臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　別　：數學科

作 品 名 稱　：約瑟夫數列(Josephus Series)

得 獎 獎 項　：佳作

學校 / 作者：　臺北縣立江翠國民中學　葉佩雯

作者簡介

葉佩雯是父母給我的名字，目前就讀台北縣立江翠國中一年級。

人生就是一群偶然的聯集。就因為是偶然，佩雯能在台北縣大同國小和數學相遇、相知、相戀，甚至於結下終生情緣。也因為是偶然，佩雯能珍惜著能和數學相處，不論是過去、現在及未來，都會懷念這一段段遨遊數學學海的時光。

約瑟夫數列一直是數學科學展覽的名題。很感謝，讓佩雯有機會從國小就能認識及思考「報數問題」；並解決了 n 個數排成一環狀，從頭開始，殺 α（個數）留 β（個數），則倒數第 k 個留下的數會是多少？

當然，這一段過程中是碰上許多困難和挫折，但是，真的要感謝家人鼓勵與支持，讓佩雯成長了不少，也讓佩雯能自己有機會自己動腦筋、思考問題，汲取經驗。

父母賜與生命，數學賜與生命光采，生命與數學，佩雯都珍惜著。

目錄　　起始頁

壹、摘要　3
　一、英文摘要(Abstract)　3
　二、中文摘要　4
貳、前言　5
　一、研究動機　5
　二、研究目的　5
　三、名詞定義　5
　四、文獻探討　13
參、研究方法或過程　13
肆、研究結果與討論　14
　一、$\beta=1$　14
　　(一)、$\alpha=1$　14
　　(二)、$\alpha=2$　16
　　(三)、$\alpha=3$　18
　　(四)、$\alpha=g$　21
　二、$\beta=2$　22
　　(一)、$\alpha=1$　22
　　(二)、$\alpha=2$　24
　　(三)、$\alpha=3$　26
　　(四)、$\alpha=g$　29
　三、$\beta=3$　30
　　(一)、$\alpha=1$　30
　　(二)、$\alpha=2$　32
　　(三)、$\alpha=3$　34
　　(四)、$\alpha=g$　37
　四、$\alpha=g$，$\beta=h$　38
　五、m 之探討　39
　六、第 k 個淘汰與倒數第 k 個留下　40
　七、可行性分析　42
伍、結論與應用　43
陸、參考文獻　44

約瑟夫數列

壹、摘要

一、英文摘要(Abstract)

Joseph Sequence is the problem that discussed the situation of eliminating1 and retaining1 in the circle formed by n people.
Joseph Sequence has appeared a number of times in National Elementary School and Middle School Science Fair in Taiwan (as shown in the table below).
Past national science fairs and researches on Joseph Sequence

Term	Group	Project name
39	Elementary school	How does the princess save the prince
40	Middle school	The secret of natural-born winner
43	High school	A narrow escape from death
44	High school	Princess' decision
44	High school	Survival
44	Elementary school	The successor of the throne
45	Elementary school	Problems unsolved by teachers

The publications，The Art of Programing，CONCRETE MATHEMATICS ，by the expert of mathematical calculation in the IT industry，Donlad E. Knuth，has provided detailed explanation on it. However, all of those only discussed eliminating 1 and retaining β or eliminating α and retaining 1.

The researcher proposed "Problems unsolved by teachers" in the national competition, and discussed the situation of eliminating α and retaining β in the circle formed by n people.
This study continued the summer project of 2005, and conducted research on the question of when is the last k^{th} person eliminated in a circle formed by n people. In the paper, α, β, n and k were independent variables and the research process was as follows:

1. Direct observation: the series shows equal difference in each cycle.
2. Classification: to search the pattern of the series based on $c_{\alpha,n}$classification.
3. Use the end number of each cycle to obtain the pattern.
4. Reverse induction: use the equal difference of each cycle to induce when the k^{th} person would be eliminated.

二、中文摘要 約瑟夫數列

所謂約瑟夫數列，就是有 n 個數排成一環狀，從頭開始，殺 1(個數)留 1(個數)，求倒數第 k 個留下的數會是多少？

約瑟夫數列在台灣的全國中小學科學展覽出現多次（如下表）。

全國科學展覽與本題類似的作品

屆數	組別	作品名稱	研究結果	比較
39	國小組	公主如何救王子	任意 n 個人，排成環狀，殺 1 留 β，最後留下的位置	如本題殺 1 留 β，k=1
40	國中組	天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討	任意 n 個人，排成環狀，殺 α 留 1 及殺 α 留 α，最後留下的位置	如本題殺 α 留 1，k=1
43	高中組	九死一生	任意 n 個人，排成環狀，殺 α 留 1 及殺 α 留 α，最後留下的位置	如本題殺 α 留 1 及殺 α 留 α，k=1
44	高中組	公主的抉擇	任意 n 個人，排成環狀，殺 1 留 u-1，最後留下的位置	如本題殺 1 留 β，k=1
44	高中組	我要活下去	任意 n 個人，排成環狀，殺 α 留 1 及殺 α 留 α，最後留下的位置	如本題殺 α 留 1 及殺 α 留 α，k=1
44	國小組	王位繼承人	任意 n 個人，排成環狀，報 x 留 y，最後留下的位置	如本題殺 α 留 1，k=1

資訊界演算法大師 Donlad E. Knuth 在其著作 The Art of Programing，CONCRETE MATHEMATICS，也針對該數列作詳細的說明。唯，不論是歷屆科學展覽或是大師的著作，對於該數列，都只是談及殺 1 留 β 或是殺 α 留 1。

筆者則在 2005 年暑假，曾經提交於全國國小組比賽作品「老師無法解決的難題」討論到 n 個人排成一圈經過殺 α 留 β，最後留下來的情形。

本研究是將 α、β、k 和 n 作為變數，求：當有 n 個數排成一環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，則倒數第 k 個留下的數會是多少？

需符合 α、β、k、n 皆 $\in \mathbb{N}$，且 $n \geqq k$

1.直觀觀察:發現在每一個循環中，當 n 等差 α 時，$A_{\alpha,\beta,n,k}$ 則等差 $\alpha+\beta$、n- $A_{\alpha,\beta,n,k}$ 則等差 β。

2.分類:將其分類為 $c_{\alpha,n}$，使當中有規律可求。

3.循環觀察:發現每個循環的尾數 n- $A_{\alpha,\beta,n,k}$ 都小於 β。

4.循環尾數:設計公式求出每個循環節的尾數 n、留下數 $A_{\alpha,\beta,n,k}$ 及 n-$A_{\alpha,\beta,n,k}$。

5.倒推:由與循環節中有等差的性質，則可以由循環節的尾數，推論出循環節中的任意一數。

貳、前言

一、研究動機

資訊界演算法大師 Donlad E. Knuth 在其著作 The Art of Programing，CONCRETE MATHEMATICS，也針對該數列作詳細的說明。唯，不論是歷屆科學展覽或是大師的著作，對於該數列，都只是談及殺 1 留 β 或是殺 α 留 1。而，本研究作者則在 2005 年暑假，提升討論之水準，以創新的手法（獲台北縣最佳創意獎），討論 n 個人排成一圈經過殺 α 留 β，最後留下來的情形，提交於全國科展國小組比賽作品「老師無法解決的難題」。

筆者在去年全國科展時，看到了一題新竹縣小朋友所做的研究，也是在研究約瑟夫數列的！他們雖然只做到殺 1 留 β，但卻有一項條件是任意第 k 個淘汰，也就因為這樣，使筆者有了第 k 個的想法。

二、研究目的

有任意 n 個數排成環狀，從頭開始，殺 α 留 β，求倒數第 k 個留下的數，也可以說是第 n+1-k 個淘汰的數。

三、名詞定義

本篇的名詞定義如下表

符號	用意	定義
α	殺 α 留 β 之中的 α	$\alpha \in N$
β	殺 α 留 β 之中的 β	$\beta \in N$
n	其中有 n 個數排成一環狀	$n \in N$
k	求 n 個數中，倒數第 k 個留下來的數，也是第 n+1-k 個淘汰的數。	$k \leqq n$，$k \in N$
$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{\alpha,\beta,n,k}$ 設為殺 g 留 h，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數	
$c_{\alpha,n}$	使之分類為 α 組。	$c_{\alpha,n}=\mathrm{mod}(n-1,\alpha)+1$
$y_{\alpha,c}$		設 $\mathrm{mod}(y_{\alpha,c}-1,\alpha)+1=c_{\alpha,n}$ 其中 $y_{\alpha,c} \geqq k > y_{\alpha,c}-\alpha$
$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	求出第一個 $F_{\alpha,\beta,c,k}$ 值	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}= y_{g,c}+\alpha[\frac{k-1}{\beta}]$
$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	求出第一個 $b_{\alpha,\beta,c,k}$ 值	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}=\mathrm{mod}(k-1,\beta)$
m	由 $F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}$，由 $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}$	依據 $F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ 及 $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ 而做改變
$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	當殺 α 留 β，n=p 時， 若 $(p-A_{\alpha,\beta,p,k})<\beta$： 設 p 為 $F_{\alpha,\beta,c,k}$ 值 x: 第 x 個 $F_{\alpha,\beta,c,k}$ 值	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}=3(m+1)-b(x)_{\alpha,\beta,c,k}+b(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}$ $F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}=(\alpha+\beta)(m+1)-b(x)_{\alpha,\beta,c,k}+b(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}$ 若 $m+1 \notin N$： $F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}=F(x)_{\alpha,\beta,c,k}+3$
$b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	當殺 α 留 β，n=p 時， 若 $(p-A_{\alpha,\beta,p,k})<\beta$： 設 $(p-A_{\alpha,\beta,p,k})$ 為 $b_{\alpha,\beta,c,k}$ 值 x: 第 x 個 $b_{\alpha,\beta,c,k}$ 值	

分頁式的名詞定義如下表

頁碼	符號	表示	定義	意義
14	α	1		殺 1
	β	1		留 1
	n	n	$n \in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k \leqq n$ (2)$k \in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{1,1,n,k}$		$A_{1,1,n,k}$:設為殺 1 留 1，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{1,n}$	$c_{1,n}=mod(n-1,1)+1$	(1)使之分類為 1 組。 (2)不設 $c_{1,n}=mod(n,1)$ 的理由是不想使 $c_{1,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{1,c}$	設 $mod(y_{1,c}-1,1)+1=c_{1,n}$ 其中 $y_{1,c} \geqq k > y_{1,c}-1$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{1,1,c,k}$	$F(1)_{1,1,c,k}=y_{1,c}+1[\frac{k-1}{1}]$	求出第一個 $F_{1,1,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{1,1,c,k}$	$b(1)_{1,1,c,k}=mod(k-1,1)$	求出第一個 $b_{1,1,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{1,1,c,k}$ 及 $b(x)_{1,1,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{1,1,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{1,1,c,k}$，由 $b(x)_{1,1,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{1,1,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{1,1,c,k}$ $b(x)_{1,1,c,k}$	$F(x)_{1,1,c,k}=1(m+1)$ $F(x+1)_{1,1,c,k}=(1+1)(m+1)$ 若 $m+1 \notin N$: $F(x+1)_{1,1,c,k}=F(x)_{1,1,c,k}+1$	設 n=p，當$(p-A_{1,1,p,k})=0$ 時: (1)設 p 為 $F_{1,1,c,k}$ 值 (2)設$(p-A_{\alpha,\beta,p,k})$為 $b_{1,1,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{1,1,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{1,1,c,k}$ 值
16	α	2		殺 2
	β	1		留 1
	n	n	$n \in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k \leqq n$ (2) $k \in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{2,1,n,k}$		$A_{2,1,n,k}$:設為殺 2 留 1，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{2,n}$	$c_{2,n}=mod(n-1,2)+1$	(1)使之分類為 2 組。 (2)不設 $c_{2,n}=mod(n,2)$ 的理由是不想使 $c_{2,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{2,c}$	設 $mod(y_{2,c}-1,2)+1=c_{2,n}$ 其中 $y_{2,c} \geqq k > y_{2,c}-2$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{2,1,c,k}$	$F(1)_{2,1,c,k}=y_{2,c}+2[\frac{k-1}{1}]$	求出第一個 $F_{2,1,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{2,1,c,k}$	$b(1)_{2,1,c,k}=mod(k-1,1)$	求出第一個 $b_{2,1,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{2,1,c,k}$ 及 $b(x)_{2,1,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{2,1,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{2,1,c,k}$，由 $b(x)_{2,1,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{2,1,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{2,1,c,k}$ $b(x)_{2,1,c,k}$	$F(x)_{2,1,c,k}=1(m+1)$ $F(x+1)_{2,1,c,k}=(2+1)(m+1)$	設 n=p，當$(p-A_{2,1,p,k})=0$ 時: (1)設 p 為 $F_{2,1,c,k}$ 值

			若 m+1∉N: $F(x+1)_{2,1,c,k}=F(x)_{2,1,c,k}+2$	(2)設$(p-A_{2,1,p,k})$為 $b_{2,1,c,k}$ 值 x: 第 x 個 $F_{2,1,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{2,1,c,k}$ 值
18	α	3		殺 3
	β	1		留 1
	n	n	$n \in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k \leqq n$ (2)$k \in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{3,1,n,k}$		$A_{3,1,n,k}$:設為殺 3 留 1，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{3,n}$	$c_{3,n}=mod(n-1,3)+1$	(1)使之分類為 3 組。 (2)不設 $c_{3,n}=mod(n,3)$的理由是不想使 $c_{3,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{3,c}$	設 $mod(y_{3,c}-1,3)+1=c_{3,n}$ 其中 $y_{3,c} \geqq k > y_{3,c}-3$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{3,1,c,k}$	$F(1)_{3,1,c,k}=y_{3,c}+3[\frac{k-1}{1}]$	求出第一個 $F_{3,1,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{3,1,c,k}$	$b(1)_{3,1,c,k}=mod(k-1,1)$	求出第一個 $b_{3,1,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{3,1,c,k}$ 及 $b(x)_{3,1,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{3,1,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{3,1,c,k}$，由 $b(x)_{3,1,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{3,1,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{3,1,c,k}$ $b(x)_{3,1,c,k}$	$F(x)_{3,1,c,k}=1(m+1)$ $F(x+1)_{3,1,c,k}=(3+1)(m+1)$ 若 m+1∉N: $F(x+1)_{3,1,c,k}=F(x)_{3,1,c,k}+3$	設 n=p，當$(p-A_{3,1,p,k})=0$ 時: (1)設 p 為 $F_{3,1,c,k}$ 值 (2)設$(p-A_{3,1,p,k})$為 $b_{3,1,c,k}$ 值 x: 第 x 個 $F_{3,1,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{3,1,c,k}$ 值
21	α	g	$g \in N$	殺 g
	β	1		留 1
	n	n	$n \in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k \leqq n$ (2)$k \in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{g,1,n,k}$		$A_{g,1,n,k}$:設為殺 g 留 1，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{g,n}$	$c_{g,n}=mod(n-1, g)+1$	(1)使之分類為 g 組。 (2)不設 $c_{g,n}=mod(n,g)$的理由是不想使 $c_{g,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{g,c}$	設 $mod(y_{g,c}-1,g)+1=c_{g,n}$ 其中 $y_{g,c} \geqq k > y_{g,c}-g$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{g,1,c,k}$	$F(1)_{g,1,c,k}=y_{g,c}+g[\frac{k-1}{1}]$	求出第一個 $F_{g,1,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{g,1,c,k}$	$b(1)_{g,1,c,k}=mod(k-1,1)$	求出第一個 $b_{g,1,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{g,1,c,k}$ 及 $b(x)_{g,1,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{g,1,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{g,1,c,k}$，由 $b(x)_{g,1,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{g,1,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{g,1,c,k}$	$F(x)_{g,1,c,k}=1(m+1)$	設 n=p，當$(p-A_{g,1,p,k})=0$ 時:

	$b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(x)_{g,1,c,k}$	$F(x+1)_{g,1,c,k}=(g+1)(m+1)$ 若 $m+1\notin N$: $F(x+1)_{g,1,c,k}=F(x)_{g,1,c,k}+g$	(1)設 p 為 $F_{g,1,c,k}$ 值 (2)設$(p-A_{g,1,p,k})$為 $b_{g,1,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{g,1,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{g,1,c,k}$ 值
22	α	1		殺 1
	β	2		留 2
	n	n	$n\in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k\leqq n$ (2)$k\in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{1,2,n,k}$		$A_{1,2,n,k}$:設為殺 1 留 2，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{1,n}$	$c_{1,n}=mod(n-1,1)+1$	(1)使之分類為 1 組。 (2)不設 $c_{1,n}=mod(n,1)$的理由是不想使 $c_{1,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{1,c}$	設 $mod(y_{1,c}-1,1)+1=c_{1,n}$ 其中 $y_{1,c}\geqq k>y_{1,c}-1$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{1,2,c,k}$	$F(1)_{1,2,c,k}=y_{1,c}+1[\frac{k-1}{2}]$	求出第一個 $F_{1,2,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{1,2,c,k}$	$b(1)_{1,2,c,k}=mod(k-1,2)$	求出第一個 $b_{1,2,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{1,2,c,k}$ 及 $b(x)_{1,1,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{1,2,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{1,2,c,k}$，由 $b(x)_{1,2,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{1,2,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{1,2,c,k}$ $b(x)_{1,2,c,k}$	$F(x)_{1,2,c,k}=2(m+1)$ $-b(x)_{1,2,c,k}+b(x+1)_{1,2,c,k}$ $F(x+1)_{1,2,c,k}=(1+2)(m+1)$ $-b(x)_{1,2,c,k}+b(x+1)_{1,2,c,k}$ 若 $m+1\notin N$: $F(x+1)_{1,2,c,k}=F(x)_{1,2,c,k}+1$	設 n=p，當$(p-A_{1,2,p,k})<2$ 時: (1)設 p 為 $F_{1,2,c,k}$ 值 (2)設$(p-A_{1,2,p,k})$為 $b_{1,2,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{1,2,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{1,2,c,k}$ 值
24	α	2		殺 2
	β	2		留 2
	n	n	$n\in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k\leqq n$ (2)$k\in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{2,2,n,k}$		$A_{2,2,n,k}$:設為殺 2 留 2，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{2,n}$	$c_{2,n}=mod(n-1,2)+1$	(1)使之分類為 2。 (2) 不設 $c_{2,n}=mod(n,2)$的理由是不想使 $c_{2,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{2,c}$	設 $mod(y_{2,c}-1,2)+1=c_{2,n}$ 其中 $y_{2,c}\geqq k>y_{2,c}-2$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{2,2,c,k}$	$F(1)_{2,2,c,k}=y_{2,c}+2[\frac{k-1}{2}]$	求出第一個 $F_{2,2,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{2,2,c,k}$	$b(1)_{2,2,c,k}=mod(k-1,2)$	求出第一個 $b_{2,2,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{2,2,c,k}$ 及 $b(x)_{2,2,c,k}$	由 $F(x)_{2,2,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{2,2,c,k}$，

			而做改變	由 $b(x)_{2,2,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{2,2,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{2,2,c,k}$ $b(x)_{2,2,c,k}$	$F(x)_{2,2,c,k}=2(m+1)$ $-b(x)_{2,2,c,k}+b(x+1)_{2,2,c,k}$ $F(x+1)_{2,2,c,k}=(2+2)(m+1)$ $-b(x)_{2,2,c,k}+b(x+1)_{2,2,c,k}$ 若 $m+1\notin N$: $F(x+1)_{2,2,c,k}=F(x)_{2,2,c,k}+2$	設 $n=p$，當 $(p-A_{2,2,p,k})<2$ 時: (1)設 p 為 $F_{2,2,c,k}$ 值 (2)設 $(p-A_{2,2,p,k})$ 為 $b_{2,2,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{2,2,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{2,2,c,k}$ 值
26	α	3		殺 3
	β	2		留 2
	n	n	$n\in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1) $k\leqq n$ (2) $k\in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{3,2,n,k}$		$A_{3,2,n,k}$:設為殺 3 留 2，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{3,n}$	$c_{3,n}=mod(n-1,3)+1$	(1)使之分類為 3 組。 (2)不設 $c_{3,n}=mod(n,3)$ 的理由是不想使 $c_{3,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{3,c}$	設 $mod(y_{3,c}-1,3)+1=c_{3,n}$ 其中 $y_{3,c}\geqq k>y_{3,c}-3$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{3,2,c,k}$	$F(1)_{3,2,c,k}=y_{3,c}+3[\frac{k-1}{2}]$	求出第一個 $F_{3,2,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{3,2,c,k}$	$b(1)_{3,2,c,k}=mod(k-1,2)$	求出第一個 $b_{3,2,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{3,2,c,k}$ 及 $b(x)_{3,2,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{3,2,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{3,2,c,k}$，由 $b(x)_{3,2,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{3,2,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{3,2,c,k}$ $b(x)_{3,2,c,k}$	$F(x)_{3,2,c,k}=2(m+1)$ $-b(x)_{3,2,c,k}+b(x+1)_{3,2,c,k}$ $F(x+1)_{2,2,c,k}=(3+2)(m+1)$ $-b(x)_{3,2,c,k}+b(x+1)_{3,2,c,k}$ 若 $m+1\notin N$: $F(x+1)_{3,2,c,k}=F(x)_{3,2,c,k}+3$	設 $n=p$，當 $(p-A_{3,2,p,k})<2$ 時: (1)設 p 為 $F_{3,2,c,k}$ 值 (2)設 $(p-A_{3,2,p,k})$ 為 $b_{3,2,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{3,2,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{3,2,c,k}$ 值
29	α	g	$g\in N$	殺 g
	β	2		留 2
	n	n	$n\in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1) $k\leqq n$ (2) $k\in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{g,2,n,k}$		$A_{g,2,n,k}$:設為殺 g 留 2，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{g,n}$	$c_{g,n}=mod(n-1,g)+1$	(1)使之分類為 g 組。 (2)不設 $c_{g,n}=mod(n,g)$ 的理由是不想使 $c_{g,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{g,c}$	設 $mod(y_{g,c}-1,g)+1=c_{g,n}$ 其中 $y_{g,c}\geqq k>y_{g,c}-g$	

	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{g,2,c,k}$	$F(1)_{g,2,c,k}=y_{g,c}+g[\frac{k-1}{2}]$	求出第一個 $F_{g,2,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{g,2,c,k}$	$b(1)_{g,2,c,k}=mod(k-1,2)$	求出第一個 $b_{g,2,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{g,2,c,k}$ 及 $b(x)_{g,2,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{g,2,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{g,2,c,k}$，由 $b(x)_{g,2,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{g,2,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{g,2,c,k}$ $b(x)_{g,2,c,k}$	$F(x)_{g,2,c,k}=2(m+1)$ $-b(x)_{g,2,c,k}+b(x+1)_{g,2,c,k}$ $F(x+1)_{g,2,c,k}=(g+2)(m+1)$ $-b(x)_{g,2,c,k}+b(x+1)_{g,2,c,k}$ 若 $m+1\notin N$: $F(x+1)_{g,2,c,k}=F(x)_{g,2,c,k}+g$	設 n=p，當 $(p-A_{g,2,p,k})<2$ 時: (1)設 p 為 $F_{g,2,c,k}$ 值 (2)設 $(p-A_{g,2,p,k})$ 為 $b_{g,2,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{g,2,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{g,2,c,k}$ 值
30	α	1		殺 1
	β	3		留 3
	n	n	$n\in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k\leqq n$ (2)$k\in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{1,3,n,k}$		$A_{1,3,n,k}$:設為殺 1 留 3，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{1,n}$	$C_{1,n}=mod(n-1,1)+1$	(1)使之分類為 1 組。 (2)不設 $c_{1,n}=mod(n,1)$ 的理由是不想使 $c_{1,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{1,c}$	設 $mod(y_{1,c}-1,1)+1=c_{1,n}$ 其中 $y_{1,c}\geqq k>y_{1,c}-1$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{1,3,c,k}$	$F(1)_{1,3,c,k}=y_{1,c}+1[\frac{k-1}{3}]$	求出第一個 $F_{1,3,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{1,3,c,k}$	$b(1)_{1,3,c,k}=mod(k-1,3)$	求出第一個 $b_{1,3,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{1,3,c,k}$ 及 $b(x)_{1,3,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{1,3,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{1,3,c,k}$，由 $b(x)_{1,3,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{1,3,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{1,3,c,k}$ $b(x)_{1,3,c,k}$	$F(x)_{1,3,c,k}=3(m+1)$ $-b(x)_{1,3,c,k}+b(x+1)_{1,3,c,k}$ $F(x+1)_{1,3,c,k}=(1+3)(m+1)$ $-b(x)_{1,3,c,k}+b(x+1)_{1,3,c,k}$ 若 $m+1\notin N$: $F(x+1)_{1,3,c,k}=F(x)_{1,3,c,k}+1$	設 n=p，當 $(p-A_{1,3,p,k})<3$ 時: (1)設 p 為 $F_{1,3,c,k}$ 值 (2)設 $(p-A_{1,3,p,k})$ 為 $b_{1,3,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{1,3,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{1,3,c,k}$ 值
32	α	2		殺 2
	β	3		留 3
	n	n	$n\in N$	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)$k\leqq n$ (2)$k\in N$	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{2,3,n,k}$		$A_{2,3,n,k}$:設為殺 2 留 3，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數

	$c_{\alpha,n}$	$c_{2,n}$	$c_{2,n}$=mod(n-1,2)+1	(1)使之分類為 2 組。 (2)不設 $c_{2,n}$=mod(n,2)的理由是不想使 $c_{2,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{2,c}$	設 mod($y_{2,c}$-1,2)+1=$c_{2,n}$ 其中 $y_{2,c} \geqq k > y_{2,c}-2$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{2,3,c,k}$	$F(1)_{2,3,c,k}=y_{2,c}+2[\frac{k-1}{3}]$	求出第一個 $F_{2,3,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{2,3,c,k}$	$b(1)_{2,3,c,k}$ =mod(k-1,3)	求出第一個 $b_{2,3,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{2,3,c,k}$ 及 $b(x)_{2,3,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{2,3,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{2,3,c,k}$，由 $b(x)_{2,3,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{2,3,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{2,3,c,k}$ $b(x)_{2,3,c,k}$	$F(x)_{2,3,c,k}=3(m+1)$ $-b(x)_{2,3,c,k}+b(x+1)_{2,3,c,k}$ $F(x+1)_{2,3,c,k}=(2+3)(m+1)$ $-b(x)_{2,3,c,k}+b(x+1)_{2,3,c,k}$ 若 $m+1 \notin N$: $F(x+1)_{2,3,c,k}=F(x)_{2,3,c,k}+2$	設 n=p，當(p- $A_{2,3,p,k}$)<3 時: (1)設 p 為 $F_{2,3,c,k}$ 值 (2)設(p- $A_{2,3,p,k}$)為 $b_{2,3,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{2,3,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{2,3,c,k}$ 值
34	α	3		殺 3
	β	3		留 3
	n	n	n∊N	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)k≦n (2)k∈N	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{3,3,n,k}$		$A_{3,3,n,k}$:設為殺 3 留 3，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{3,n}$	$c_{3,n}$=mod(n-1,3)+1	(1)使之分類為 3 組。 (2)不設 $c_{3,n}$=mod(n,3)的理由是不想使 $c_{3,n}=0$
	$y_{\alpha,c}$	$y_{3,c}$	設 mod($y_{3,c}$-1,3)+1=$c_{3,n}$ 其中 $y_{3,c} \geqq k > y_{3,c}-3$	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{3,3,c,k}$	$F(1)_{3,3,c,k}=y_{3,c}+3[\frac{k-1}{3}]$	求出第一個 $F_{3,3,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{3,3,c,k}$	$b(1)_{3,3,c,k}$ =mod(k-1,3)	求出第一個 $b_{3,3,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{3,3,c,k}$ 及 $b(x)_{3,3,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{3,3,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{3,3,c,k}$，由 $b(x)_{3,3,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{3,3,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{3,3,c,k}$ $b(x)_{3,3,c,k}$	$F(x)_{3,3,c,k}=3(m+1)$ $-b(x)_{3,3,c,k}+b(x+1)_{3,3,c,k}$ $F(x+1)_{3,3,c,k}=(3+3)(m+1)$ $-b(x)_{3,3,c,k}+b(x+1)_{3,3,c,k}$ 若 $m+1 \notin N$: $F(x+1)_{3,3,c,k}=F(x)_{3,3,c,k}+3$	設 n=p，當(p- $A_{3,3,p,k}$)<3 時: (1)設 p 為 $F_{3,3,c,k}$ 值 (2)設(p- $A_{3,3,p,k}$)為 $b_{3,3,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{3,3,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{3,3,c,k}$ 值
37	α	g	g∊N	殺 g
	β	3		留 3
	n	n	n∊N	任意 n 個數排成一環狀

	k	k	(1)k≦n (2)k∈N	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{g,3,n,k}$		$A_{g,3,n,k}$:設為殺 g 留 3，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{g,n}$	$c_{g,n}$=mod(n-1, g)+1	(1)使之分類為 g 組。 (2)不設 $c_{g,n}$=mod(n, g)的理由是不想使 $c_{g,n}$=0
	$y_{\alpha,c}$	$y_{g,c}$	設 mod($y_{g,c}$-1,g)+1=$c_{g,n}$ 其中 $y_{g,c}$≧k>$y_{g,c}$-g	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{g,3,c,k}$	$F(1)_{g,3,c,k}=y_{g,c}+g[\frac{k-1}{3}]$	求出第一個 $F_{g,3,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{g,3,c,k}$	$b(1)_{g,3,c,k}$ =mod(k-1,3)	求出第一個 $b_{g,3,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{g,3,c,k}$ 及 $b(x)_{g,3,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{g,3,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{g,3,c,k}$，由 $b(x)_{g,3,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{g,3,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{g,3,c,k}$ $b(x)_{g,3,c,k}$	$F(x)_{g,3,c,k}=3(m+1)$ $-b(x)_{g,3,c,k}+b(x+1)_{g,3,c,k}$ $F(x+1)_{g,3,c,k}=(g+3)(m+1)$ $-b(x)_{g,3,c,k}+b(x+1)_{g,3,c,k}$ 若 m+1∉N: $F(x+1)_{g,3,c,k}=F(x)_{g,3,c,k}+g$	設 n=p，當(p− $A_{g,3,p,k}$)<3 時: (1)設 p 為 $F_{g,3,c,k}$ 值 (2)設(p− $A_{g,3,p,k}$)為 $b_{g,3,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{g,3,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{g,3,c,k}$ 值
38	α	g	g∈N	殺 g
	β	h	h∈N	留 h
	n	n	n∈N	任意 n 個數排成一環狀
	k	k	(1)k≦n (2)k∈N	求倒數第 k 個留下來的數
	$A_{\alpha,\beta,n,k}$	$A_{g,h,n,k}$		$A_{g,h,n,k}$:設為殺 g 留 h，n 個數排成環狀，倒數第 k 個留下的數
	$c_{\alpha,n}$	$c_{g,n}$	$c_{g,n}$=mod(n-1, g)+1	(1)使之分類為 g 組。 (2)不設 $c_{g,n}$=mod(n, g)的理由是不想使 $c_{g,n}$=0
	$y_{\alpha,c}$	$y_{g,c}$	設 mod($y_{g,c}$-1,g)+1=$c_{g,n}$ 其中 $y_{g,c}$≧k>$y_{g,c}$-g	
	$F(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(1)_{g,h,c,k}$	$F(1)_{g,h,c,k}=y_{g,c}+g[\frac{k-1}{h}]$	求出第一個 $F_{g,h,c,k}$ 值
	$b(1)_{\alpha,\beta,c,k}$	$b(1)_{g,h,c,k}$	$b(1)_{g,h,c,k}$ =mod(k-1,h)	求出第一個 $b_{g,h,c,k}$ 值
	m	m	依據 $F(x)_{g,h,c,k}$ 及 $b(x)_{g,h,c,k}$ 而做改變	由 $F(x)_{g,h,c,k}$ 推展 $F(x+1)_{g,h,c,k}$，由 $b(x)_{g,h,c,k}$ 推展 $b(x+1)_{g,h,c,k}$
	$F(x)_{\alpha,\beta,c,k}$ $b(x)_{\alpha,\beta,c,k}$	$F(x)_{g,h,c,k}$ $b(x)_{g,h,c,k}$	$F(x)_{g,h,c,k}=h(m+1)$ $-b(x)_{g,h,c,k}+b(x+1)_{g,h,c,k}$ $F(x+1)_{g,h,c,k}=(g+h)(m+1)$ $-b(x)_{g,h,c,k}+b(x+1)_{g,h,c,k}$ 若 m+1∉N: $F(x+1)_{g,h,c,k}=F(x)_{g,h,c,k}+g$	設 n=p，當(p− $A_{g,h,p,k}$)<h 時: (1)設 p 為 $F_{g,h,c,k}$ 值 (2)設(p− $A_{g,h,p,k}$)為 $b_{g,h,c,k}$ 值 x:第 x 個 $F_{g,h,c,k}$ 值 第 x 個 $b_{g,h,c,k}$ 值

四、文獻探討

(一)、老師無法解決的難題重要結論

殺 g 留 h 公式表，最後一個留下的數字

α值	β值	分類	公式	備註
g	h	$c_{g,n}$	$n-(b+h\times\frac{F(g,h,x+1)-n}{g})$	F(g,h, x+1)≧n> F(g,h,x)

(二)、F 值與 b 值討論

特別討論 F 值及 b 值的原因是,要知道每一個循環節的末數及末數的 b 值,才可以推算出,有 n 個數排成環狀,最後留下的數是多少.只要 F 值或 b 值一出來,答案就會跟著對. 。

α值為 g，β值為 h 時的推理

α值	β值	分類	演算過程
g	h	$c_{g,n}$	F(g, h, x)+ g+gm-t=g+h-b(x)+(g+h)m F(g, h, x)=h-b(x)+b(x+1)+hm =h(m+1)-b(x)+b(x+1) F(g, h, x+1)=h(m+1)-b(x)+b(x+1)+g+gm =(g+h)(m+1)-b(x)+b(x+1)

參、研究方法或過程

一、殺 1 留 1、殺 2 留 1、殺 3 留 1，推算至殺 α 留 1 倒數第 k 個留下的數
二、殺 1 留 2、殺 2 留 2、殺 3 留 2，推算至殺 α 留 2 倒數第 k 個留下的數
三、殺 1 留 3、殺 2 留 3、殺 3 留 3，推算至殺 α 留 3 倒數第 k 個留下的數
四、最後推算至殺 α 留 β 倒數第 k 個留下的數

肆、研究結果與討論

一、β=1

（一）α=1

當殺 1 留 1 時, $c_{1,n}$=1 情況如表一

表一、殺 1 留 1($c_{1,n}$=1)

n	k														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1_0														
2	2_0	1_1													
3	2_1	3_0	1_2												
4	4_0	2_2	3_1	1_3											
5	2_3	4_1	5_0	3_2	1_4										
6	4_2	6_0	2_4	5_1	3_3	1_5									
7	6_1	2_5	4_3	7_0	5_2	3_4	1_6								
8	8_0	4_4	6_2	2_6	7_1	5_3	3_5	1_7							
9	2_7	6_3	8_1	4_5	9_0	7_2	5_4	3_6	1_8						
10	4_6	8_2	10_0	6_4	2_8	9_1	7_3	5_5	3_7	1_9					
11	6_5	10_1	2_9	8_3	4_7	11_0	9_2	7_4	5_6	3_8	1_{10}				
12	8_4	12_0	4_8	10_2	6_6	2_{10}	11_1	9_3	7_5	5_7	3_9	1_{11}			
13	10_3	2_{11}	6_7	12_1	8_5	4_9	13_0	11_2	9_4	7_6	5_8	3_{10}	1_{12}		
14	12_2	4_{10}	8_6	14_0	10_4	6_8	2_{12}	13_1	11_3	9_5	7_7	5_9	3_{11}	1_{13}	
15	14_1	6_9	10_5	2_{13}	12_3	8_7	4_{10}	15_0	13_2	11_4	9_6	7_8	5_{10}	3_{12}	1_{14}

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{1,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1, 1)+1=1

$\alpha=1$，$\beta=1$

n+1	1	1+1	1+2	1+3	...	1+n-1	1+n
n		n-1+1₀	1	2	...	n-1-1	n-1
$A_{(1,1,n+1,k)}$ $-A_{(1,1,n,k)}$		1+1-(n-1+1) =1+1	(1+2)-1 =1+1	(1+3)-2 =1+1	...	(1+n-1)-(n-1-1) =1+1	(1+n)-(n-1) =1+1

1.(1)將 n+1 個數中先殺掉 1，剩下數有 n 個(n+1-1)個。(1)

(2)由於 n+1 個數中已經殺掉 1，再下就是留 1 ； 但是 n 個數中是殺 1。

為了讓 n 個數 與 n+1 個數中再來都是留 1，所以將 n 個數中從後面

搬 h 個數往前補(也就是數字 n 前補)

(3)如此 n 個數與 n+1 個數中都是留 1，n 個數與 n+1 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(1,1,n,k)}\neq n$ ： $A_{(1,1,n+1,k)}-A_{(1,1,n,k)}=1+1$ [n+1-(1+1)-n]-(n-n)=-1-0=-1

(2-1)若 $A_{(1,1,n,k)}=n$ ： n 為 $F_{(1,1,c,k)}$值，且 n-n=0 $\therefore b_{(1,1,c,k)}=0$

(2-2)$b(x)_{(1,1,c,k)}+F(x)_{(1,1,c,k)}+1=1+1+0$ $\therefore b(x)_{(1,1,c,k)}+F(x)_{(1,1,c,k)}+1=1+1$

3.設 k=s，$\mathrm{mod}(s-1,1)+1=c_{(1,n)}$

而且 $\mathrm{mod}(n-1,g)+1=c_{(1,n)}$，所以第一個數會落在 n=s

> k=s 為第 1 個淘汰($A_{1,1,s,s}=1$)，$s-A_{1,2,s,s}=s-1=k-1$

由上表推論:

(1)當 k=s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(1,c)}$， 因此推論 $y_{(1,c)}$值公式:

設 $\mathrm{mod}(y_{(1,c)}-1,1)+1=c_{(1,n)}$；其中 $y_{(1,c)}\geqq k>y_{(1,c)}-1$

(2)由 $s-A_{(1,1,s,k)}=k-1$ 的條件和 n 與 n+1 之間的關係推論至 $F(1)_{(1,1,c,k)}$及 $b(1)_{(1,1,c,k)}$值:

$F(1)_{(1,1,c,k)}=y_{(1,c)}+1[\frac{k-1}{1}]$

$b(1)_{(1,1,c,k)}=\mathrm{mod}(k-1,1)$

4.$F(x)_{(1,1,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(1,1,c,k)}+1m=(1+1)m$

$F(x)_{(1,1,c,k)}=1m=m$

$F(x+1)_{(1,1,c,k)}=1m+1m=(1+1)m$

因此得結論:

$F(x)_{(1,1,c,k)}=m$

$F(x+1)_{(1,1,c,k)}=(1+1)m$

其中:

若 m<1，表示 $F(x)_{(1,1,c,k)}+1<1+1$，

此時$(F(x)_{(1,1,c,k)}+g)-A_{(1,1,F(x)+1,k)}<1$ $\therefore F(x)_{(1,1,c,k)}+g$ 為 F 值

∴若 m<1，則 $F(x+1)_{(1,1,c,k)}=F(x)_{(1,1,c,k)}$

5.由 n 與 n+1 之間的關係和 $F(x)_{(1,1,c,k)}$與 $F(x+1)_{(1,1,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$\boxed{\begin{aligned}A_{(1,1,n,k)} &= (1+1)\frac{n-F(x)_{(1,1,c,k)}}{1}-b(x)_{(1,1,c,k)}\\ &= n-(0+1\frac{F(x+1)_{(1,1,c,k)}-n}{1})\end{aligned}}$$

其中:設 $F(x+1)_{(1,1,c,k)}\geqq n>F(x)_{(1,1,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.6

（二）$\alpha=2$

當殺 2 留 1 時, $c_{2,n}=1$ 情況如表二, $c_{2,n}=2$ 情況如表三

表二、殺 2 留 1($c_{2,n}=1$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
3	3_0	2_1	1_2								
5	3_2	5_0	4_1	2_3	1_4						
7	6_1	3_4	7_0	5_2	4_3	2_5	1_6				
9	9_0	6_3	3_6	8_1	7_2	5_4	4_5	2_7	1_8		
11	3_8	9_2	6_5	11_0	10_1	8_3	7_4	5_6	4_7	2_9	1_{10}
13	6_7	12_1	9_4	3_{10}	13_0	11_2	10_3	8_5	7_6	5_8	...
15	9_6	15_0	12_3	6_9	3_{12}	14_1	13_2	11_4	10_5	8_7	...
17	12_5	3_{14}	15_2	9_8	6_{11}	17_0	16_1	14_3	13_4	11_6	...
19	15_4	6_{13}	18_1	12_7	9_{10}	3_{16}	19_0	17_2	16_3	14_5	...
21	18_3	9_{12}	21_0	15_6	12_9	6_{15}	3_{18}	20_1	19_2	17_4	...
23	21_2	12_{11}	3_{20}	18_5	15_8	9_{14}	6_{17}	23_0	22_1	20_3	...
25	24_1	15_{10}	6_{19}	21_4	18_7	12_{13}	9_{16}	3_{22}	25_0	23_2	...
27	27_0	18_9	9_{18}	24_3	21_6	15_{12}	12_{15}	6_{21}	3_{24}	26_1	...

表三、殺 2 留 1($c_{2,n}=2$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
4	3_1	4_0	2_2	1_3							
6	6_0	3_3	5_1	4_2	2_4	1_5					
8	3_5	6_2	8_0	7_1	5_3	4_4	2_6	1_7			
10	6_4	9_1	3_7	10_0	8_2	7_3	5_5	4_6	2_8	1_9	
12	9_3	12_0	6_6	3_9	11_1	10_2	8_4	7_5	5_7	4_8	...
14	12_2	3_{11}	9_5	6_8	14_0	13_1	11_3	10_4	8_6	7_7	...
16	15_1	6_{10}	12_4	9_7	3_{13}	16_0	14_2	13_3	11_5	10_6	...
18	18_0	9_9	15_3	12_6	6_{12}	3_{15}	17_1	16_2	14_4	13_5	...
20	3_{17}	12_8	18_2	15_5	9_{11}	6_{14}	20_0	19_1	17_3	16_4	...
22	6_{16}	15_7	21_1	18_4	12_{10}	9_{13}	3_{19}	22_0	20_2	19_3	...
24	9_{15}	18_6	24_0	21_3	15_9	12_{12}	6_{18}	3_{21}	23_1	22_2	...
26	12_{14}	21_5	3_{23}	24_2	18_8	15_{11}	9_{17}	6_{20}	26_0	25_1	...
28	15_{13}	24_4	6_{22}	27_1	21_7	18_{10}	12_{16}	9_{19}	3_{25}	28_0	...

▲其中:塗綠色表示 $k=1\sim c_{2,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1,2)+1=1

塗橘色表示 mod(k-1,2)+1=2

$\alpha=2$，$\beta=1$

n+2	1	2	2+1	2+2	...	2+n-1	2+n
n			n_0	1	...	n-2	n-1
$A_{(2,1,n+2,k)}$ $-A_{(2,1,n,k)}$			(2+1)-n =2+1-n	(2+2)-1 =2+1	...	(2+n-1)-(n-2) =2+1	(2+n)-(n-1) =2+1

1.(1)將 n+2 個數中先殺掉 2，剩下數有 n 個(n+2-2 個)。

(2)由於 n+2 個數中已經殺掉 2，再下就是留 1 ； 但是 n 個數中是殺 2。

為了讓 n 個數與 n+2 個數中再來都是留 1，所以將 n 個數中從後面搬 1 個數往前補(也就是數字 n 前補)

(3)如此 n 個數與 n+2 個數中都是留 1，n 個數與 n+2 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(2,1,n,k)}\neq n$ ： $A_{(2,1,n+g,k)}-A_{(2,1,n,k)}=2+1 \rightarrow [n+2-(2+1)-n]-(n-n)=-1$

(2-1)若 $A_{(2,1,n,k)}=n$ ： n 為 $F_{(2,1,c,k)}$值，且 n-n=0 $\therefore b_{(2,1,c,k)}<1$

(2-2) $b(x)_{(2,1,c,k)}+F(x)_{(2,1,c,k)}+2=2+1+0$ $\therefore b(x)_{(2,1,c,k)}+F(x)_{(2,1,c,k)}+2=2+1$

3.設 k=s，$mod(s-1,2)+1=c_{(2,n)}$

則 k=s-1，$mod(s-2,2)+1\neq c_{(2,n)}$

但是 $mod(n-1,2)+1=c_{(2,n)}$，所以當 k=s-1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{2,1,s,s}=1$)，$s-A_{2,1,s,s}=s-1=k-1$ k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{2,1,s,s-1}=2$)，$s-A_{2,1,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s-1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將 s 設為 $y_{(2,c)}$， 因此推論 $y_{(2,c)}$值公式:

設 $mod(y_{(2,c)}-1,2)+1=c_{(2,n)}$；其中 $y_{(2,c)}\geqq k>y_{(2,c)}-2$

(2)由 $s-A_{(2,1,s,s)}\sim s-A_{(2,1,s,s-g+1)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(2,1,c,k)}$及 $b(1)_{(2,1,c,k)}$值:

$F(1)_{(2,1,c,k)}=y_{(2,c)}+2[\frac{k-1}{1}]$

$b(1)_{(2,1,c,k)}=mod(k-1,2)$

4.$F(x)_{(2,1,c,k)}$ 及 $b(x)_{(2,1,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(2,1,c,k)}+2m=(2+1)m$

$F(x)_{(g,1,c,k)}=1m$

$F(x+1)_{(g,1,c,k)}=1m+2m=(2+1)m$

因此得結論:

$F(x)_{(2,1,c,k)}=1m$

$F(x+1)_{(2,1,c,k)}=(2+1)m$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(2,1,c,k)}+2<2+1$，

此時$(F(x)_{(2,1,c,k)}+2)-A_{(2,1,F(x)+2,k)}<1$ $\therefore F(x)_{(2,1,c,k)}+2$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(2,1,c,k)}=F(x)_{(2,1,c,k)}+2$

5.由 n 與 n+2 之間的關係和 $F(x)_{(2,1,c,k)}$與 $F(x+1)_{(2,1,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(2,1,n,k)}=(2+1)\frac{n-F(x)_{(2,1,c,k)}}{2}-b(x)_{(2,1,c,k)}$$

$$=n-[b(x+1)_{(2,1,c,k)}+1\frac{F(x+1)_{(2,1,c,k)}-n}{2}]$$

其中:$F(x+1)_{(2,1,c,k)}\geqq n>F(x)_{(2,1,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.6

（三）$\alpha=3$

當殺 3 留 1 時, $c_{3,n}=1$ 情況如表四, $c_{3,n}=2$ 情況如表五, $c_{3,n}=3$ 情況如表六

表四、殺 3 留 1（$c_{3,n}=1$）

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
4	4_0	3_1	2_2	1_3							
7	4_3	7_0	6_1	5_2	3_4	2_5	1_6				
10	8_2	4_6	10_0	9_1	7_3	6_4	5_5	3_7	2_8	1_9	
13	12_1	8_5	4_9	13_0	11_2	10_3	9_4	7_6	6_7	5_8	...
16	16_0	12_4	8_8	4_{12}	15_1	14_2	13_3	11_5	10_6	9_7	...
19	4_{15}	16_3	12_7	8_{11}	19_0	18_1	17_2	15_4	14_5	13_6	...
22	8_{14}	20_2	16_6	12_{10}	4_{18}	22_0	21_1	19_3	18_4	17_5	...
25	12_{13}	24_1	20_5	16_9	8_{17}	4_{21}	25_0	23_2	22_3	21_4	...
28	16_{12}	28_0	24_4	20_8	12_{16}	8_{20}	4_{24}	27_1	26_2	25_3	...
31	20_{11}	4_{27}	28_3	24_7	16_{15}	12_{19}	8_{23}	31_0	30_1	29_2	...
34	24_{10}	8_{26}	32_2	28_6	20_{14}	16_{18}	12_{22}	4_{30}	34_0	33_1	...
37	28_9	12_{25}	36_1	32_5	24_{13}	20_{17}	16_{21}	8_{29}	4_{33}	37_0	...
40	32_8	16_{24}	40_0	36_4	28_{12}	24_{16}	20_{20}	12_{28}	8_{32}	4_{36}	...

表五、殺 3 留 1（$c_{3,n}=2$）

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	8_0	5_4	7_1	6_2	5_3	3_5	2_6	1_7			
11	4_7	8_3	11_0	10_1	9_2	7_4	6_5	5_6	3_8	2_9	1_{10}
14	8_6	12_2	4_{10}	14_0	13_1	11_3	10_4	9_5	7_7	6_8	...
17	12_5	16_1	8_9	4_{13}	17_0	15_2	14_3	13_4	11_6	10_7	...
20	16_4	20_0	12_8	8_{12}	4_{16}	19_1	18_2	17_3	15_5	14_6	...
23	20_3	4_{19}	16_7	12_{11}	8_{15}	23_0	22_1	21_2	19_4	18_5	...
26	24_2	8_{18}	20_6	16_{10}	12_{14}	4_{22}	26_0	25_1	23_3	22_4	...
29	28_1	12_{17}	24_5	20_9	16_{13}	8_{21}	4_{25}	29_0	27_2	26_3	...
32	32_0	16_{16}	28_4	24_8	20_{12}	12_{20}	8_{24}	4_{28}	31_1	30_2	...
35	4_{31}	20_{15}	32_3	28_7	24_{11}	16_{19}	12_{23}	8_{27}	35_0	34_1	...
38	8_{30}	24_{14}	36_2	32_6	28_{10}	20_{18}	16_{22}	12_{26}	4_{34}	38_0	...
41	12_{29}	28_{13}	40_1	36_5	32_9	24_{17}	20_{21}	16_{25}	8_{33}	4_{37}	...

表六、殺 3 留 1($c_{3,n}$=3)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	4_2	6_0	5_1	3_3	2_4	1_5					
9	8_1	4_5	9_0	7_2	6_3	5_4	3_6	2_7	1_8		
12	12_0	8_4	4_8	11_1	10_2	9_3	7_5	6_6	5_7	3_9	...
15	4_{11}	12_3	8_7	15_0	14_1	13_2	11_4	10_5	9_6	7_8	...
18	8_{10}	16_2	12_6	4_{14}	18_0	17_1	15_3	14_4	13_5	11_7	...
21	12_9	20_1	16_5	8_{13}	4_{17}	21_0	19_2	18_3	17_4	15_6	...
24	16_8	24_0	20_4	12_{12}	8_{16}	4_{20}	23_1	22_2	21_3	19_5	...
27	20_7	4_{23}	24_3	16_{11}	12_{15}	8_{19}	27_0	26_1	25_2	23_4	...
30	24_6	8_{22}	28_2	20_{10}	16_{14}	12_{18}	4_{26}	30_0	29_1	27_3	...
33	28_5	12_{21}	32_1	24_9	20_{13}	16_{17}	8_{25}	4_{29}	33_0	31_2	...
36	32_4	16_{20}	36_0	28_8	24_{12}	20_{16}	12_{24}	8_{28}	4_{32}	35_1	...
39	36_3	20_{19}	4_{35}	32_7	28_{11}	24_{15}	16_{23}	12_{27}	8_{31}	39_0	...
42	40_2	24_{18}	8_{34}	36_6	32_{10}	28_{14}	20_{22}	16_{26}	12_{30}	4_{38}	...

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{3,n}$ 值數字,

塗黃色表示 mod(k-1,3)+1=1

塗橘色表示 mod(k-1,3)+1=2

塗紅色表示 mod(k-1,3)+1=3

$\alpha=3$，$\beta=1$

n+3	1	2	3	3+1	3+2	...	3+n-1	3+n
n				n_0	1	...	n-2	n-1
$A_{(3,1,n+3,k)}$ $-A_{(3,1,n,k)}$				(3+1)-n =3+1-n	(3+2)-1 =3+1	...	(3+n-1)-(n-2) =3+1	(3+n)-(n-1) =3+1

1.(1)將 n+3 個數中先殺掉 3，剩下數有 n 個(n+3-3 個)。

(2)由於 n+3 個數中已經殺掉 3，再下就是留 1 ； 但是 n 個數中是殺 3。

為了讓 n 個數與 n+3 個數中再來都是留 1，所以將 n 個數中從後面搬 1 個數往前補(也就是數字 n 前補)

(3)如此 n 個數與 n+3 個數中都是留 1，n 個數與 n+3 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(3,1,n,k)}\neq n$ ： $A_{(3,1,n+g,k)}-A_{(3,1,n,k)}=3+1 \rightarrow [n+3-(3+1)-n]-(n-n)=-1$

(2-1)若 $A_{(3,1,n,k)}=n$ ： n 為 $F_{(3,1,c,k)}$值，且 n-n=0 $\therefore b_{(3,1,c,k)}<1$

(2-2) $b(x)_{(3,1,c,k)}+F(x)_{(3,1,c,k)}+3=3+1+0$ $\therefore b(x)_{(3,1,c,k)}+F(x)_{(3,1,c,k)}+3=3+1$

3. 設 k=s，$\mathrm{mod}(s-1,3)+1=c_{(3,n)}$

則 k=s-2~s-1，$\mathrm{mod}(s-3,3)+1$~$\mathrm{mod}(s-2,3)+1\neq c_{(3,n)}$

但是 $\mathrm{mod}(n-1,3)+1=c_{(3,n)}$，所以當 k=s-2~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{3,1,s,s}=1$)，$s-A_{3,1,s,s}=s-1=k-1$
k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{3,1,s,s-1}=2$)，$s-A_{3,1,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$
k=s-2 為第 3 個淘汰($A_{3,1,s,s-2}=3$)，$s-A_{3,1,s,s-2}=s-3=(s-2)-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s-2~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將 s 設為 $y_{(3,c)}$， 因此推論 $y_{(3,c)}$值公式:

設 $\mathrm{mod}(y_{(3,c)}-1,3)+1=c_{(3,n)}$；其中 $y_{(3,c)}\geqq k>y_{(3,c)}-3$

(2)由 $s-A_{(3,1,s,s)}$~$s-A_{(3,1,s,s-2)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(3,1,c,k)}$及 $b(1)_{(3,1,c,k)}$值:

$F(1)_{(3,1,c,k)}=y_{(3,c)}+3[\frac{k-1}{1}]$

$b(1)_{(3,1,c,k)}=\mathrm{mod}(k-1,3)$

4. $F(x)_{(3,1,c,k)}$ 及 $b(x)_{(3,1,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(3,1,c,k)}+3m=(3+1)m$

$F(x)_{(3,1,c,k)}=1m$

$F(x+1)_{(3,1,c,k)}=1m+3m=(3+1)m$

因此得結論:

$F(x)_{(3,1,c,k)}=1m$

$F(x+1)_{(3,1,c,k)}=(3+1)m$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(3,1,c,k)}+3<3+1$，

此時$(F(x)_{(3,1,c,k)}+3)-A_{(3,1,F(x)+3,k)}<1$ $\therefore F(x)_{(3,1,c,k)}+3$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(3,1,c,k)}=F(x)_{(3,1,c,k)}+3$

5. 由 n 與 n+3 之間的關係和 $F(x)_{(3,1,c,k)}$與 $F(x+1)_{(3,1,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(3,1,n,k)}=(3+1)\frac{n-F(x)_{(3,1,c,k)}}{3}-b(x)_{(3,1,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(3,1,c,k)}+1\frac{F(x+1)_{(3,1,c,k)}-n}{3}]$$

其中:$F(x+1)_{(3,1,c,k)}\geqq n>F(x)_{(3,1,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.7

（四）α=g

α=g，β=1

n+g	1	2	...	g	g+1	g+2	...	g+n-1	g+n
n					n_0	1	...	n-2	n-1
$A_{(g,1,n+g,k)}$ $-A_{(g,1,n,k)}$					(g+1)-n =g+1-n	(g+2)-1 =g+1	...	(g+n-1)-(n-2) =g+1	(g+n)-(n-1) =g+1

1.(1)將 n+g 個數中先殺掉 g，剩下數有 n 個(n+g-g 個)。

(2)由於 n+g 個數中已經殺掉 g，再下就是留 1 ； 但是 n 個數中是殺 g。

為了讓 n 個數與 n+g 個數中再來都是留 1，所以將 n 個數中從後面

搬 1 個數往前補(也就是數字 n 前補)

(3)如此 n 個數與 n+g 個數中都是留 1，n 個數與 n+g 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(g,1,n,k)} \neq n$ ： $A_{(g,1,n+g,k)}-A_{(g,1,n,k)}=g+1 \rightarrow [n+g-(g+1)-n]-(n-n)=-1$

(2-1)若 $A_{(g,1,n,k)}=n$ ： n 為 $F_{(g,1,c,k)}$值，且 n-n=0　$\therefore b_{(g,1,c,k)}<1$

(2-2) $b(x)_{(g,1,c,k)}+F(x)_{(g,1,c,k)}+g=g+1+0$　$\therefore b(x)_{(g,1,c,k)}+F(x)_{(g,1,c,k)}+g=g+1$

3.設 k=s，$mod(s-1,g)+1=c_{(g,n)}$

則 k=s-g+1~s-1，$mod(s-g,g)+1 \sim mod(s-2,g)+1 \neq c_{(g,n)}$

但是 $mod(n-1,g)+1=c_{(g,n)}$，所以當 k=s-g+1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{g,1,s,s}=1$)，$s-A_{g,1,s,s}=s-1=k-1$ k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{g,1,s,s-1}=2$)，$s-A_{g,1,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$ ... k=s-g+2 為第 g-1 個淘汰($A_{g,1,s,s-g+2}=g-1$)，$s-A_{g,1,s,s-g+2}=s-g+1=(s-g+2)-1=k-1$ k=s-g+1 為第 g 個淘汰($A_{g,1,s,s-g+1}=g$)，$s-A_{g,1,s,s-g+1}=s-g=(s-g+1)-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s-g+1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將 s 設為 $y_{(g,c)}$， 因此推論 $y_{(g,c)}$值公式:

設 $mod(y_{(g,c)}-1,g)+1=c_{(g,n)}$；其中 $y_{(g,c)} \geq k > y_{(g,c)}-g$

(2)由 $s-A_{(g,1,s,s)} \sim s-A_{(g,1,s,s-g+1)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(g,1,c,k)}$及 $b(1)_{(g,1,c,k)}$值:

$F(1)_{(g,1,c,k)}=y_{(g,c)}+g[\frac{k-1}{1}]$

$b(1)_{(g,1,c,k)}=mod(k-1,g)$

4.$F(x)_{(g,1,c,k)}$ 及 $b(x)_{(g,1,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(g,1,c,k)}+gm=(g+1)m$

$F(x)_{(g,1,c,k)}=1m$

$F(x+1)_{(g,1,c,k)}=1m+gm=(g+1)m$

因此得結論:

$F(x)_{(g,1,c,k)}=1m$

$F(x+1)_{(g,1,c,k)}=(g+1)m$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(g,1,c,k)}+g<g+1$，

此時$(F(x)_{(g,1,c,k)}+g)-A_{(g,1,F(x)+g,k)}<1$　$\therefore F(x)_{(g,1,c,k)}+g$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(g,1,c,k)}=F(x)_{(g,1,c,k)}+g$

5.由 n 與 n+g 之間的關係和 $F(x)_{(g,1,c,k)}$與 $F(x+1)_{(g,1,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(g,1,n,k)}=(g+1)\frac{n-F(x)_{(g,1,c,k)}}{g}-b(x)_{(g,1,c,k)}$$

$$=n-[b(x+1)_{(g,1,c,k)}+1\frac{F(x+1)_{(g,1,c,k)}-n}{g}]$$

其中:$F(x+1)_{(g,1,c,k)} \geq n > F(x)_{(g,1,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.7

二、β=2

（一）α=1

當 1 留 2 時, $c_{1,n}$=1 情況如表七

表七、殺 1 留 2($c_{1,n}$=1)

n	k											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1_0											
2	2_0	1_1										
3	3_0	2_1	1_2									
4	3_1	2_2	4_0	1_3								
5	2_3	5_0	3_2	4_1	1_4							
6	5_1	3_3	6_0	2_4	4_2	1_5						
7	2_5	6_1	3_4	5_2	7_0	4_3	1_6					
8	5_3	2_6	6_2	8_0	3_5	7_1	4_4	1_7				
9	8_1	5_4	9_0	3_6	6_3	2_7	7_2	4_5	1_8			
10	2_8	8_2	3_7	6_4	9_1	5_5	10_0	7_3	4_6	1_9		
11	5_6	11_0	6_5	9_2	2_9	8_3	3_8	10_1	7_4	4_7	1_{10}	
12	8_4	3_9	9_3	12_0	5_7	11_1	6_6	2_{10}	10_2	7_5	4_8	1_{11}

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{1,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1, 1)+1=1

$\alpha=1$，$\beta=2$

n+1	1	1+1	1+2	1+3	...	1+n-1	1+n
n		$n-1_1$	n_0	1	...	n-3	n-2
$A_{(1,2,n+1,k)}$ $-A_{(1,2,n,k)}$		(1+1)-(n-1) =1+2-n	(1+2)-n =1+2-n	(1+3)-1 =1+2	...	(1+n-1)-(n-3) =1+2	(1+n)-(n-2) =1+2

1.(1)將 n+1 個數中先殺掉 1，剩下數有 n 個(n+1-1 個)。

(2)由於 n+1 個數中已經殺掉 1，再下就是留 2 ； 但是 n 個數中是殺 1。

為了讓 n 個數與 n+1 個數中再來都是留 2，所以將 n 個數中從後面

搬 2 個數往前補(也就是數字 n 和 n-1 前補)

(3)如此 n 個數與 n+1 個數中都是留 2，n 個數與 n+1 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(1,2,n,k)}\neq$n-1 或 n ： $A_{(1,2,n+g,k)}-A_{(1,2,n,k)}=1+2\rightarrow[n+1-(1+2)-n]-(n-n)=-2$

(2-1)若 $A_{(1,2,n,k)}=$n-1 或 n ： n 為 $F_{(1,2,c,k)}$值，且 n-n=0；n-(n-1)=1　$\therefore b_{(1,2,c,k)}<2$

(2-2) $b(x)_{(1,2,c,k)}+F(x)_{(1,2,c,k)}+1=1+1+1$ 或 1+2+0　$\therefore b(x)_{(1,2,c,k)}+F(x)_{(1,2,c,k)}+1=1+2$

3.設 k=s，$mod(s-1,1)+1=c_{(1,n)}$

而且 $mod(n-1,1)+1=c_{(1,n)}$，所以當 k=s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{1,2,s,s}=1$)，$s-A_{1,2,s,s}=s-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(1,c)}$， 因此推論 $y_{(1,c)}$值公式:

設 $mod(y_{(1,c)}-1,1)+1=c_{(1,n)}$；其中 $y_{(1,c)}\geqq k>y_{(1,c)}-1$

(2)由 $s-A_{(1,2,s,s}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(1,2,c,k)}$及 $b(1)_{(1,2,c,k)}$值:

$F(1)_{(1,2,c,k)}=y_{(1,c)}+1[\frac{k-1}{2}]$

$b(1)_{(1,2,c,k)}=mod(k-1,1)$

4.$F(x)_{(1,2,c,k)}$ 及 $b(x)_{(1,2,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(1,2,c,k)}+1m-b(x+1)_{(1,2,c,k)}=(1+2)m-b(x)_{(1,2,c,k)}$

$F(x)_{(1,2,c,k)}=2m-b(x)_{(1,2,c,k)}+b(x+1)_{(1,2,c,k)}$

$F(x+1)_{(1,2,c,k)}=2m-b(x)_{(1,2,c,k)}+b(x+1)_{(1,2,c,k)}+1m=(1+2)m-b(x)_{(1,2,c,k)}+b(x+1)_{(1,2,c,k)}$

因此得結論:

$F(x)_{(1,2,c,k)}=2m-b(x)_{(1,2,c,k)}+b(x+1)_{(1,2,c,k)}$

$F(x+1)_{(1,2,c,k)}=(1+2)m-b(x)_{(1,2,c,k)}+b(x+1)_{(1,2,c,k)}$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(1,2,c,k)}+1<1+2$，

此時$(F(x)_{(1,2,c,k)}+g)-A_{(1,2,F(x)+1,k)}<2$　$\therefore F(x)_{(1,2,c,k)}+1$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(1,2,c,k)}=F(x)_{(1,2,c,k)}+1$

5.由 n 與 n+1 之間的關係和 $F(x)_{(1,2,c,k)}$與 $F(x+1)_{(1,2,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(g,1,n,k)}=(1+2)\frac{n-F(x)_{(1,2,c,k)}}{1}-b(x)_{(1,2,c,k)}$$

$$=n-[b(x+1)_{(1,2,c,k)}+2\frac{F(x+1)_{(1,2,c,k)}-n}{1}]$$

其中:$F(x+1)_{(1,2,c,k)}\geqq n>F(x)_{(1,2,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.8

（二）α=2

當殺 2 留 2 時, $c_{2,n}$=1 情況如表八, $c_{2,n}$=2 情況如表九

表八、殺 2 留 2($c_{2,n}$=1)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
3	3_0	2_1	1_2								
5	5_0	3_2	5_0	2_3	1_4						
7	3_4	7_0	4_3	6_1	5_2	2_5	1_6				
9	7_2	4_5	8_1	3_6	9_0	6_3	5_4	2_7	1_8		
11	11_0	8_3	3_8	7_4	4_7	10_1	9_2	6_5	5_6	2_9	1_{10}
13	4_9	12_1	7_6	11_2	8_5	3_{10}	13_0	10_3	9_5	6_7	...
15	8_7	3_{12}	11_4	15_0	12_3	7_8	4_{11}	14_1	13_2	10_5	...
17	12_5	7_{10}	15_2	4_{13}	16_1	11_6	8_9	3_{14}	17_0	14_3	...
19	16_3	11_8	19_0	8_{11}	3_{16}	15_4	12_7	7_{12}	4_{15}	18_1	...
21	20_1	15_6	4_{17}	12_9	7_{14}	19_2	16_5	11_{10}	8_{13}	3_{18}	...
23	3_{20}	19_4	8_{15}	16_7	11_{12}	23_0	20_3	15_8	12_{11}	7_{16}	...
25	7_{18}	23_2	12_{13}	20_5	15_{10}	4_{21}	24_1	19_6	16_9	11_{14}	...
27	11_{16}	27_0	16_{11}	24_3	19_8	8_{19}	3_{24}	23_4	20_7	15_{12}	...

表九、殺 2 留 2($c_{2,n}$=2)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
4	4_0	3_1	2_2	1_3							
6	4_2	3_3	6_0	5_1	2_4	1_5					
8	8_0	7_1	4_4	3_5	6_2	5_3	2_6	1_7			
10	4_6	3_7	8_2	7_3	10_0	9_1	6_4	5_5	2_8	1_9	
12	8_4	7_5	12_0	11_1	4_8	3_9	10_2	9_3	6_6	5_7	...
14	12_2	11_3	4_{10}	3_{11}	8_6	7_7	14_0	13_1	10_4	9_5	...
16	16_0	15_1	8_8	7_9	12_4	11_5	4_{12}	3_{13}	14_2	13_3	...
18	4_{14}	3_{15}	12_6	11_7	16_2	15_3	8_{10}	8_{11}	18_0	17_1	...
20	8_{12}	7_{13}	16_4	15_5	20_0	19_1	12_8	11_9	4_{16}	3_{17}	...
22	12_{10}	11_{11}	20_2	19_3	4_{18}	3_{19}	16_6	15_7	8_{14}	7_{15}	...
24	14_8	15_9	24_0	23_1	8_{16}	7_{17}	20_4	19_5	12_{12}	11_{13}	...
26	16_6	19_7	4_{22}	3_{23}	12_{14}	11_{15}	24_2	23_1	16_{10}	15_{11}	...

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{2,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1,2)+1=1

塗橘色表示 mod(k-1, 2)+1=2

$\alpha=2$，$\beta=2$

n+2	1	2	2+1	2+2	2+3	...	2+n-1	2+n
n			$n-1_{1}$	n_{0}	1	...	n-3	n-2
$A_{(2,2,n+2,k)}$ $-A_{(2,2,n,k)}$			(2+1)- (n-1) =2+2-n	(2+2)-n =2+2-n	(2+3)-1 =2+2	...	(2+n-1) -(n-3) =2+2	(2+n) -(n-2) =2+2

1.(1)將 n+2 個數中先殺掉 2，剩下數有 n 個(n+2-2 個)。

(2)由於 n+2 個數中已經殺掉 2，再下就是留 2 ； 但是 n 個數中是殺 2。

為了讓 n 個數與 n+2 個數中再來都是留 2，所以將 n 個數中從後面

搬 2 個數往前補(也就是數字 n 和 n-1 前補)

(3)如此 n 個數與 n+2 個數中都是留 2，n 個數與 n+2 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(2,2,n,k)}\neq n-1$ 或 n ： $A_{(2,2,n+g,k)}-A_{(2,2,n,k)}=2+2\rightarrow[n+2-(2+2)-n]-(n-n)=-2$

(2-1)若 $A_{(2,2,n,k)}=n-1$ 或 n ： n 為 $F_{(2,2,c,k)}$值，且 n-n=0；n-(n-1)=1 $\therefore b_{(2,2,c,k)}<2$

(2-2) $b(x)_{(2,2,c,k)}+F(x)_{(2,2,c,k)}+2=2+1+1$ 或 2+2+0 $\therefore b(x)_{(2,2,c,k)}+F(x)_{(2,2,c,k)}+2=2+2$

3.設 k=s，$\bmod(s-1,2)+1=c_{(2,n)}$

則 k=s-1，$\bmod(s-2,2)+1\neq c_{(2,n)}$

但是 $\bmod(n-1,2)+1=c_{(2,n)}$，所以當 k=s-1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{2,2,s,s}=1$)，$s-A_{2,2,s,s}=s-1=k-1$
k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{2,2,s,s-1}=2$)，$s-A_{2,2,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s-1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(2,c)}$， 因此推論 $y_{(2,c)}$值公式:

設 $\bmod(y_{(2,c)}-1,2)+1=c_{(2,n)}$；其中 $y_{(2,c)}\geqq k>y_{(2,c)}-2$

(2)由 $s-A_{(2,2,s,s)}\sim s-A_{(2,2,s,s-1)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(2,2,c,k)}$及 $b(1)_{(2,2,c,k)}$值:

$F(1)_{(2,2,c,k)}=y_{(2,c)}+2[\frac{k-1}{2}]$

$b(1)_{(2,2,c,k)}=\bmod(k-1,2)$

4.$F(x)_{(2,2,c,k)}$ 及 $b(x)_{(2,2,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(2,2,c,k)}+2m-b(x+1)_{(2,2,c,k)}=(2+2)m-b(x)_{(2,2,c,k)}$

$F(x)_{(2,2,c,k)}=2m-b(x)_{(2,2,c,k)}+b(x+1)_{(2,2,c,k)}$

$F(x+1)_{(2,2,c,k)}=2m-b(x)_{(2,2,c,k)}+b(x+1)_{(2,2,c,k)}+2m=(2+2)m-b(x)_{(2,2,c,k)}+b(x+1)_{(2,2,c,k)}$

因此得結論:

$F(x)_{(2,2,c,k)}=2m-b(x)_{(2,2,c,k)}+b(x+1)_{(2,2,c,k)}$

$F(x+1)_{(2,2,c,k)}=(2+2)m-b(x)_{(2,2,c,k)}+b(x+1)_{(2,2,c,k)}$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(2,2,c,k)}+2<2+2$，

此時$(F(x)_{(2,2,c,k)}+2)-A_{(2,2,F(x)+2,k)}<2$ $\therefore F(x)_{(2,2,c,k)}+g$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(2,2,c,k)}=F(x)_{(2,2,c,k)}+2$

5.由 n 與 n+2 之間的關係和 $F(x)_{(2,2,c,k)}$與 $F(x+1)_{(2,2,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(2,2,n,k)}=(2+2)\frac{n-F(x)_{(2,2,c,k)}}{2}-b(x)_{(2,2,c,k)}$$

$$=n-[b(x+1)_{(2,2,c,k)}+2\frac{F(x+1)_{(2,2,c,k)}-n}{2}]$$

其中:$F(x+1)_{(2,2,c,k)}\geqq n>F(x)_{(2,2,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.8

（三）$\alpha=3$

當殺 3 留 2 時, $c_{3,n}=1$ 情況如表十, $c_{3,n}=2$ 情況如表十一, $c_{3,n}=3$ 情況如表十二,

表十、殺 3 留 2($c_{3,n}=1$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_{0}										
4	4_{0}	3_{1}	2_{2}	1_{3}							
7	5_{2}	4_{3}	7_{0}	6_{1}	3_{4}	2_{5}	1_{6}				
10	10_{0}	9_{1}	5_{5}	4_{6}	8_{2}	7_{3}	6_{4}	3_{7}	2_{8}	1_{9}	
13	5_{8}	4_{9}	10_{3}	9_{4}	13_{0}	12_{1}	11_{2}	8_{5}	7_{6}	6_{7}	…
16	10_{6}	9_{7}	15_{1}	14_{2}	5_{11}	4_{12}	16_{0}	13_{3}	12_{4}	11_{5}	…
19	15_{4}	14_{5}	4_{15}	19_{0}	10_{9}	9_{10}	5_{14}	18_{1}	17_{2}	16_{3}	…
22	20_{2}	19_{3}	9_{13}	5_{17}	15_{7}	14_{8}	10_{12}	4_{18}	22_{0}	21_{1}	…
25	25_{0}	24_{1}	14_{11}	10_{15}	20_{5}	19_{6}	15_{10}	9_{16}	5_{20}	4_{21}	…
28	5_{23}	4_{24}	19_{9}	15_{13}	25_{3}	24_{4}	20_{8}	14_{14}	10_{18}	9_{19}	…
31	10_{21}	9_{22}	24_{7}	20_{11}	30_{1}	29_{2}	25_{6}	19_{12}	15_{16}	14_{17}	…
34	15_{19}	14_{20}	29_{5}	25_{9}	4_{30}	34_{0}	30_{4}	24_{10}	20_{14}	19_{15}	…
37	20_{17}	19_{18}	34_{3}	30_{7}	9_{28}	5_{32}	35_{2}	29_{8}	25_{12}	24_{13}	…
40	25_{15}	24_{16}	39_{1}	35_{5}	14_{26}	10_{30}	40_{0}	34_{6}	30_{10}	29_{11}	…

表十一、殺 3 留 2($c_{3,n}=2$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_{0}	1_{1}									
5	5_{0}	4_{1}	3_{2}	2_{3}	1_{4}						
8	5_{3}	4_{4}	8_{0}	7_{1}	6_{2}	3_{5}	2_{6}	1_{7}			
11	10_{1}	9_{2}	5_{6}	4_{7}	11_{0}	8_{3}	7_{4}	6_{5}	3_{8}	2_{9}	1_{10}
14	4_{10}	14_{0}	10_{4}	9_{5}	5_{9}	13_{1}	12_{2}	11_{3}	8_{6}	7_{7}	…
17	9_{8}	5_{12}	15_{2}	14_{3}	10_{7}	4_{13}	17_{0}	16_{1}	13_{4}	12_{5}	…
20	14_{6}	10_{10}	20_{0}	19_{1}	15_{5}	9_{11}	5_{15}	4_{16}	18_{2}	17_{3}	…
23	19_{4}	15_{8}	5_{18}	4_{19}	20_{3}	14_{9}	10_{13}	9_{14}	23_{0}	22_{1}	…
26	24_{2}	20_{6}	10_{16}	9_{17}	25_{1}	19_{7}	15_{11}	14_{12}	5_{21}	4_{22}	…
29	29_{0}	25_{4}	15_{14}	14_{15}	4_{25}	24_{5}	20_{9}	19_{10}	10_{19}	9_{20}	…
32	5_{27}	30_{2}	20_{12}	19_{13}	9_{23}	29_{3}	25_{7}	24_{8}	15_{17}	14_{18}	…
35	10_{25}	35_{0}	25_{10}	24_{11}	14_{21}	34_{1}	30_{5}	29_{6}	20_{15}	19_{16}	…
38	15_{23}	5_{33}	30_{8}	29_{9}	19_{19}	4_{34}	35_{3}	34_{4}	25_{13}	24_{14}	…
41	20_{21}	10_{31}	35_{6}	34_{7}	24_{17}	9_{32}	40_{1}	39_{2}	30_{11}	29_{12}	…

表十二、殺 3 留 2($c_{3,n}$=3)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_{0}	2_{1}	1_{2}								
6	5_{1}	4_{2}	6_{0}	3_{3}	2_{4}	1_{5}					
9	4_{5}	9_{0}	5_{4}	8_{1}	7_{2}	6_{3}	3_{6}	2_{7}	1_{8}		
12	9_{3}	5_{7}	10_{2}	4_{8}	12_{0}	11_{1}	8_{4}	7_{5}	6_{6}	3_{9}	...
15	14_{1}	10_{5}	15_{0}	9_{6}	5_{10}	4_{11}	13_{2}	12_{3}	11_{4}	8_{7}	...
18	4_{14}	15_{3}	5_{13}	14_{4}	10_{8}	9_{9}	18_{0}	17_{1}	16_{2}	13_{5}	...
21	9_{12}	20_{1}	10_{11}	19_{2}	15_{6}	14_{7}	5_{16}	4_{17}	21_{0}	18_{3}	...
24	14_{10}	4_{20}	15_{9}	24_{0}	20_{4}	19_{5}	10_{14}	9_{15}	5_{19}	23_{1}	...
27	19_{8}	9_{18}	20_{7}	5_{22}	25_{2}	24_{3}	15_{12}	14_{13}	10_{17}	4_{23}	...
30	24_{6}	14_{16}	25_{5}	10_{20}	30_{0}	29_{1}	20_{10}	19_{11}	15_{15}	9_{21}	...
33	29_{4}	19_{14}	30_{3}	15_{18}	5_{28}	4_{29}	25_{8}	24_{9}	20_{13}	14_{19}	...
36	34_{2}	24_{12}	35_{1}	20_{16}	10_{26}	9_{27}	30_{6}	29_{7}	25_{11}	19_{17}	...
39	39_{0}	29_{10}	4_{35}	25_{14}	15_{24}	14_{25}	35_{4}	34_{5}	30_{9}	24_{15}	...

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{3,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1,3)+1=1

塗橘色表示 mod(k-1,3)+1=2

塗紅色表示 mod(k-1,3)+1=3

$\alpha=3$，$\beta=2$

n+3	1	2	3	3+1	3+2	3+3	...	3+n−1	3+n
n				$n-1_{\underline{1}}$	$n_{\underline{0}}$	1	...	n−3	n−2
$A_{(3,2,n+3,k)}-A_{(3,2,n,k)}$				(3+1)−(n−1)=3+2−n	(3+2)−n=3+2−n	(3+3)−1=3+2	...	(3+n−1)−(n−3)=3+2	(3+n)−(n−2)=3+2

1. (1)將 n+3 個數中先殺掉 3，剩下數有 n 個(n+3−3 個)。
   (2)由於 n+3 個數中已經殺掉 3，再下就是留 2 ； 但是 n 個數中是殺 3。
   為了讓 n 個數與 n+3 個數中再來都是留 2，所以將 n 個數中從後面搬 2 個數往前補(也就是數字 n 和 n-1 前補)
   (3)如此 n 個數與 n+3 個數中都是留 2，n 個數與 n+3 個數中的殺和留相對
2. (1)若 $A_{(3,2,n,k)}\neq n-1$ 或 n ： $A_{(3,2,n+g,k)}-A_{(3,2,n,k)}=3+2$ ➔ $[n+3-(3+2)-n]-(n-n)=-2$
   (2-1)若 $A_{(3,2,n,k)}=n-1$ 或 n ： n 為 $F_{(3,2,c,k)}$值，且 n−n=0；n−(n−1)=1 　$\therefore b_{(3,2,c,k)}<2$
   (2-2) $b(x)_{(3,2,c,k)}+F(x)_{(3,2,c,k)}+3=3+1+1$ 或 3+2+0 　$\therefore b(x)_{(3,2,c,k)}+F(x)_{(3,2,c,k)}+3=3+2$
3. 設 k=s，$\mathrm{mod}(s-1,3)+1=c_{(3,n)}$
   則 k=s−2~s−1，$\mathrm{mod}(s-3,3)+1$~$\mathrm{mod}(s-2,3)+1\neq c_{(3,n)}$
   但是 $\mathrm{mod}(n-1,3)+1=c_{(3,n)}$，所以當 k=s−2~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{3,2,s,s}=1$)，$s-A_{3,2,s,s}=s-1=k-1$
k=s−1 為第 2 個淘汰($A_{3,2,s,s-1}=2$)，$s-A_{3,2,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$
k=s−2 為第 3 個淘汰($A_{3,2,s,s-2}=3$)，$s-A_{3,2,s,s-2}=s-3=(s-2)-1=k-1$

由上推論:
(1)當 k=s−2~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(3,c)}$， 因此推論 $y_{(3,c)}$值公式:
設 $\mathrm{mod}(y_{(3,c)}-1,3)+1=c_{(3,n)}$；其中 $y_{(3,c)}\geqq k>y_{(3,c)}-3$
(2)由 $s-A_{(3,2,s,s)}$~$s-A_{(3,2,s,s-2)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(3,2,c,k)}$及 $b(1)_{(3,2,c,k)}$值:
$F(1)_{(3,2,c,k)}=y_{(3,c)}+3[\frac{k-1}{2}]$
$b(1)_{(3,2,c,k)}=\mathrm{mod}(k-1,3)$

4. $F(x)_{(3,2,c,k)}$ 及 $b(x)_{(3,2,c,k)}$演算過程如下:
   $F(x)_{(3,2,c,k)}+3m-b(x+1)_{(3,2,c,k)}=(3+2)m-b(x)_{(3,2,c,k)}$
   $F(x)_{(3,2,c,k)}=2m-b(x)_{(3,2,c,k)}+b(x+1)_{(3,2,c,k)}$
   $F(x+1)_{(3,2,c,k)}=2m-b(x)_{(3,2,c,k)}+b(x+1)_{(3,2,c,k)}+3m=(3+2)m-b(x)_{(3,2,c,k)}+b(x+1)_{(3,2,c,k)}$
   因此得結論:
   $F(x)_{(3,2,c,k)}=2m-b(x)_{(3,2,c,k)}+b(x+1)_{(3,2,c,k)}$
   $F(x+1)_{(3,2,c,k)}=(3+2)m-b(x)_{(3,2,c,k)}+b(x+1)_{(3,2,c,k)}$
   其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(3,2,c,k)}+3<3+2$，
   此時$(F(x)_{(3,2,c,k)}+3)-A_{(3,2,F(x)+3,k)}<2$ 　$\therefore F(x)_{(3,2,c,k)}+3$ 為 F 值
   ∴若 m<1，則 $F(x+1)_{(3,2,c,k)}=F(x)_{(3,2,c,k)}+3$
5. 由 n 與 n+3 之間的關係和 $F(x)_{(3,2,c,k)}$與 $F(x+1)_{(3,2,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(3,2,n,k)}=(3+2)\frac{n-F(x)_{(3,2,c,k)}}{3}-b(x)_{(3,2,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(3,2,c,k)}+2\frac{F(x+1)_{(3,2,c,k)}-n}{3}]$$

其中:$F(x+1)_{(3,2,c,k)}\geqq n>F(x)_{(3,2,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.9

（四）α=g

α=g，β=2

n+g	1	2	...	g	g+1	g+2	g+3	...	g+n-1	g+n
n					n-1₁	n₀	1	...	n-3	n-2
$A_{(g,2,n+g,k)}$ $-A_{(g,2,n,k)}$					(g+1)-(n-1) =g+2-n	(g+2)-n =g+2-n	(g+3)-1 =g+2	...	(g+n-1) -(n-3) =g+2	(g+n) -(n-2) =g+2

1. (1)將 n+g 個數中先殺掉 g，剩下數有 n 個(n+g-g 個)。
   (2)由於 n+g 個數中已經殺掉 g，再下就是留 2 ； 但是 n 個數中是殺 g。
   為了讓 n 個數與 n+g 個數中再來都是留 2，所以將 n 個數中從後面搬 2 個數往前補(也就是數字 n 和 n-1 前補)
   (3)如此 n 個數與 n+g 個數中都是留 2，n 個數與 n+g 個數中的殺和留相對
2. (1)若 $A_{(g,2,n,k)}\neq$n-1 或 n ： $A_{(g,2,n+g,k)}-A_{(g,2,n,k)}$=g+2➔[n+g-(g+2)-n]-(n-n)=-2
   (2-1)若 $A_{(g,2,n,k)}$=n-1 或 n ： n 為 $F_{(g,2,c,k)}$值，且 n-n=0；n-(n-1)=1　∴$b_{(g,2,c,k)}$<2
   (2-2) $b(x)_{(g,2,c,k)}+F(x)_{(g,2,c,k)}$+g=g+1+1 或 g+2+0　∴$b(x)_{(g,2,c,k)}+F(x)_{(g,2,c,k)}$+g=g+2
3. 設 k=s，mod(s-1, g)+1=$c_{(g,n)}$
   則 k=s-g+1~s-1，mod(s-g, g)+1~mod(s-2, g)+1≠$c_{(g,n)}$
   但是 mod(n-1, g)+1=$c_{(g,n)}$，所以當 k=s-g+1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{g,2,s,s}$=1)，s-$A_{g,2,s,s}$=s-1=k-1
k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{g,2,s,s-1}$=2)，s-$A_{g,2,s,s-1}$=s-2=(s-1)-1=k-1
...
k=s-g+2 為第 g-1 個淘汰($A_{g,2,s,s-g+2}$=g-1)，s-$A_{g,2,s,s-g+2}$=s-g+1=(s-g+2)-1=k-1
k=s-g+1 為第 g 個淘汰($A_{g,2,s,s-g+1}$=g)，s-$A_{g,2,s,s-g+1}$=s-g=(s-g+1)-1=k-1

由上推論:

(1)當 k=s-g+1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將 s 設為 $y_{(g,c)}$， 因此推論 $y_{(g,c)}$值公式:
設 mod($y_{(g,c)}$-1, g)+1=$c_{(g,n)}$；其中 $y_{(g,c)}\geq k>y_{(g,c)}-g$

(2)由 s-$A_{(g,2,s,s)}$~s-$A_{(g,2,s,s-g+1)}$=k-1 的條件推論至 $F(1)_{(g,2,c,k)}$及 $b(1)_{(g,2,c,k)}$值:

$F(1)_{(g,2,c,k)}=y_{(g,c)}+g[\frac{k-1}{2}]$

$b(1)_{(g,2,c,k)}$=mod(k-1, g)

4. $F(x)_{(g,2,c,k)}$ 及 $b(x)_{(g,2,c,k)}$演算過程如下:
   $F(x)_{(g,2,c,k)}+gm-b(x+1)_{(g,2,c,k)}=(g+2)m-b(x)_{(g,2,c,k)}$
   $F(x)_{(g,2,c,k)}=2m-b(x)_{(g,2,c,k)}+b(x+1)_{(g,2,c,k)}$
   $F(x+1)_{(g,2,c,k)}=2m-b(x)_{(g,2,c,k)}+b(x+1)_{(g,2,c,k)}+gm=(g+2)m-b(x)_{(g,2,c,k)}+b(x+1)_{(g,2,c,k)}$
   因此得結論:
   $F(x)_{(g,2,c,k)}=2m-b(x)_{(g,2,c,k)}+b(x+1)_{(g,2,c,k)}$
   $F(x+1)_{(g,2,c,k)}=(g+2)m-b(x)_{(g,2,c,k)}+b(x+1)_{(g,2,c,k)}$
   其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(g,2,c,k)}$+g<g+2，
   此時($F(x)_{(g,2,c,k)}$+g)-$A_{(g,2,F(x)+g,k)}$<2　∴$F(x)_{(g,2,c,k)}$+g 為 F 值
   ∴若 m<1，則 $F(x+1)_{(g,2,c,k)}=F(x)_{(g,2,c,k)}$+g
5. 由 n 與 n+g 之間的關係和 $F(x)_{(g,2,c,k)}$與 $F(x+1)_{(g,2,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(g,2,n,k)}=(g+2)\frac{n-F(x)_{(g,2,c,k)}}{g}-b(x)_{(g,2,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(g,2,c,k)}+2\frac{F(x+1)_{(g,2,c,k)}-n}{g}]$$

其中:$F(x+1)_{(g,2,c,k)}\geq n>F(x)_{(g,2,c,k)}$

※各項符號請詳見 p. 9

三、β=3

（一）α=1

當 1 留 3 時, $c_{1,n}$=1 情況如表十三

表十三、殺 1 留 3($c_{1,n}$=1)

n	k											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1_0											
2	2_0	1_1										
3	2_1	3_0	1_2									
4	3_1	4_0	2_2	1_3								
5	3_2	4_1	2_3	5_0	1_4							
6	2_4	3_3	6_0	4_2	5_1	1_5						
7	6_1	7_0	4_3	2_5	3_4	5_2	1_6					
8	3_5	4_4	8_0	6_2	7_1	2_6	5_3	1_7				
9	7_2	8_1	4	2_7	3_6	6_3	9_0	5_4	1_8			
10	2_8	3_7	8_2	6_4	7_3	10_0	4_6	9_1	5_5	1_9		
11	6_5	7_4	2_9	10_1	11_0	4_7	8_3	3_8	9_2	5_6	1_{10}	
12	10_2	11_1	6_6	3_9	4_8	8_4	12_0	7_5	2_{10}	9_3	5_7	1_{11}

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{1,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1, 1)+1=1

$\alpha=1$，$\beta=3$

n+1	1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	...	1+n-1	1+n
n		$n-2_2$	$n-1_1$	n_0	1	2	...	n-4	n-3
$A_{(1,3,n+1,k)}$ $-A_{(1,3,n,k)}$		(1+1)-(n-2) =1+3-n	(1+2)-(n+1) =1+3-n	(1+3)-n =1+3-n	(1+4)-1 =1+3	(1+5)-2 =1+3	...	(1+n-1) -(n-4) =1+3	(1+n) -(n-3) =1+3

1.(1)將 n+1 個數中先殺掉 1，剩下數有 n 個(n+1-1 個)。

(2)由於 n+1 個數中已經殺掉 1，再下就是留 3 ； 但是 n 個數中是殺 1。

為了讓 n 個數與 n+1 個數中再來都是留 3，所以將 n 個數中從後面搬 3 個數往前補(也就是數字 n、n-1 和 n-2 前補)

(3)如此 n 個數與 n+1 個數中都是留 3，n 個數與 n+1 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(1,3,n,k)}\neq n-2\sim n$ ： $A_{(1,3,n+g,k)}-A_{(1,3,n,k)}=1+3 \rightarrow [n+1-(1+3)-n]-(n-n)=-3$

(2-1)若 $A_{(1,3,n,k)}=n-2\sim n$ ： n 為 $F_{(1,3,c,k)}$值，且 n-n=0...n-(n-2)=2 $\therefore b_{(1,3,c,k)}<3$

(2-2) $b(x)_{(1,3,c,k)}+F(x)_{(1,3,c,k)}+1=1+1+2$ 或 1+2+1 或 1+3+0 $\therefore b(x)_{(1,3,c,k)}+F(x)_{(1,3,c,k)}+1=1+3$

3.設 k=s，$mod(s-1,1)+1=c_{(1,n)}$

而且 $mod(n-1,1)+1=c_{(1,n)}$，所以當 k=s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{1,3,s,s}=1$)，$s-A_{1,3,s,s}=s-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(1,c)}$， 因此推論 $y_{(1,c)}$值公式:

設 $mod(y_{(1,c)}-1,1)+1=c_{(1,n)}$；其中 $y_{(1,c)}\geqq k>y_{(1,c)}-1$

(2)由 $s-A_{(1,3,s,s)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(1,3,c,k)}$及 $b(1)_{(1,3,c,k)}$值:

$F(1)_{(1,3,c,k)}=y_{(1,c)}+1[\frac{k-1}{3}]$

$b(1)_{(1,3,c,k)}=mod(k-1,1)$

4.$F(x)_{(1,3,c,k)}$ 及 $b(x)_{(1,3,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(1,3,c,k)}+1m-b(x+1)_{(1,3,c,k)}=(1+3)m-b(x)_{(1,3,c,k)}$

$F(x)_{(1,3,c,k)}=3m-b(x)_{(1,3,c,k)}+b(x+1)_{(1,3,c,k)}$

$F(x+1)_{(1,3,c,k)}=3m-b(x)_{(1,3,c,k)}+b(x+1)_{(1,3,c,k)}+1m=(1+3)m-b(x)_{(1,3,c,k)}+b(x+1)_{(1,3,c,k)}$

因此得結論:

$F(x)_{(1,3,c,k)}=3m-b(x)_{(1,3,c,k)}+b(x+1)_{(1,3,c,k)}$

$F(x+1)_{(1,3,c,k)}=(g+3)m-b(x)_{(1,3,c,k)}+b(x+1)_{(1,3,c,k)}$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(1,3,c,k)}+1<1+3$，

此時$(F(x)_{(1,3,c,k)}+1)-A_{(1,3,F(x)+1,k)}<3$ $\therefore F(x)_{(1,3,c,k)}+1$ 為 F 值

∴若 m<1，則 $F(x+1)_{(1,3,c,k)}=F(x)_{(1,3,c,k)}+1$

5.由 n 與 n+1 之間的關係和 $F(x)_{(1,3,c,k)}$與 $F(x+1)_{(1,3,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(1,3,n,k)}=(1+3)\frac{n-F(x)_{(1,3,c,k)}}{1}-b(x)_{(1,3,c,k)}$$

$$=n-[b(x+1)_{(1,3,c,k)}+3\frac{F(x+1)_{(1,3,c,k)}-n}{g}]$$

其中:$F(x+1)_{(1,3,c,k)}\geqq n>F(x)_{(1,3,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.10

（二）$\alpha=2$

當殺 2 留 3 時, $c_{2,n}=1$ 情況如表十四, $c_{2,n}=2$ 情況如表十五

表十四、殺 2 留 3($c_{2,n}=1$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_{0}										
3	3_{0}	2_{1}	1_{2}								
5	5_{0}	4_{1}	3_{2}	2_{3}	1_{4}						
7	5_{2}	4_{3}	3_{4}	7_{0}	6_{1}	2_{5}	1_{6}				
9	3_{6}	9_{0}	8_{1}	5_{4}	4_{5}	7_{2}	6_{3}	2_{7}	1_{8}		
11	8_{3}	5_{6}	4_{7}	10_{1}	9_{2}	3_{8}	11_{0}	7_{4}	6_{5}	2_{9}	1_{10}
13	13_{0}	10_{3}	9_{4}	4_{9}	3_{10}	8_{5}	5_{8}	12_{1}	11_{2}	7_{6}	...
15	5_{10}	15_{0}	14_{1}	9_{6}	8_{7}	13_{2}	10_{5}	4_{11}	3_{12}	12_{3}	...
17	10_{7}	5_{12}	4_{13}	14_{3}	13_{4}	3_{14}	15_{2}	9_{8}	8_{9}	17_{0}	...
19	15_{4}	10_{9}	9_{10}	19_{0}	18_{1}	8_{11}	3_{16}	14_{5}	13_{6}	5_{14}	...
21	20_{1}	15_{6}	14_{7}	5_{16}	4_{17}	13_{8}	8_{13}	19_{2}	18_{3}	10_{11}	...
23	4_{19}	20_{3}	19_{4}	10_{13}	9_{14}	18_{5}	13_{10}	3_{20}	23_{0}	15_{8}	...
25	9_{17}	25_{0}	24_{1}	15_{10}	14_{11}	23_{2}	18_{7}	8_{17}	5_{20}	20_{5}	...
27	14_{15}	5_{22}	4_{23}	20_{7}	19_{8}	3_{24}	23_{4}	13_{14}	10_{17}	25_{2}	...

表十五、殺 2 留 3($c_{2,n}=2$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_{0}	1_{1}									
4	3_{1}	4_{0}	2_{2}	1_{3}							
6	4_{2}	5_{1}	3_{3}	6_{0}	2_{4}	1_{5}					
8	3_{5}	4_{4}	8_{0}	5_{3}	7_{1}	6_{2}	2_{6}	1_{7}			
10	8_{2}	9_{1}	5_{5}	10_{0}	4_{6}	3_{7}	7_{3}	6_{4}	2_{8}	1_{9}	
12	3_{9}	4_{8}	10_{2}	5_{7}	9_{3}	8_{4}	12_{0}	11_{1}	7_{5}	6_{6}	...
14	8_{6}	9_{5}	3_{11}	10_{3}	14_{0}	13_{1}	5_{9}	4_{10}	12_{2}	11_{3}	...
16	13_{3}	14_{2}	8_{8}	15_{1}	5_{11}	4_{12}	10_{6}	9_{7}	3_{13}	16_{0}	...
18	18_{0}	3_{15}	13_{5}	4_{14}	10_{8}	9_{9}	15_{3}	14_{4}	8_{10}	5_{13}	...
20	5_{15}	8_{12}	18_{2}	9_{11}	15_{5}	14_{6}	20_{0}	19_{1}	13_{7}	10_{10}	...
22	10_{12}	13_{9}	3_{19}	14_{8}	20_{2}	19_{3}	5_{17}	4_{18}	18_{4}	15_{7}	...
24	15_{9}	18_{6}	8_{16}	19_{5}	3_{21}	24_{0}	10_{14}	9_{15}	23_{1}	20_{4}	...
26	20_{6}	23_{3}	13_{13}	24_{2}	8_{18}	5_{21}	15_{11}	14_{12}	4_{22}	25_{1}	...

▲其中:塗綠色表示 $k=1\sim c_{2,n}$ 值數字，

塗黃色表示 $\mathrm{mod}(k-1,2)+1=1$

塗橘色表示 $\mathrm{mod}(k-1,2)+1=2$

$\alpha=2$，$\beta=3$

n+2	1	2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	...	2+n-1	2+n
n			$n-2_2$	$n-1_1$	n_0	1	2	...	n-4	n-3
$A_{(2,3,n+2,k)}-A_{(2,3,n,k)}$			(2+1)-(n-2)=2+3-n	(2+2)-(n+1)=2+3-n	(2+3)-n=2+3-n	(2+4)-1=2+3	(2+5)-2=2+3	...	(2+n-1)-(n-4)=2+3	(2+n)-(n-3)=2+3

1.(1)將 n+2 個數中先殺掉 2，剩下數有 n 個(n+2-2 個)。
 (2)由於 n+2 個數中已經殺掉 2，再下就是留 3 ； 但是 n 個數中是殺 2。
  為了讓 n 個數與 n+2 個數中再來都是留 3，所以將 n 個數中從後面
  搬 3 個數往前補(也就是數字 n、n-1 和 n-2 前補)
 (3)如此 n 個數與 n+2 個數中都是留 3，n 個數與 n+2 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(2,3,n,k)}\neq n-2\sim n$ ： $A_{(2,3,n+g,k)}-A_{(2,3,n,k)}=2+3\rightarrow[n+2-(2+3)-n]-(n-n)=-3$
 (2-1)若 $A_{(2,3,n,k)}=n-2\sim n$ ： n 為 $F_{(2,3,c,k)}$值，且 n-n=0...n-(n-2)=2 $\therefore b_{(2,3,c,k)}<3$
 (2-2) $b(x)_{(2,3,c,k)}+F(x)_{(2,3,c,k)}+2=2+1+2$ 或 2+2+1 或 2+3+0 $\therefore b(x)_{(2,3,c,k)}+F(x)_{(2,3,c,k)}+2=2+3$

3.設 k=s，$mod(s-1,2)+1=c_{(2,n)}$
 則 k=s-1，$modmod(s-2,2)+1\neq c_{(2,n)}$
 但是 $mod(n-1,2)+1=c_{(2,n)}$，所以當 k=s-1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{2,3,s,s}=1$)，$s-A_{2,3,s,s}=s-1=k-1$ k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{2,3,s,s-1}=2$)，$s-A_{2,3,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$

由上推論:
 (1)當 k=s-1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(2,c)}$， 因此推論 $y_{(2,c)}$值公式:
  設 $mod(y_{(2,c)}-1,2)+1=c_{(2,n)}$；其中 $y_{(2,c)}\geqq k>y_{(2,c)}-2$
 (2)由 $s-A_{(2,3,s,s)}\sim s-A_{(2,3,s,s-1)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(2,3,c,k)}$及 $b(1)_{(2,3,c,k)}$值:
  $F(1)_{(2,3,c,k)}=y_{(2,c)}+2[\frac{k-1}{3}]$
  $b(1)_{(2,3,c,k)}=mod(k-1,2)$

4.$F(x)_{(2,3,c,k)}$ 及 $b(x)_{(2,3,c,k)}$演算過程如下:
 $F(x)_{(2,3,c,k)}+2m-b(x+1)_{(2,3,c,k)}=(2+3)m-b(x)_{(2,3,c,k)}$
 $F(x)_{(2,3,c,k)}=3m-b(x)_{(2,3,c,k)}+b(x+1)_{(2,3,c,k)}$
 $F(x+1)_{(2,3,c,k)}=3m-b(x)_{(2,3,c,k)}+b(x+1)_{(2,3,c,k)}+2m=(2+3)m-b(x)_{(2,3,c,k)}+b(x+1)_{(2,3,c,k)}$
 因此得結論:
  $F(x)_{(2,3,c,k)}=3m-b(x)_{(2,3,c,k)}+b(x+1)_{(2,3,c,k)}$
  $F(x+1)_{(2,3,c,k)}=(2+3)m-b(x)_{(2,3,c,k)}+b(x+1)_{(2,3,c,k)}$
 其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(2,3,c,k)}+2<2+3$，
  此時$(F(x)_{(2,3,c,k)}+g)-A_{(2,3,F(x)+2,k)}<3$ $\therefore F(x)_{(2,3,c,k)}+2$ 為 F 值
  ∴若 m<1，則 $F(x+1)_{(2,3,c,k)}=F(x)_{(2,3,c,k)}+2$

5.由 n 與 n+2 之間的關係和 $F(x)_{(2,3,c,k)}$與 $F(x+1)_{(2,3,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(2,3,n,k)}=(2+3)\frac{n-F(x)_{(g,3,c,k)}}{g}-b(x)_{(g,3,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(2,3,c,k)}+3\frac{F(x+1)_{(g,2,c,k)}-n}{2}]$$

其中:$F(x+1)_{(2,3,c,k)}\geqq n>F(x)_{(2,3,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.10

（三）$\alpha=3$

當殺 3 留 3 時, $c_{3,n}=1$ 情況如表十六, $c_{3,n}=2$ 情況如表十七, $c_{3,n}=3$ 情況如表十八,

表十六、殺 3 留 3($c_{3,n}=1$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
4	4_0	3_1	2_2	1_3							
7	6_1	5_2	4_3	7_0	3_4	2_5	1_6				
10	5_5	4_6	10_0	6_4	9_1	8_2	7_3	3_7	2_8	1_9	
13	11_2	10_3	6_7	12_1	5_8	4_9	13_0	9_4	8_5	7_6	...
16	4_{12}	16_0	12_4	5_{11}	11_5	10_6	6_{10}	15_1	14_2	13_3	...
19	10_9	6_{13}	18_1	11_8	17_1	16_3	12_7	5_{14}	4_{15}	19_0	...
22	16_6	12_{10}	5_{17}	17_5	4_{18}	22_0	18_4	11_{11}	10_{12}	6_{16}	...
25	22_3	18_7	11_{14}	23_2	10_{15}	6_{19}	24_1	17_8	16_9	12_{13}	...
28	28_0	24_4	17_{11}	4_{24}	16_{12}	12_{16}	5_{23}	23_5	22_6	18_{10}	...
31	6_{25}	30_1	23_8	10_{21}	22_9	18_{13}	11_{20}	29_2	28_3	24_7	...
34	12_{22}	5_{29}	29_5	16_{18}	28_6	24_{10}	17_{17}	4_{30}	34_0	30_4	...
37	18_{19}	11_{26}	35_2	22_{15}	34_3	30_7	23_{14}	10_{27}	6_{31}	36_1	...
40	24_{16}	17_{23}	4_{36}	28_{12}	40_0	36_4	29_{11}	16_{24}	12_{28}	5_{35}	...

表十七、殺 3 留 3($c_{3,n}=2$)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	5_3	6_2	4_4	8_0	7_1	3_5	2_6	1_7			
11	11_0	4_7	10_1	6_5	5_6	9_2	8_3	7_4	3_8	2_9	1_{10}
14	6_8	10_4	5_9	12_2	11_3	4_{10}	14_0	13_1	9_5	8_6	...
17	12_5	16_1	11_6	4_{13}	17_0	10_7	6_{11}	5_{12}	15_2	14_3	...
20	18_2	5_{15}	17_3	10_{10}	6_{14}	16_4	12_8	11_9	4_{16}	20_0	...
23	4_{19}	11_{12}	23_0	16_7	12_{11}	22_1	18_5	17_6	10_{13}	6_{17}	...
26	10_{16}	17_9	6_{20}	22_4	18_8	5_{21}	24_2	23_3	16_{10}	12_{14}	...
29	16_{13}	23_6	12_{17}	28_1	24_5	11_{18}	4_{25}	29_0	22_7	18_{11}	...
32	22_{10}	29_3	18_{14}	5_{27}	30_2	17_{15}	10_{22}	6_{26}	28_4	24_8	...
35	28_7	35_0	24_{11}	11_{24}	4_{31}	23_{12}	16_{19}	12_{23}	34_1	30_5	...
38	34_4	6_{32}	30_8	17_{21}	10_{28}	29_9	22_{16}	18_{20}	5_{33}	36_1	...
41	40_1	12_{29}	36_5	23_{18}	16_{25}	35_6	28_{13}	24_{17}	11_{30}	4_{37}	...

表十八、殺 3 留 3($c_{3,n}$=3)

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	6_0	5_1	4_2	3_3	2_4	1_5					
9	6_3	5_4	4_5	9_0	8_1	7_2	3_6	2_7	1_8		
12	12_0	11_1	10_2	6_6	5_7	4_8	9_3	8_4	7_5	3_9	...
15	6_9	5_{10}	4_{11}	12_3	11_4	10_5	15_0	14_1	13_2	9_6	...
18	12_6	11_7	10_8	18_0	17_1	16_2	6_{12}	5_{13}	4_{14}	15_3	...
21	18_3	17_4	16_5	6_{15}	5_{16}	4_{17}	12_9	11_{10}	10_{11}	21_0	...
24	24_0	23_1	22_2	12_{12}	11_{13}	10_{14}	18_6	17_7	16_8	6_{18}	...
27	6_{21}	5_{22}	4_{23}	18_9	17_{10}	16_{11}	24_3	23_4	22_5	12_{15}	...
30	12_{18}	11_{19}	10_{20}	24_6	23_7	22_8	30_0	29_1	28_2	18_{12}	...
33	18_{15}	17_{16}	16_{17}	30_3	29_4	28_5	6_{27}	5_{28}	4_{29}	24_9	...
36	24_{12}	23_{13}	22_{14}	36_0	35_1	34_2	12_{24}	11_{25}	10_{26}	30_6	...
39	30_9	29_{10}	28_{11}	6_{33}	5_{34}	4_{35}	18_{21}	17_{22}	16_{23}	36_3	...

▲其中:塗綠色表示 k=1~$c_{3,n}$ 值數字，

塗黃色表示 mod(k-1,3)+1=1

塗橘色表示 mod(k-1,3)+1=2

塗紅色表示 mod(k-1,3)+1=3

$\alpha=3$，$\beta=3$

n+3	1	2	3	3+1	3+2	3+3	3+4	...	3+n-1	3+n
n				$n-2_{\underline{2}}$	$n-1_{\underline{1}}$	$n_{\underline{0}}$	1	...	n-4	n-3
$A_{(3,3,n+3,k)}-A_{(3,3,n,k)}$				(3+1)-(n-2)=3+3-n	(3+2)-(n+1)=3+3-n	(3+3)-n=3+3-n	(3+4)-1=3+3	...	(3+n)-1-(n-4)=3+3	(3+n)-(n-3)=3+3

1. (1)將 n+3 個數中先殺掉 3，剩下數有 n 個(n+3-3 個)。
   (2)由於 n+3 個數中已經殺掉 3，再下就是留 3 ； 但是 n 個數中是殺 3。
   為了讓 n 個數與 n+3 個數中再來都是留 3，所以將 n 個數中從後面搬 3 個數往前補(也就是數字 n、n-1 和 n-2 前補)
   (3)如此 n 個數與 n+3 個數中都是留 3，n 個數與 n+3 個數中的殺和留相對
2. (1)若 $A_{(3,3,n,k)}\neq n-2\sim n$ ： $A_{(3,3,n+g,k)}-A_{(3,3,n,k)}=3+3\rightarrow[n+3-(3+3)-n]-(n-n)=-3$
   (2-1)若 $A_{(3,3,n,k)}=n-2\sim n$ ： n 為 $F_{(3,3,c,k)}$值，且 n-n=0...n-(n-2)=2　$\therefore b_{(3,3,c,k)}<3$
   (2-2) $b(x)_{(3,3,c,k)}+F(x)_{(3,3,c,k)}+3=3+1+2$ 或 3+2+1 或 3+3+0　$\therefore b(x)_{(3,3,c,k)}+F(x)_{(3,3,c,k)}+3=3+3$
3. 設 k=s，$mod(s-1,3)+1=c_{(3,n)}$
   則 k=s-2 和 s-1，mod(s-3,3)+1 和 $mod(s-2,3)+1\neq c_{(3,n)}$
   但是 $mod(n-1,3)+1=c_{(3,n)}$，所以當 k=s-2~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{3,3,s,s}=1$)，$s-A_{3,3,s,s}=s-1=k-1$
k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{3,3,s,s-1}=2$)，$s-A_{3,3,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$
k=s-2 為第 3 個淘汰($A_{3,3,s,s-2}=3$)，$s-A_{3,3,s,s-2}=s-3=(s-2)-1=k-1$

由上表推論:

(1)當 k=s-2~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將此 s 設為 $y_{(3,c)}$， 因此推論 $y_{(3,c)}$值公式:
　　設 $mod(y_{(3,c)}-1,3)+1=c_{(3,n)}$；其中 $y_{(3,c)}\geqq k>y_{(3,c)}-3$

(2)由 $s-A_{(3,3,s,s)}\sim s-A_{(3,3,s,s-2)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(3,3,c,k)}$及 $b(1)_{(3,3,c,k)}$值:
　　$F(1)_{(3,3,c,k)}=y_{(3,c)}+3[\frac{k-1}{3}]$
　　$b(1)_{(3,3,c,k)}=mod(k-1,3)$

4. $F(x)_{(3,3,c,k)}$ 及 $b(x)_{(3,3,c,k)}$演算過程如下:
   $F(x)_{(3,3,c,k)}+3m-b(x+1)_{(3,3,c,k)}=(3+3)m-b(x)_{(3,3,c,k)}$
   $F(x)_{(3,3,c,k)}=3m-b(x)_{(3,3,c,k)}+b(x+1)_{(3,3,c,k)}$
   $F(x+1)_{(3,3,c,k)}=3m-b(x)_{(3,3,c,k)}+b(x+1)_{(3,3,c,k)}+3m=(3+3)m-b(x)_{(3,3,c,k)}+b(x+1)_{(3,3,c,k)}$
   因此得結論:
   $F(x)_{(3,3,c,k)}=3m-b(x)_{(3,3,c,k)}+b(x+1)_{(3,3,c,k)}$
   $F(x+1)_{(3,3,c,k)}=(3+3)m-b(x)_{(3,3,c,k)}+b(x+1)_{(3,3,c,k)}$
   其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(3,3,c,k)}+3<3+3$，
   此時$(F(x)_{(3,3,c,k)}+g)-A_{(3,3,F(x)+3,k)}<3$　$\therefore F(x)_{(3,3,c,k)}+3$ 為 F 值
   ∴若 m<1，則 $F(x+1)_{(3,3,c,k)}=F(x)_{(3,3,c,k)}+3$
5. 由 n 與 n+3 之間的關係和 $F(x)_{(3,3,c,k)}$與 $F(x+1)_{(3,3,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(3,3,n,k)}=(3+3)\frac{n-F(x)_{(3,3,c,k)}}{3}-b(x)_{(3,3,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(3,3,c,k)}+3\frac{F(x+1)_{(3,3,c,k)}-n}{3}]$$

其中:$F(x+1)_{(3,3,c,k)}\geqq n>F(x)_{(3,3,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.11

（四）α=g

α=g，β=3

n+g	1	2	...	g	g+1	g+2	g+3	g+4	...	g+n-1	g+n
n					$n-2_{2}$	$n-1_{1}$	n_{0}	1	...	n-4	n-3
$A_{(g,3,n+g,k)}$ $-A_{(g,3,n,k)}$					(g+1)-(n-2) =g+3-n	(g+2)-(n+1) =g+3-n	(g+3)-n =g+3-n	(g+4)-1 =g+3	...	(g+n-1) -(n-4) =g+3	(g+n) -(n-3) =g+3

1.(1)將 n+g 個數中先殺掉 g，剩下數有 n 個(n+g-g 個)。

(2)由於 n+g 個數中已經殺掉 g，再下就是留 3 ； 但是 n 個數中是殺 g。

為了讓 n 個數與 n+g 個數中再來都是留 3，所以將 n 個數中從後面搬 3 個數往前補(也就是數字 n、n-1 和 n-2 前補)

(3)如此 n 個數與 n+g 個數中都是留 3，n 個數與 n+g 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(g,3,n,k)}\neq n-2\sim n$ ： $A_{(g,3,n+g,k)}-A_{(g,3,n,k)}=g+3\rightarrow[n+g-(g+3)-n]-(n-n)=-3$

(2-1)若 $A_{(g,3,n,k)}=n-2\sim n$ ： n 為 $F_{(g,3,c,k)}$值，且 n-n=0...n-(n-2)=2 $\therefore b_{(g,3,c,k)}<3$

(2-2) $b(x)_{(g,3,c,k)}+F(x)_{(g,3,c,k)}+g=g+1+2$ 或 g+2+1 或 g+3+0 $\therefore b(x)_{(g,3,c,k)}+F(x)_{(g,3,c,k)}+g=g+3$

3.設 k=s，$\mathrm{mod}(s-1,g)+1=c_{(g,n)}$

則 k=s-g+1~s-1，$\mathrm{mod}(s-g,g)+1\sim\mathrm{mod}(s-2,g)+1\neq c_{(g,n)}$

但是 $\mathrm{mod}(n-1,g)+1=c_{(g,n)}$，所以當 k=s-g+1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{g,3,s,s}=1$)，$s-A_{g,3,s,s}=s-1=k-1$
k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{g,3,s,s-1}=2$)，$s-A_{g,3,s,s-1}=s-2=(s-1)-1=k-1$
...
k=s-g+2 為第 g-1 個淘汰($A_{g,3,s,s-g+2}=g-1$)，$s-A_{g,3,s,s-g+2}=s-g+1=(s-g+2)-1=k-1$
k=s-g+1 為第 g 個淘汰($A_{g,3,s,s-g+1}=g$)，$s-A_{g,3,s,s-g+1}=s-g=(s-g+1)-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s-g+1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將 s 設為 $y_{(g,c)}$， 因此推論 $y_{(g,c)}$值公式:

設 $\mathrm{mod}(y_{(g,c)}-1,g)+1=c_{(g,n)}$；其中 $y_{(g,c)}\geqq k>y_{(g,c)}-g$

(2)由 $s-A_{(g,3,s,s)}\sim s-A_{(g,3,s,s-g+1)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(g,3,c,k)}$及 $b(1)_{(g,3,c,k)}$值:

$F(1)_{(g,3,c,k)}=y_{(g,c)}+g[\frac{k-1}{3}]$

$b(1)_{(g,3,c,k)}=\mathrm{mod}(k-1,g)$

4.$F(x)_{(g,3,c,k)}$ 及 $b(x)_{(g,3,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(g,3,c,k)}+gm-b(x+1)_{(g,3,c,k)}=(g+3)m-b(x)_{(g,3,c,k)}$

$F(x)_{(g,3,c,k)}=3m-b(x)_{(g,3,c,k)}+b(x+1)_{(g,3,c,k)}$

$F(x+1)_{(g,3,c,k)}=3m-b(x)_{(g,3,c,k)}+b(x+1)_{(g,3,c,k)}+gm=(g+3)m-b(x)_{(g,3,c,k)}+b(x+1)_{(g,3,c,k)}$

因此得結論:

$F(x)_{(g,3,c,k)}=3m-b(x)_{(g,3,c,k)}+b(x+1)_{(g,3,c,k)}$

$F(x+1)_{(g,3,c,k)}=(g+3)m-b(x)_{(g,3,c,k)}+b(x+1)_{(g,3,c,k)}$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(g,3,c,k)}+g<g+3$，

此時$(F(x)_{(g,3,c,k)}+g)-A_{(g,3,F(x)+g,k)}<3$ $\therefore F(x)_{(g,3,c,k)}+g$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(g,3,c,k)}=F(x)_{(g,3,c,k)}+g$

5.由 n 與 n+g 之間的關係和 $F(x)_{(g,3,c,k)}$與 $F(x+1)_{(g,3,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(g,3,n,k)}=(g+3)\frac{n-F(x)_{(g,3,c,k)}}{g}-b(x)_{(g,3,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(g,3,c,k)}+3\frac{F(x+1)_{(g,3,c,k)}-n}{g}]$$

其中:$F(x+1)_{(g,3,c,k)}\geqq n>F(x)_{(g,3,c,k)}$

※各項符號請見 p.11

四、α=g，β=h

n+g	1	2	...	g	g+1	g+2	...	g+h	g+h+1	...	g+n-1	g+n
n					$n-h+1_{h-1}$	$n-h+2_{h-2}$	...	n_0	1	...	n-h-1	n-h
$A_{(g,h,n+g,k)}$ $-A_{(g,h,n,k)}$					(g+1)-(n-h+1) =g+h-n	(g+2)-(n-h+2) =g+h-n	...	(g+h) -n =g+h-n	(g+h+1) -1 =g+h	...	(g+n-1) -(n-h-1) =g+h	(g+n) -(n-h) =g+h

1.(1)將 n+g 個數中先殺掉 g，剩下數有 n 個(n+g-g 個)。

(2)由於 n+g 個數中已經殺掉 g，再下就是留 h ； 但是 n 個數中是殺 g。

為了讓 n 個數與 n+g 個數中再來都是留 h，所以將 n 個數中從後面搬 h 個數往前補(也就是數字 n-h+1~n 前補)

(3)如此 n 個數與 n+g 個數中都是留 h，n 個數與 n+g 個數中的殺和留相對

2.(1)若 $A_{(g,h,n,k)}\neq$n-h+1~n ： $A_{(g,h,n+g,k)}-A_{(g,h,n,k)}=g+h\rightarrow[n+g-(g+h)-n]-(n-n)=-h$

(2-1)若 $A_{(g,h,n,k)}$=n-h+1~n ： n 為 $F_{(g,h,c,k)}$值，且 n-n=0...n-(n-h+1)=h-1 $\therefore b_{(g,h,c,k)}<h$

(2-2) $b(x)_{(g,h,c,k)}+F(x)_{(g,h,c,k)}+g=g+1+h-1$ 或 g+2+h-2 ... 或 g+h+0

$\therefore b(x)_{(g,h,c,k)}+F(x)_{(g,h,c,k)}+g=g+h$

3.設 k=s，$\mathrm{mod}(s-1,g)+1=c_{(g,n)}$

則 k=s-g+1~s-1，$\mathrm{mod}(s-g,g)+1$~$\mathrm{mod}(s-2,g)+1\neq c_{(g,n)}$

但是 $\mathrm{mod}(n-1,g)+1=c_{(g,n)}$，所以當 k=s-g+1~s，第一個數會落在 n=s

k=s 為第 1 個淘汰($A_{(g,h,s,s)}=1$)，$s-A_{(g,h,s,s)}=s-1=k-1$
k=s-1 為第 2 個淘汰($A_{(g,h,s,s-1)}=2$)，$s-A_{(g,h,s-1,s-1)}=s-2=(s-1)-1=k-1$
...
k=s-g+2 為第 g-1 個淘汰($A_{g,h,s,s-g+2}=g-1$)，$s-A_{g,h,s,s-g+2}=s-g+1=(s-g+2)-1=k-1$
k=s-g+1 為第 g 個淘汰($A_{g,h,s,s-g+1}=g$)，$s-A_{g,h,s,s-g+1}=s-g=(s-g+1)-1=k-1$

由上推論:

(1)當 k=s-g+1~s 時，第一個數會落在 n=s，筆者將 s 設為 $y_{(g,c)}$， 因此推論 $y_{(g,c)}$值公式:

設 $\mathrm{mod}(y_{(g,c)}-1,g)+1=c_{(g,n)}$；其中 $y_{(g,c)}\geqq k>y_{(g,c)}-g$

(2)由 $s-A_{(g,h,s,s)}$~$s-A_{(g,h,s,s-g+1)}=k-1$ 的條件推論至 $F(1)_{(g,h,c,k)}$及 $b(1)_{(g,h,c,k)}$值:

$F(1)_{(g,h,c,k)}=y_{(g,c)}+g[\frac{k-1}{h}]$

$b(1)_{(g,h,c,k)}=\mathrm{mod}(k-1,g)$

4.$F(x)_{(g,h,c,k)}$ 及 $b(x)_{(g,h,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(g,h,c,k)}+gm-b(x+1)_{(g,h,c,k)}=(g+h)m-b(x)_{(g,h,c,k)}$

$F(x)_{(g,h,c,k)}=hm-b(x)_{(g,h,c,k)}+b(x+1)_{(g,h,c,k)}$

$F(x+1)_{(g,h,c,k)}=hm-b(x)_{(g,h,c,k)}+b(x+1)_{(g,h,c,k)}+gm=(g+h)m-b(x)_{(g,h,c,k)}+b(x+1)_{(g,h,c,k)}$

因此得結論:

$F(x)_{(g,h,c,k)}=hm-b(x)_{(g,h,c,k)}+b(x+1)_{(g,h,c,k)}$

$F(x+1)_{(g,h,c,k)}=(g+h)m-b(x)_{(g,h,c,k)}+b(x+1)_{(g,h,c,k)}$

其中:若 m<1，表示 $F(x)_{(g,h,c,k)}+g<g+h$，

此時$(F(x)_{(g,h,c,k)}+g)-A_{(g,h,F(x)+g,k)}<h$ $\therefore F(x)_{(g,h,c,k)}+g$ 為 F 值

$\therefore$若 m<1，則 $F(x+1)_{(g,h,c,k)}=F(x)_{(g,h,c,k)}+g$

5.由 n 與 n+g 之間的關係和 $F(x)_{(g,h,c,k)}$與 $F(x+1)_{(g,h,c,k)}$之間的關係，推展下列公式

$$A_{(g,h,n,k)}=(g+h)\frac{n-F(x)_{(g,h,c,k)}}{g}-b(x)_{(g,h,c,k)}$$
$$=n-[b(x+1)_{(g,h,c,k)}+h\frac{F(x+1)_{(g,h,c,k)}-n}{g}]$$

其中:$F(x+1)_{(g,h,c,k)}\geqq n>F(x)_{(g,h,c,k)}$

※各項符號請詳見 p.12

五、m 之探討

推算 $F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}$及 $b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}$ 其中:$x\neq 1$

$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}$及 $b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}$演算過程如下:

$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+\alpha m-b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}=(\alpha+\beta)m-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}$

$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta m-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}$

$F(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta(m+1)-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}+\alpha m$

$=(\alpha+\beta)m-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}$

因此得結論:

$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta m-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}$

$F(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}=(\alpha+\beta)m-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}$

證明:$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta m-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}$中的 $m+1$ 及 $b(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}$ 值只有唯一一組解

設有一標準標準,m 為 p:

$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta p-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}$

b 值定義:$\beta>b\geqq 0$

若 $m=p+1$:$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta(p+1)-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+[b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}+\beta]\Rightarrow b(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}\geqq\beta$(矛盾)

若 $m=p-1$:$F(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}=\beta(p+1)-b(x)_{(\alpha,\beta,c,k)}+[b(x+1)_{(\alpha,\beta,c,k)}-\beta]\Rightarrow b(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}<0$(矛盾)

因此 m 有一數標準 p 是成立的!

六、第 k 個淘汰與倒數第 k 個留下

在去年四十五屆中小學全國科展國小組中，有一題新竹縣小朋友的作品，題目是當殺 1 留β時，任意第 k 個淘汰數。而本篇是當殺α留β時，任意倒數第 k 個留下。筆者以殺 1 留 1 情形來分析。兩篇情形如表二十一及表二十二，比較如表二十三

表二十一、第 k 個淘汰

n	k											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1_{0}											
2	1_{1}	2_{0}										
3	1_{2}	3_{0}	2_{1}									
4	1_{3}	3_{1}	2_{2}	4_{0}								
5	1_{4}	3_{2}	5_{0}	4_{1}	2_{3}							
6	1_{5}	3_{3}	5_{1}	2_{4}	5_{0}	4_{2}						
7	1_{6}	3_{4}	5_{2}	7_{0}	4_{3}	2_{5}	6_{1}					
8	1_{7}	3_{5}	5_{3}	7_{1}	2_{6}	6_{2}	4_{4}	8_{0}				
9	1_{8}	3_{6}	5_{4}	7_{2}	9_{0}	4_{5}	8_{1}	6_{3}	2_{7}			
10	1_{9}	3_{7}	5_{5}	7_{3}	9_{1}	2_{8}	6_{4}	10_{0}	8_{2}	4_{6}		
11	1_{10}	3_{8}	5_{6}	7_{4}	9_{2}	11_{0}	4_{7}	8_{3}	2_{9}	10_{1}	6_{5}	
12	1_{11}	3_{9}	5_{7}	7_{5}	9_{3}	11_{1}	2_{10}	6_{6}	10_{2}	4_{8}	12_{0}	8_{4}

表二十二、倒數第 k 個留下

n	k											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1_{0}											
2	2_{0}	1_{1}										
3	2_{1}	3_{0}	1_{2}									
4	4_{0}	2_{2}	3_{1}	1_{3}								
5	2_{3}	4_{1}	5_{0}	3_{2}	1_{4}							
6	4_{2}	6_{0}	2_{4}	5_{1}	3_{3}	1_{5}						
7	6_{1}	2_{5}	4_{3}	7_{0}	5_{2}	3_{4}	1_{6}					
8	8_{0}	4_{4}	6_{2}	2_{6}	7_{1}	5_{3}	3_{5}	1_{7}				
9	2_{7}	6_{3}	8_{1}	4_{5}	9_{0}	7_{2}	5_{4}	3_{6}	1_{8}			
10	4_{6}	8_{2}	10_{0}	6_{4}	2_{8}	9_{1}	7_{3}	5_{5}	3_{7}	1_{9}		
11	6_{5}	10_{1}	2_{9}	8_{3}	4_{7}	11_{0}	9_{2}	7_{4}	5_{6}	3_{8}	1_{10}	
12	8_{4}	12_{0}	4_{8}	10_{2}	6_{6}	2_{10}	11_{1}	9_{3}	7_{5}	5_{7}	3_{9}	1_{11}

表二十三、第 k 個淘汰與倒數第 k 個留下比較

情形	比較						
第 k 個淘汰	k=1	k=2	k=3	...	k=n-2	k=n-1	k=n
倒數第 k 個留下	k=n	k=n-1	k=n-2	...	k=3	k=2	k=1
相加	n+1	n+1	n+1	...	n+1	n+1	n+1

推論:

第 k 個淘汰=倒數第 n+1-k 個留下

倒數第 k 個留下=第 n+1-k 個淘汰

七、可行性分析

1. $\frac{F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}-n}{\alpha}$ 是否為整數?

分析如下表二十四

表二十四、$\frac{F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}-n}{\alpha}$ 整除可行性

α	c	演算過程	結果	是否能被α整除
1	1	(1x+1)-(1y+1)	1(x-y)	V
2	1	(2x+1)-(2y+1)	2(x-y)	V
	2	(2x+2)-(2y+2)	2(x-y)	V
3	1	(3x+1)-(3y+1)	3(x-y)	V
	2	(3x+2)-(3y+2)	3(x-y)	V
	3	(3x+3)-(3y+3)	3(x-y)	V
α	c	(αx+c)-(αy+c)	α(x-y)	V

▲其中:$F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}=\alpha x+c$；$n=\alpha y+c$，$x>y$

2. $\frac{n-F(x)_{\alpha,\beta,c,k}}{\alpha}$ 是否為整數?

$\frac{n-F(x)_{\alpha,\beta,c,k}}{\alpha}$ 與 $\frac{F(x+1)-n_{\alpha,\beta,c,k}}{\alpha}$ 的意思相同，皆可以同樣的方法解決，如下表二十五

表二十五、$\frac{n-F(x)_{\alpha,\beta,c,k}}{\alpha}$ 整除可行性

α	c	演算過程	結果	是否能被α整除
1	1	(1x+1)-(1y+1)	1(x-y)	V
2	1	(2x+1)-(2y+1)	2(x-y)	V
	2	(2x+2)-(2y+2)	2(x-y)	V
3	1	(3x+1)-(3y+1)	3(x-y)	V
	2	(3x+2)-(3y+2)	3(x-y)	V
	3	(3x+3)-(3y+3)	3(x-y)	V
α	c	(αx+c)-(αy+c)	α(x-y)	V

▲其中：$n=\alpha x+c$；$F(x+1)_{\alpha,\beta,c,k}=\alpha y+c$，$x>y$

伍、結論與應用

設α=g，β=h

1. $c_{g,n}=\mathrm{mod}(n-1,g)+1$
2. 設 $\mathrm{mod}(y_{g,c}-1,g)+1=c_{g,n}$

   其中 $y_{g,c} \geqq k > y_{g,c}-g$
3. $F(1)_{g,h,c,k}=y_{g,c}+g[\frac{k-1}{h}]$
4. $b(1)_{g,h,c,k}=\mathrm{mod}(k-1,h)$
5. $F(x)_{g,h,c,k}=h(m+1)-b(x)_{g,h,c,k}+b(x+1)_{g,h,c,k}$

   $F(x+1)_{g,h,c,k}=(g+h)(m+1)-b(x)_{g,h,c,k}+b(x+1)_{g,h,c,k}$

   若 $m+1 \notin N$:

   $F(x+1)_{g,h,c,k}=F(x)_{g,h,c,k}+g$

$$A_{g,h,n,k}=(g+h)\frac{n-F(x)_{g,h,c,k}}{g}-b(x)_{g,h,c,k} \quad \text{其中}:F(x+1)_{g,h,c,k} \geqq n > F(x)_{g,h,c,k}$$

$$=n-[b(x+1)_{g,h,c,k}+h\frac{F(x+1)_{g,h,c,k}-n}{g}] \quad \text{其中}:F(x+1)_{g,h,c,k} \geqq n > F(x)_{g,h,c,k}$$

陸、參考文獻

一、中文部分

1. 楊皓綜、翁郁婷（第 39 屆）。 **公主如何救王子**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 39 屆國小組數學科。
2. 簡民惠（第 40 屆）。**天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 40 屆國中組數學科。
3. 林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為（第 43 屆）。**九死一生**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 43 屆高中組數學科。
4. 林千雅、陳珉儒、邱晨熙、梁育棻（第 44 屆）。**公主的抉擇**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。
5. 戴于珽（第 44 屆）。**我要活下去**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。
6. 段凱文、梁廷宇、羅子端、黃蛟晟（第 44 屆）。**王位繼承人**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。
7. 林奕丞、洪嘉蔓、陳廷、徐東葦。**探索俄羅斯遊戲法則之奧妙**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。
8. 葉佩雯。**老師無法解決的難題**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。
9. DONALD E. KNUTH 編譯者:陳衍文 （民 80 年七月）。**具體數學 CONCRETE MATHEMATICS**（9-20 頁）。格致圖書公司。

二、英文部分

1. DONALD E. KNUTH（民 86）。**The Art of Computer Programmibg VOLUME1**（162，184 頁）。Addison Wesley。
2. DONALD E. KNUTH（民 86）。**The Art of Computer Programmibg VOLUME3**（17-18 頁）。Addison Wesley。

評語

對於作品的製作頗費心思。然而本問題進一步的發展的空間十分有限。