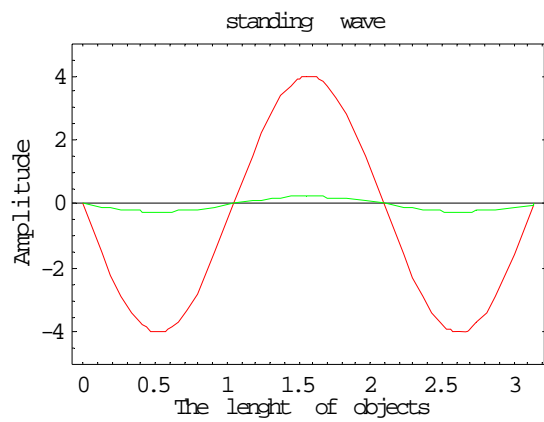
圖(17) $t = 2.25(\text{sec})$



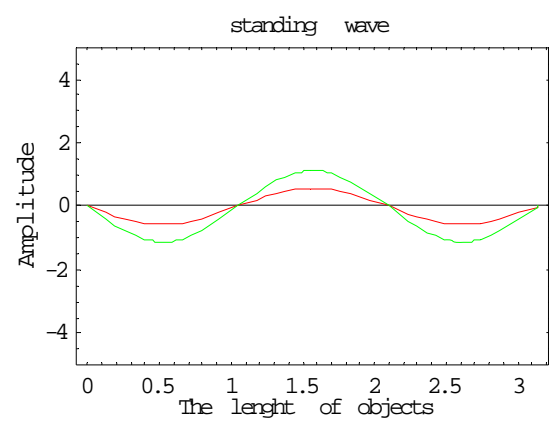
圖(18) $t = 0.1(\text{sec})$



圖(19) $t = 1(\text{sec})$



圖(20) $t = 1.5(\text{sec})$



圖(21) $t = 3(\text{sec})$

(二)管子、史記這兩種五聲音階綜合如表(2)：

表(2)

音 名	倍徵 (Sol)	倍羽 (La)	宮 (Do)	商 (Re)	角 (Mi)	徵 (Sol)	羽 (La)
律管長度	108	96	81	72	64	54	48
管子記載	徵	羽	宮	商	角		
史記記載			宮	商	角	徵	羽

(三)以管子及史記不同相生法求得之七聲綜合如表(3)：

表(3)

音 名	倍徵 (Sol)	倍羽 (La)	倍變宮 (Si)	宮 (Do)	商 (Re)	角 (Mi)	變徵 (#Fa)	徵 (Sol)	羽 (La)	變宮 (Si)
管子	108	96	85.33	81	72	64	56.89			
史記				81	72	64	56.89	54	48	42.33
修改後 音名	宮 (Do)	商 (Re)	角 (Mi)	變徵 (Fa)	徵 (Sol)	羽 (La)	變宮 (Si)	清宮 (Do)		
管長	108	96	85.33	81	72	64	56.89	54		
除 108	1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2		

(四)十二平均律的音名、弦長比和頻率之間的關係，如表(4)所示：

表(4)：西洋音名、弦長比和頻率比之間的關係

西洋音名	弦長比	頻率比
C	1 : 1	1 : 1
#C	$1 : (1/2)^{1/12}$	$1 : 2^{1/12}$
D	$1 : (1/2)^{2/12}$	$1 : 2^{2/12}$
#D	$1 : (1/2)^{3/12}$	$1 : 2^{3/12}$
E	$1 : (1/2)^{4/12}$	$1 : 2^{4/12}$
F	$1 : (1/2)^{5/12}$	$1 : 2^{5/12}$
#F	$1 : (1/2)^{6/12}$	$1 : 2^{6/12}$
G	$1 : (1/2)^{7/12}$	$1 : 2^{7/12}$
#G	$1 : (1/2)^{8/12}$	$1 : 2^{8/12}$
A	$1 : (1/2)^{9/12}$	$1 : 2^{9/12}$
#A	$1 : (1/2)^{10/12}$	$1 : 2^{10/12}$
B	$1 : (1/2)^{11/12}$	$1 : 2^{11/12}$
C'	1 : 1/2	1 : 2

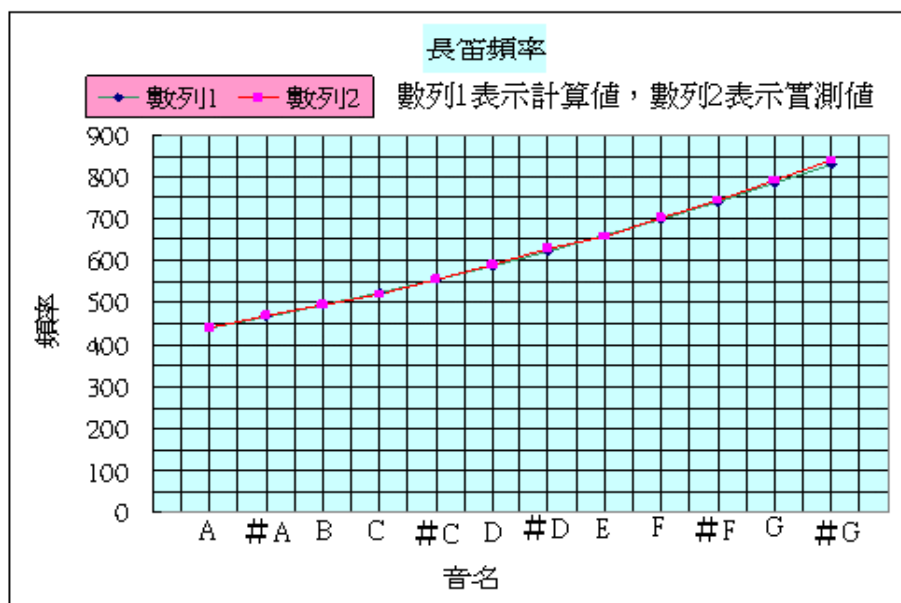
(五)長笛音高頻率測量

1.圖(6)法：

表(5) A 大調長笛頻率

單位：Hz

音名	A	#A	B	C	#C	D	#D	E	F	#F	G	#G
計算	440	466.2	494	523	554.4	587	622	659	698.5	740	784	830.6
實測	440	468	495	521	554	589	628	659	701	745	790	840



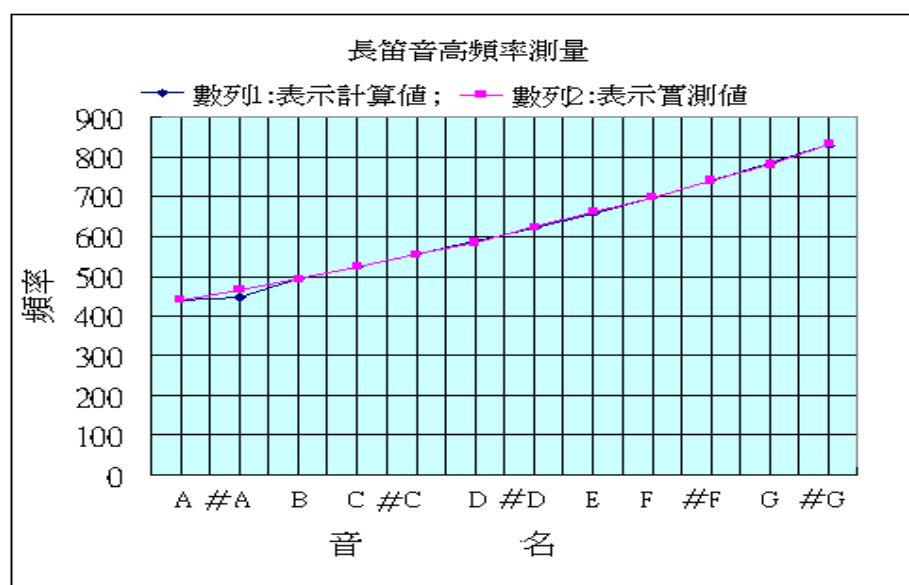
圖(22)長笛頻率比較圖

2.圖(7)法：

表(6)A 大調長笛頻率

單位：Hz

音名	A	#A	B	C	#C	D	#D	E	F	#F	G	#G
計算	440	446.2	494	523	554.4	587	622	659	698.5	740	784	830.6
實測	440	465	493	525	555	585	624	660	698	741	782	833



圖(23)長笛頻率比較圖

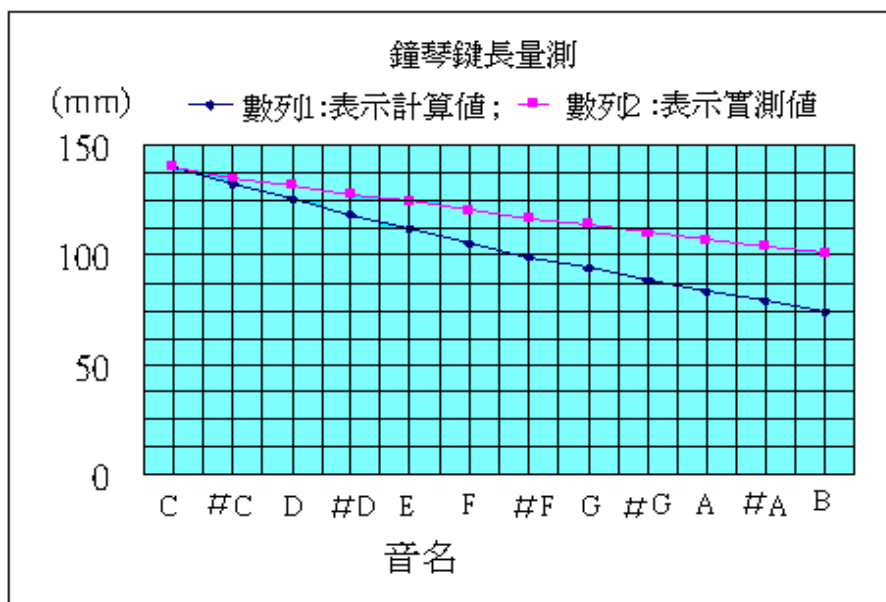


## (六)鐘琴琴鍵長度測量

表(7) C 大調鐘琴鍵長

單位：mm

音名	C	#C	D	#D	E	F	#F	G	#G	A	#A	B
計算	140.2	132.33	124.9	117.89	111.28	105.03	99.14	93.57	88.32	83.36	78.68	74.27
實測	140.2	135.28	131.36	127.6	124.4	120.28	116.7	113.5	110.2	106.5	103.8	100.6



圖(24)鐘琴鍵長比較圖

## (七)電腦模擬琴鍵振動模型及暫態時間情形

1. 琴鍵振動模型以自然振動求得的 5 組固有頻率值，如表(8)。

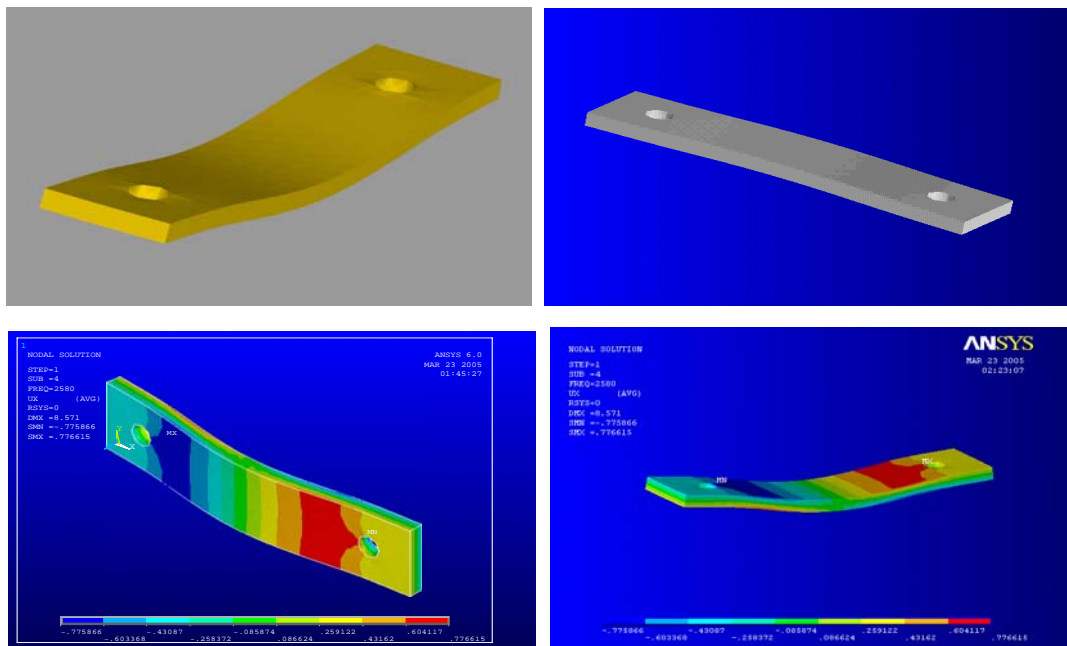
表(8)

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	1.34E-03	1	1	1
2	440.29	1	2	1
3	655.84	1	3	1
4	894.09	1	4	1
5	1169.6	1	5	1

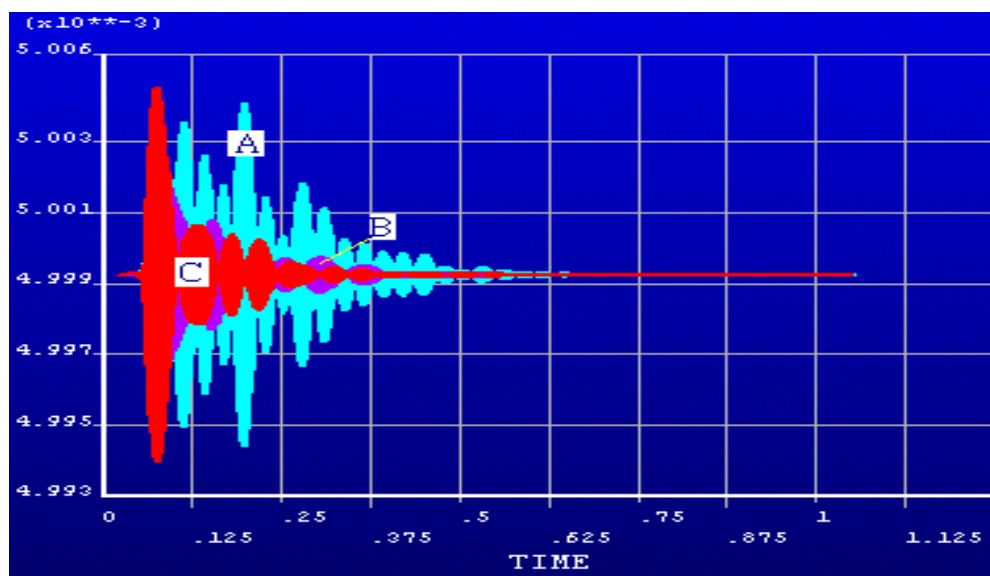
2. 振動模態圖及暫態時間關係

圖(8)的設定步驟是在琴鍵中央施敲一下，並規化 1 秒計算 440 次後，取琴鍵中央節點的位移，

A 是 Z 軸、B 是 Y 軸、C 是 X 軸的位移波型。



圖(25)鐘琴鍵長模態圖



圖(26)鐘琴鍵長時間位移暫態圖

單位：cm

3.在條件固定下，改變琴鍵的楊氏模數與固有頻率變化情形

表(9)

楊氏模數=1.2×10 <sup>9</sup> Gpa				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	5.08E-05	1	1	1
2	211.51	1	2	1
3	315.05	1	3	1
4	429.51	1	4	1
5	561.85	1	5	1

表(10)

楊氏模數=2.2×10 <sup>9</sup> Gpa				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	286.39	1	1	1
2	426.58	1	2	1
3	581.56	1	3	1
4	760.75	1	4	1
5	769.18	1	5	1

表(11)

楊氏模數=3.2×10 <sup>9</sup> Gpa				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	345.39	1	1	1
2	514.48	1	2	1
3	701.39	1	3	1
4	917.50	1	4	1
5	927.66	1	5	1

表(12)

楊氏模數=4.2×10 <sup>9</sup> Gpa				
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	395.70	1	1	1
2	589.41	1	2	1
3	803.54	1	3	1
4	1051.1	1	4	1
5	1062.8	1	5	1

## 六、討論(Discussion)

- (一) 薩克斯風是很精緻也很耗人工的樂器，具有獨特優勢的專業技術。現行加工技術(如附圖)所帶來的難題。因應之道在於共鳴效應和音質音色等高難度領域來研發、製造，才有相當特色和產品優勢。由 Mathematica 軟體的駐波動畫可知，在定長弦上形成駐波的條件是弦線長為半波長的整數倍。由公式： $\frac{F}{\lambda^2} = \mu \cdot f^2$  得知，弦之張力與波長平方的比值恆為常數。
- (二) 三分損益法是用振動物體分成三份，損其一份以生成上方五度音，益其一份則生成下方四度音，其所用振動實體之比例為 4 : 3 及 2 : 3。希臘哲學家畢達哥拉斯(Pythagoras)所發明的五度相生律本質乃是和三分損益法相同的。畢氏利用單弦琴(monochord)實驗及逐步相減法(the successive subtraction)，發現兩個音的弦長為最簡單整數比時，是諧和悅耳的。例如：2 : 1、3 : 2、4 : 3、5 : 4 分別是八度、五度、四度及三度音程。作法：考慮長為 a、b(a > b)的兩弦(1)a - b；若大於 b，再減 b，直到  $a - k_1 b \leq b$ ，其中  $k_1 \in \mathbb{N}$ 。(2)仿前述作法，從較大的 b 減去較小的  $a - k_1 b$ ，直到  $b - k_2(a - k_1 b) \leq a - k_1 b$ 。(3)按上述要領反覆做下去，有限步後可以到達“0”，則計算結束。在 0 之前最後一個不為零的數，記為 d，則存在兩個自然數 m 和 n 使得  $a = md$ 、 $b = nd$ 。滿足這個式子的最長弦段，叫作 a 與 b 的最大共度單位【16】。
- (三) 表(1)顯示分別以 C、D 兩音為基音，以純律演算而得的七聲音階頻率，頻率的單位為 Hz。表的左側為以 C 為基音的音階頻率；右側為以左側 D 音頻率為基音的音階頻率。表中顯示，左側的 E、A 音頻率分別是 640、853 Hz，但右側的是 648、864 Hz，即同一音名，但卻是不同頻率。其次，這對製造樂器的工匠而言也是大傷腦筋的地方。工匠製造樂器的方法，可以以八度音 1 : 2 的比例為一個單位，按比例向上或向下演算出其他各個音的音高或頻率。同樣地，他也可以以一個五度或其他度音向上或向下演算出其他音高。舉例說明：理論上，以一組五度音（指包含了五個全音音程的兩個音）為單位，向上爬升（或演算）十二次，和以一組八度音程為單位，向上爬升七次，應得到相同的兩個音。然而事實卻並非如此。以頻率比來看：一組五度音是  $1 : 3/2$ ；一組八度音是  $1 : 2$ ；十二組五度音是  $1 : (3/2)^{12} = 1 : 129.75$ ；七組八度音是  $1 : 2^7 = 1 : 128$ ；顯然 129.75 不等於 128。
- (四) 我們檢驗十二組五度和七組八度音的頻率比：一組五度音是  $1 : 2^{7/12}$ 。一組八度音是  $1 : 2$ 。十二組五度音是  $1 : (2^{7/12})^{12} = 1 : 128$ 。七組八度音是  $1 : 2^7 = 1 : 128$ 。這顯示兩種方法所得到的結果相符。十二平均律雖然解決了移調的難題，但是這一人工律制同純律音程相去甚遠，所奏的和絃必然遠不及純律和協。對此我們將由實驗中去了解。

- (五) 我們以計頻器，收錄行進鐘琴各琴鍵之音，測其音頻，以驗證其頻率數列之特性；打擊樂器屬於板振動，板振動的固有頻率計算，乃是憑藉經驗公式，因此，除了可以對它測出的頻率進行計算而外，目前還無法對它本身的固有頻率進行計算【8】。而選擇使用長笛之因素為「以管定音，以弦定律」的觀念【9】。因欲求管樂器的計算頻率，必須求得頻率計算公式；欲求管樂器的頻率計算公式，必須求得管樂器的管口校正量和管樂器中振動的氣柱的聲速。但管樂器中的聲波速度多借用大氣中的速度，這顯然是未必切合實際的，於是我們選用收音量測。綜合以上論點：我們選用管樂器的長笛測量聲音頻率，來驗證十二平均律。而使用測量打擊樂器的振動弦長比，是基於建立有限元素軟體 ANSYS 模擬琴鍵振動模型的方便。
- (六) 我們選用管樂器的長笛測量聲音頻率，選用測量打擊樂器的振動弦長比，來驗證十二平均律。結果，聲音振動頻率測量，誤差值差強人意，可以接受。但振動弦長量測的結果確出乎我們意料之外，誤差值太大了！思索原因後發現，鐘琴琴鍵背面有金屬加工切削的痕跡，顯示為調音時所留下的。其理論根據為弦的振動周波數(頻率) $f_0 = 1/2\pi (\text{振動系統支持部分的勁度 } S_0 / \text{振動部分的質量 } m_0)^{1/2}$ 【13】，其中，振動系統支持部分的勁度固定時，減低振動部分的質量可增加共振周波數，以達成調音的目的。它的固有頻率也可使用自然振動方法求得。由琴鍵長度改變頻率產生音階，可知發音體的固有頻率與其形狀有關。在其它條件固定下改變琴鍵的楊氏模數，也發現固有頻率隨之變化；由此可知，固有頻率與其彈性有關。測量聲音頻率中由於樂器的選擇的關係，我們無法得到滿意的結果。文獻【15】表示，如果選用吉他或鋼琴等樂器可以得到較佳的結果。
- (七) 經暫態分析位移波型的結果顯示，波型由規則正弦波波經由不同振幅作線性疊加後，呈現非線性線現象。從示波器得到各種樂器之波形，如附圖。附圖是使用函數產生器校正後示波器波形的照相圖。使用 ANSYS 軟體建立鐘琴琴鍵的有限元素動態模型，除了可以觀察到振動的情形外，更可為樂器製造者，事先模擬樂器各種參數的資訊，是近代樂器聲學研究的重要理論。
- (八) 測量聲音頻率時，所使用之儀器及軟體並無複雜之操作，所以精準度值的信任，但是麥克風收音技術值的我們去了解，因為它影響測量聲音頻率時的準確度。麥克風特性：(1)感度：以 dB 表示。(2)響應：輸出電壓周波數。(3)指向特性：音波來到方向所致感度之差。(4)輸出阻抗：以  $\Omega$ (歐姆)表示。本文使用的感度為  $-67\text{dB} \pm 3\text{ dB}$ ，響應為  $50\text{-}18000\text{Hz}$ ，輸出阻抗是  $600\Omega$  的單一指向性麥克風。指向特性請參考附表(一)。



## 七、結論(Conclusion)

從律制的探討及頻率的測量到琴鍵的電腦動畫建立與波形的觀察，我們學習到音頻器與雙軌示波器及工程設計上使用的 ANSYS 軟體的使用方法。對於聲波是音源受到振動時會推動空氣，造成空氣擠壓產生駐波等物理現象，有更深的認識。

管樂器的發聲原理分為發聲部分及共鳴部分；發聲部分有兩種(1)氣流在平面邊緣被分成兩股，如單簧管樂器及人類的聲音；(2)氣流通過平行薄片間的縫隙引起快速閉合，如笛等。共鳴部分為管身的空氣柱，所以吹嘴處氣流流速、吹入管身氣流量影響音高。而打擊樂器使用振動模式分析也是重要的聲學研究方法；多系統耦合及非線性線現象常左右許多樂器的發聲，有限元素分析則是研究這種樂器聲學的重要進階理論。

音樂是穩定與周期性的聲音現象，研究常以頻譜分析(frequency-domain approach)及時間角度分析(time-domain approach)為主，所以在 ANSYS 軟體建立鐘琴琴鍵的有限元素動態模型時，嘗試做暫態分析，就是以時間角度分析波型的作法。本文的實驗方法使用簡化的技巧與工程設備探討基礎性物理現象，可提供樂器調音師或樂器工藝家製造樂器時參考用。至於，我們的發展性，由泛音的多重收音與量測技術去之發展，是改良音色的重點；弦樂器的駐波量測技術，也是樂器聲學的基礎，如果能發展出經濟實用的方法，也是我們所企盼的。

## 八、參考文獻(Reference)

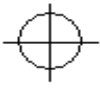



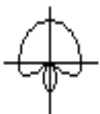
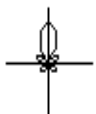
- 【1】蔡振家，“音樂聲學簡介”，藝術與科學的對話，February, 2001。
- 【2】陳萬鼎，*清史樂志之研究*，國立故宮博物院，民 67。
- 【3】李約瑟，*中國之科學與文明*，臺灣商務出版社，民 60 - 71。
- 【4】蔡元定，*律呂新書*，臺灣商務出版社，民 69。
- 【5】Morris Kline，*數學史- 數學思想的發展（上）（中）*，林炎全等譯，九章出版社。
- 【6】Paul G. Hewitt，*觀念物理 IV—聲學、光學* 陳可崗譯，天下遠見出版股份有限公司。
- 【7】黃培體，*中華樂學通論第二編—樂律*，行政院文化建設委員會，民 72。
- 【8】陳正生，“音高標識與音律計算”，上海藝術研究所學術論文，November, 2001。
- 【9】陳正生，“《音樂百科詞典》釋文補商”，上海藝術研究所學術論文，January, 2002。
- 【10】陳萬鼎，“漢京房六十律之研究”，陳萬鼎科技史論著選集，文史哲出版社，民 91。
- 【11】羅浩源，*生活的數學*，九章出版社，民 86。
- 【12】洪慶章等，*ANSYS 教學範例*，知城數位科技股份有限公司，民 90。
- 【13】梁東源，*現代音響科學*，復漢出版社，民 90。

【14】陳榮貴，專業音響實務秘笈，麥書國際文化事業有限公司，民 91。

【15】孫彥俊，“小提琴聲學研究淺介 — 以 C. M. Hutchins 之 Research Papers in Violin Acoustics 為例”，台灣師範大學音樂系學術報告，民 87。

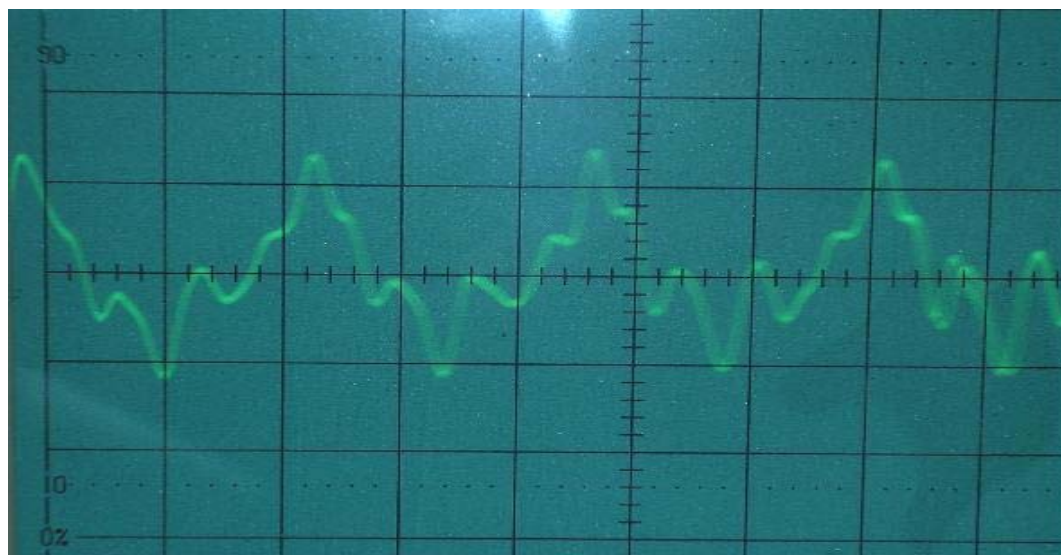
【16】蔡聰明，數學的發現趣談，三民書局股份有限公司，2004

附表(一) 【13】

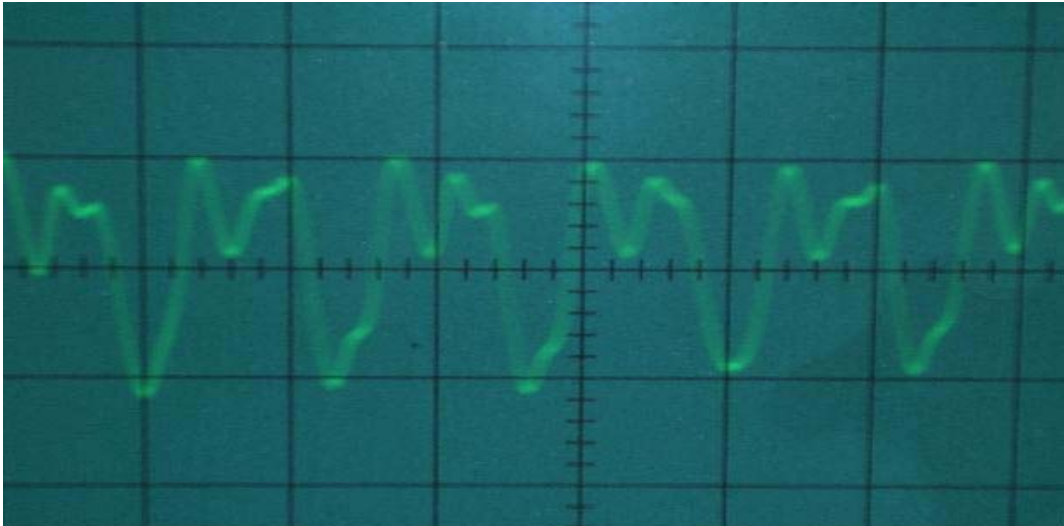
名稱	指 向 樣 式	集音角度	名稱	指 向 樣 式	集音角度
無指向性		全方向	兩指向性		前面與背面
單一指向性		前半面	線列形		前面約 30°
超心形		前面	拋物面形		前面約 20°以下

附圖

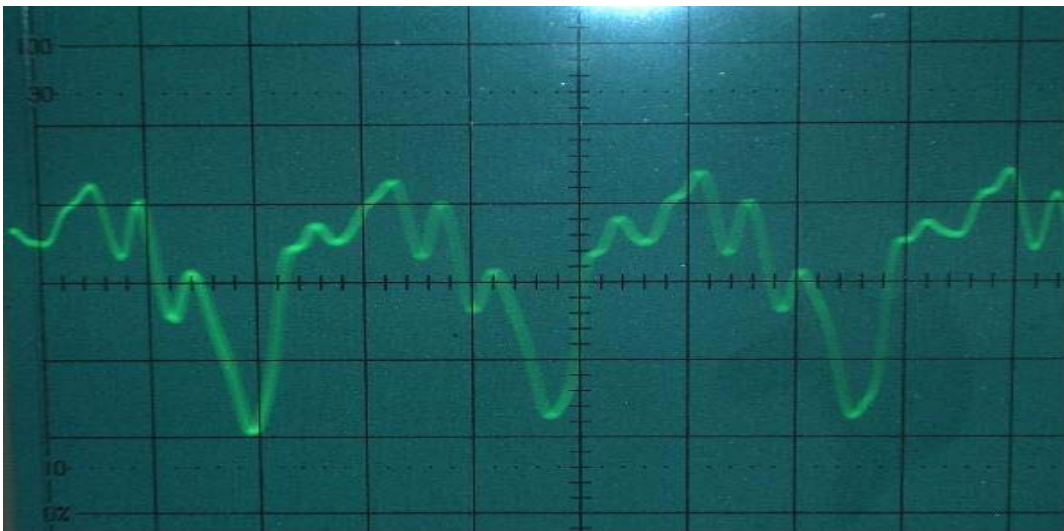
小喇叭波形



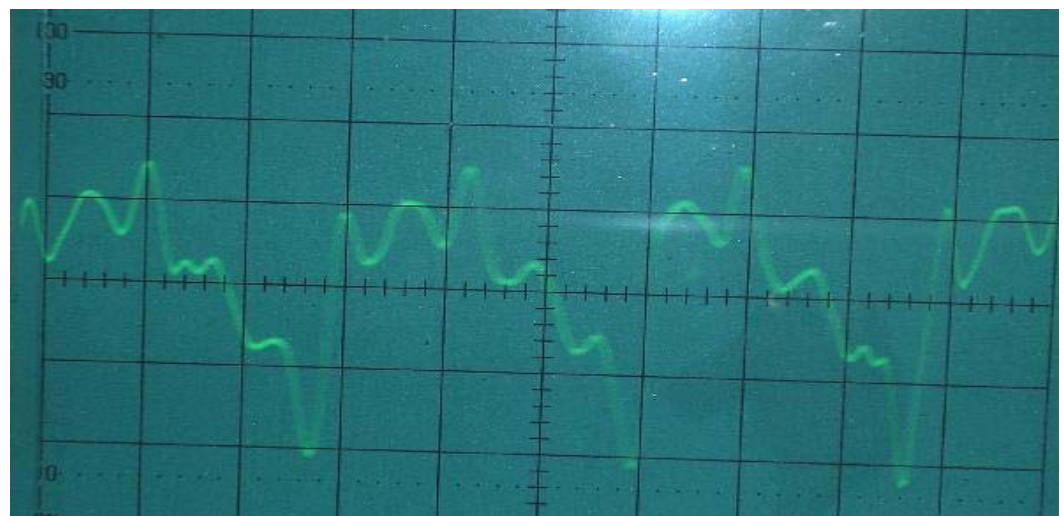
長笛波形



薩克斯風波形



小提琴波形





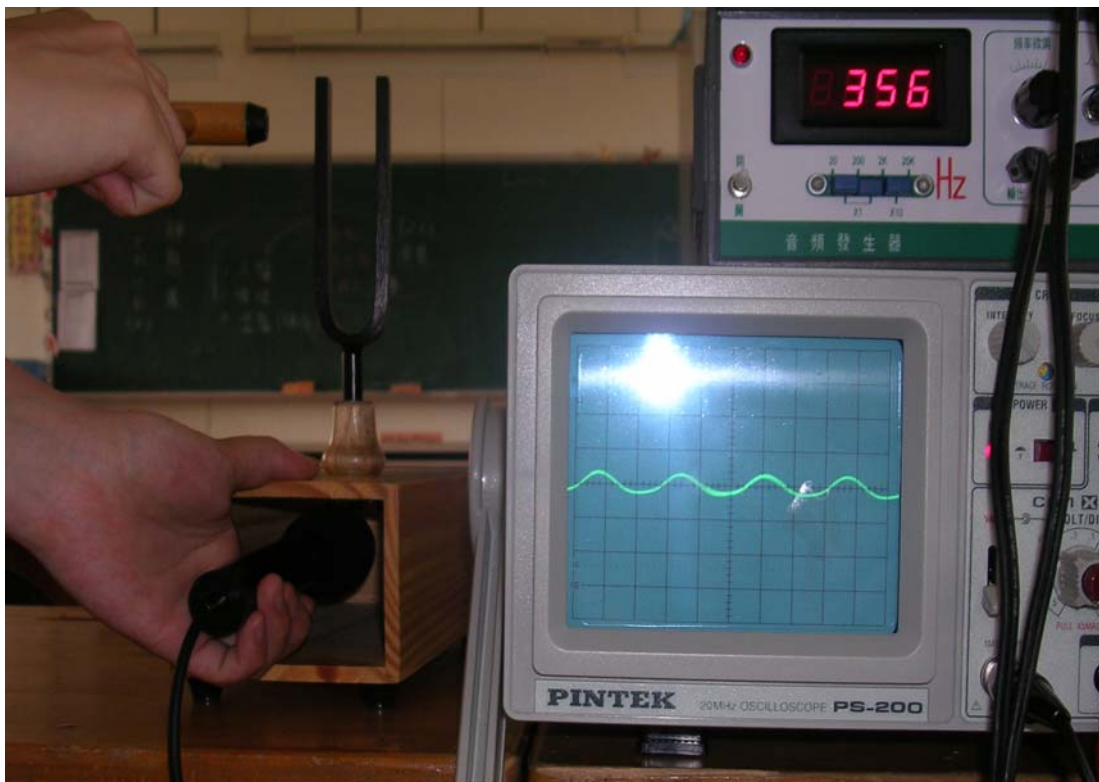
薩克斯風現行加工技術

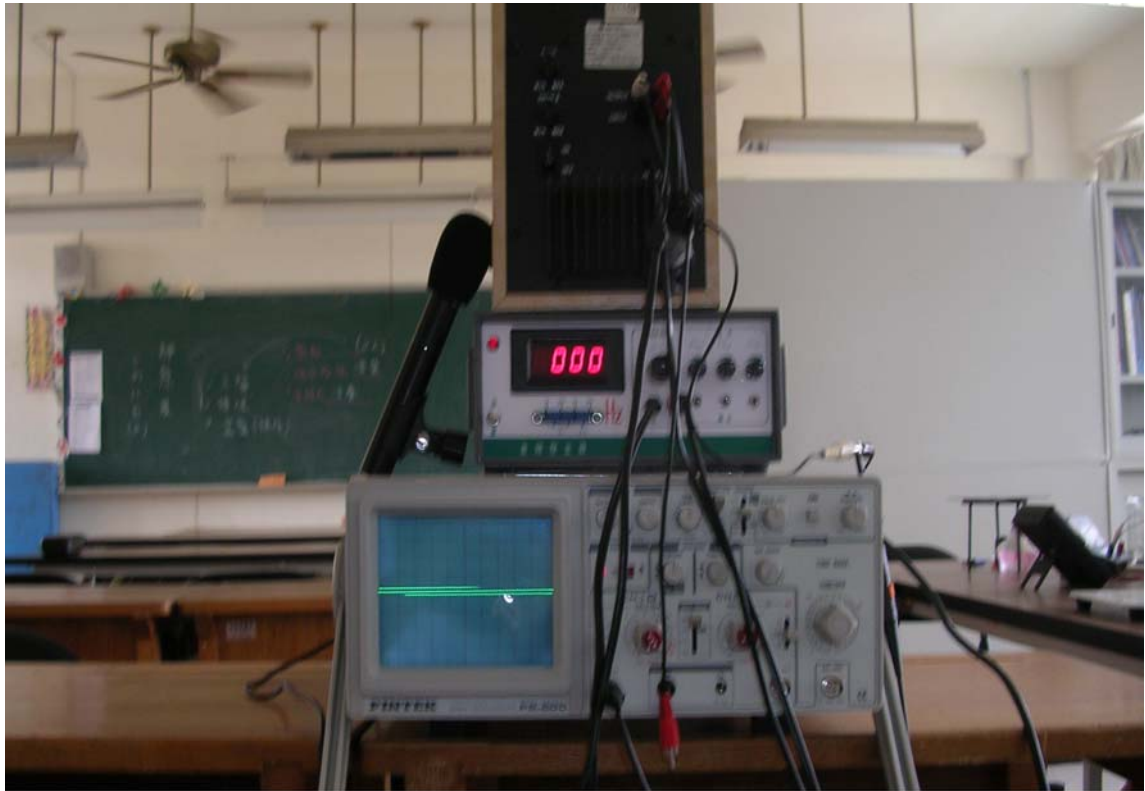






## 實驗情形





# **The Beauty of Sound – An Engineering Approach to Musical Instruments**

**Yu-Jung Lin**



## Introduction

I have learned to play the piano from elementary school and noticed that the pleasant sound is associated with strings. After visiting the saxophone manufacturer, I got to know that frequencies of the musical notes are maintained with the geometric ratio of instrument parts. I wanted to look into the subject and tried to explore the essential concepts of sound, set about to looking for related engineering information of musical note and sound of musical instrument. In Fig. 1, it shows three different sounding musical instruments.



Fig. 1 Musical instruments: (a) Piano, (b) Glockenspiel, (c) Saxophone

## Hypothesis and Engineering Goals

Engineering methods were adopted to study musical acoustics as follows:

1. Study the principal of string instrument sound production and frequency spectrum change by discussing production of standing wave.
2. Develop the mathematical module of temperament as basis of experiment design and verifying the rule of temperament by measuring vibration frequency of instrument.
3. Understand the principal of percussion instrument sound production by measuring frequencies and conducting finite element analysis.

## Theory

1. In 1-dimensional case, the relationship between the vibration frequencies ( $f_1$ ) and string lengths ( $L_1$ ) is the well known equation,

$$f_1 \cdot (L_1) = C_1 \quad (\text{Eq. 1})$$

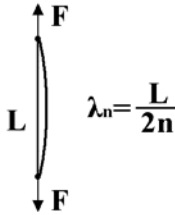
Standing wave in a string is as shown in Fig. 2 together with a more detailed formula.

2. In 2-dimensional case, a model of the plate is as shown in Fig. 3. There is a complicate equation related the frequency of the vibrated plate to the geometrical dimension of the plate. For a good approximation, if values of the thickness and width of the plates are fixed, then the product of vibration frequency and square of the plate length would equal to a constant as following,

$$f_2 \cdot (L_2)^2 = C_2 \quad (\text{Eq. 2})$$

3. Equal temperament defines frequency ratio of adjacent two tones, high to low, be 1.0595.

For piano there is a range of 88 equal temperament frequencies, for example in an octave sequence of 13 frequencies read as 880, 932, 988, 1047, 1109, 1175, 1245, 1319, 1397, 1480, 1568, 1661, 1760 Hz.

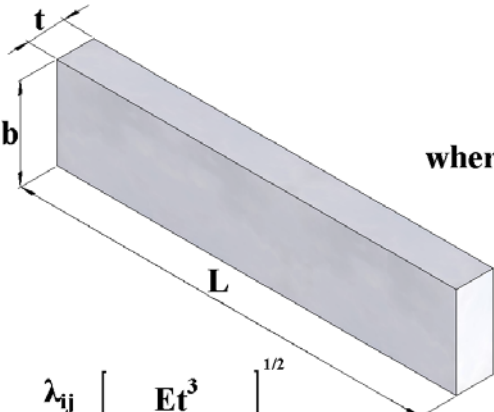


$$\lambda_n = \frac{L}{n}$$

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n=1,2,3,\dots$$

where  $f_1$  : fundamental frequency,  
 $f_2, f_3, \dots, f_n$  : harmonic  
 $F$  : Tension  
 $\mu$  : Mass of unit length  
 $\lambda_n$  : Wavelength

Fig. 2 Frequency formula for string of standing wave



where  $\rho$  : Density,  
 $f_{ij}$  : Natural frequency,  
 $\lambda_{ij}$  : Index of parameter for mode,  
 $\nu$  : Poisson's ratio,  
 $E$  : Young's Modulus

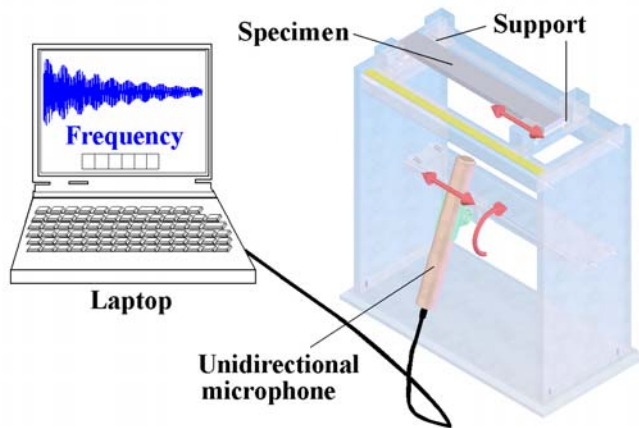
$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{2\pi L^2} \left[ \frac{Et^3}{12\rho t(1-\nu^2)} \right]^{1/2}, \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\dots \\ j=1,2,3,\dots \end{matrix}$$

Fig. 3 Frequency formula for plate in simple supports

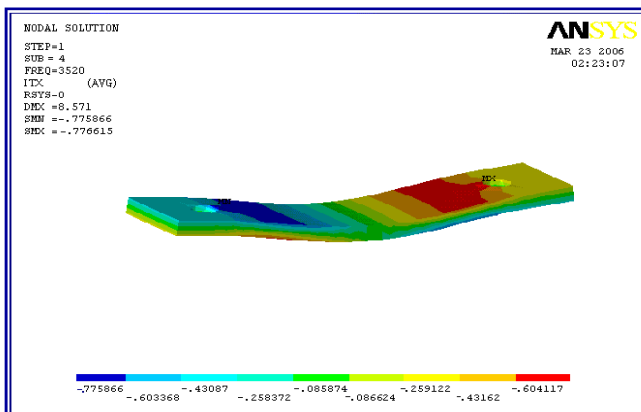
## Methods

1. Frequency data acquisition system used to measure plate vibration frequency is shown in Fig. 4, an unidirectional microphone being connected to a laptop equipped with analyzing software (Simmer Curve).
2. Use ANSYS software to simulate the vibration of glockenspiel, to study the relationship between frequencies and plate dimensions. It was conducted as following: (a) Measure the length, width and thickness of every key of glockenspiel; (b) Establish the mode shape of

imitating key vibration with ANSYS software; (c) Define the mechanical properties of key's material, such as Young's modulus, density, and Poisson's ratio; (d) Generating finite elements model for plate, adding constraints, then analysis. An output of simulation result is as shown in Fig. 5.



**Fig.4 Frequency data acquisition system**



**Fig.5 Numerical simulation of dynamic analysis system**

## Results

1. The relationship of frequency to the key length of the percussion instrument glockenspiel is shown in Fig. 6. It shows that the exponent of the length is 1.9452 instead of 2 as stated in Equation 2. In Table 1, the calculated frequencies from these two equations are compared and it is noted that the frequencies are very sensitive to the exponent value, it shifts almost two tones.
2. Results of numerical simulation of dynamic analysis system are shown in Fig. 5 and 7, the plate being vibrated in the length dimension, however, a detailed analysis of the data output showing several frequencies excited as listed in Table 2.

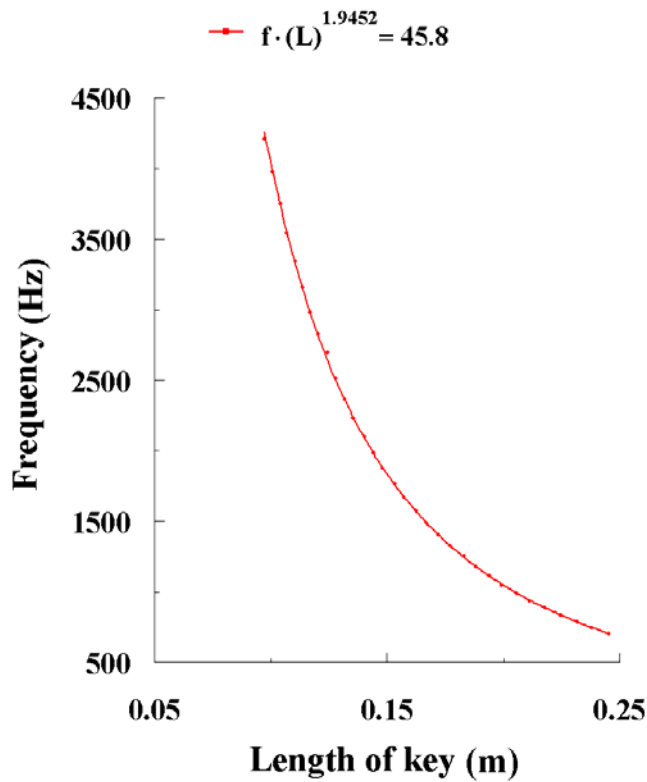


Fig. 6 Relationship between frequency and key length of glockenspiel

Table 1 Frequencies calculated from two different formulas

formula	L(m)	f(Hz)
$f \cdot (L)^{1.9452} = 45.5$	0.100	4010
	0.141	2044
	0.241	722
$f \cdot (L)^2 = 45.5$	0.100	4550
	0.141	2276
	0.241	781

Table 2 Frequency of glockenspiel keys by ANSYS software, Hz

Length	f <sub>7</sub>	f <sub>8</sub>	f <sub>9</sub>	f <sub>10</sub>
0.245(m)	698.5	1869.3	2250.2	3181.3
0.218(m)	880.0	2337.9	2800.4	3561.3
0.154(m)	1760.7	4522.2	4980.7	5275.7
0.106(m)	3520.9	6962.4	8615.1	9365.5

Material:aluminum, width:0.028(m), thickness:0.008(m)  
 Note:f<sub>1</sub> ~ f<sub>6</sub> equal to zero

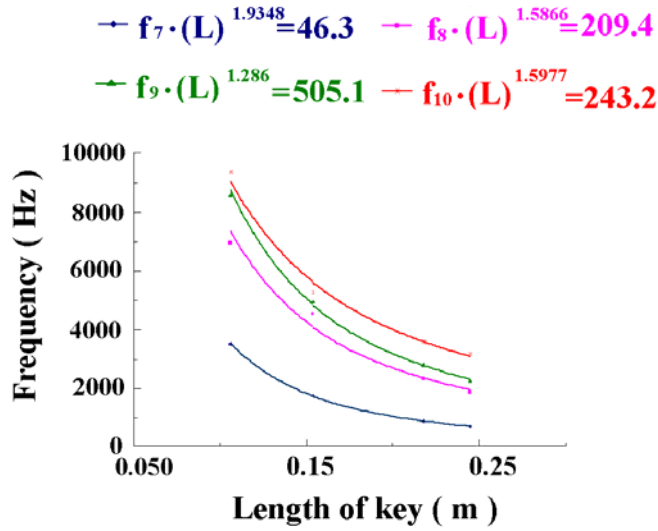


Fig.7 Relationship between frequency and length, data taken from Table 2

## Discussion

1. The design of glockenspiel relies on the dimensions of plates and its material constants as shown in Figure 3. For fixed values of width and thickness, the formula is  $f_i \times L_i^{1.9452} = \text{constant}$ , as shown in Fig. 6. In order to explore the universal of this equation, two sets of plate manufactured from aluminum and copper were tested, as shown in Fig. 8. The results are shown in Fig. 9 and the formula  $f_i \times L_i^{1.9471} = \text{constant}$  is holding true, but different materials have a different value of constant.
2. Measuring the frequencies, I have tried to hang it with rubber band and put on a sponge under the plate to support it, but the response is not good enough. Then using a rubber pad from glockenspiel rail, the experiment result is improved. The fixing method of glockenspiel key is similar to a simple support, the locations of plate supports are critical to the frequencies which generated from the plate vibration. A final model of testing set-up as shown in Fig. 4 provides a better supporting method.

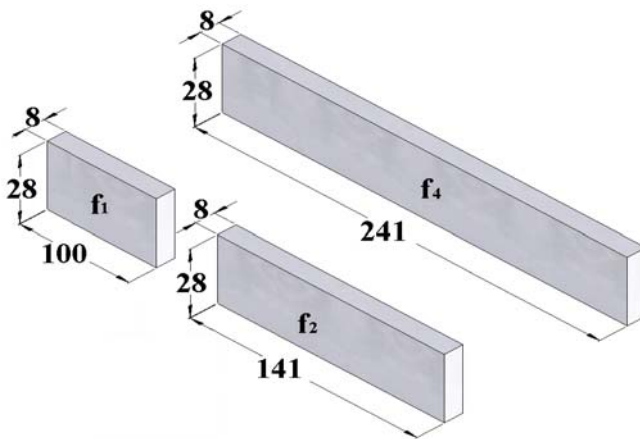
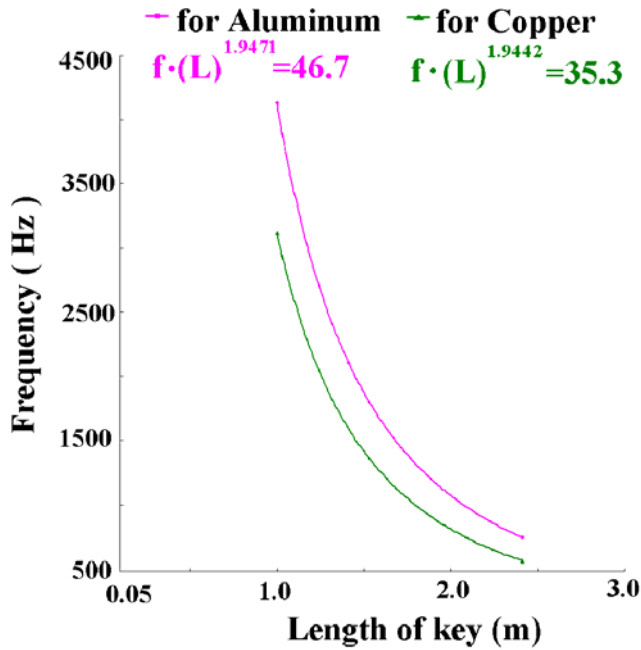


Fig. 8 Dimensions of plates for testing the natural frequency, unit in mm.



**Fig. 9 Relationship between frequencies and lengths of plates of different materials**

## Conclusions

1. The design theory for musical instrument like glockenspiel relies on the dimensions of plates and its material constants, a formula  $f_i \times L_i^n = \text{constant}$  is established in this study, exponent  $n$  with a value of 1.9452.
2. Method and locations to support the vibrated plate is also an essential subject for the percussion instruments, improper supporting will resulted in the generation of several frequencies which are non-harmonic modes.

## Applications

The formula  $f_i \times L_i^n = \text{constant}$ , the relationship between frequency and length of plates, can be used to fabricate a glockenspiel and to tune the lengths of key-set to the right frequencies accurately and easily.

## References

1. Paul G. Hewitt, 1999, Conceptual Physics – The High School Program, Addison Wesley Longman, Inc.
2. R. D. Blevin, 1995, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Krieger Publishing Company, New York, pp. 233-290.
3. S. Ilanko, 2003, Comments on “On the eigenfrequencies of a two-part beam-mass system”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, pp. 909-910.

- 4. [www.vsl.co.at/en-us/70/3196/3204/3208/576.vsl](http://www.vsl.co.at/en-us/70/3196/3204/3208/576.vsl), Vienna Symphonic library.**
- 5. S. Moaveni, 2003, Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS, Pearson Education, New Jersey.**

## 評語

本作品利用科學工具分析鐘琴等樂器頻率與其尺寸的關係，並以電腦軟體做為輔助分析的工具，本作品具科學研究的精神，而其思考程序與作品的完整性亦佳，是一件優良作品。在鐘琴的部分應有進一步更完善的空間。