

臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：工程學科

作品名稱：極速骨牌-骨牌終端速度及連鎖反應機制之探討

得獎獎項：工程學科第三名

候補代表：第二名

學 校：國立新竹高級中學

作 者：葉力維、黃耀仟

作者簡介



< 左：黃耀仟 右：葉力維 >

我們就讀於新竹高中，平常下課後，喜歡從事一些課外活動，像打球、玩電腦遊戲，有時也會做一些小小研究，比如觀察飼養小動物，對友校作問卷調查等等，雖然如此非常地花時間，常常弄得我們自己疲憊不堪，，甚至連考試都忘記，但是依然樂此不疲。這次做國際科展，盡了許多心力，雖累但覺得獲益許多。雖然報告不盡完善，但一定會在未來研究發展的更深更詳盡。

摘要

本研究主要在探討骨牌脈波在傳遞時的速度變化，並比較在不同的骨牌和不同的排列方式下骨牌的終端速度有何種差異；同時也研究骨牌在連鎖反應下能量的放大現象。

觀察後發現單列骨牌脈波在傳遞一段距離後，由於空氣阻力的影響，脈波將會達到一終端速度，此終端速度與骨牌高度成反比，而與骨牌質量平方成正比。骨牌的脈波傳遞在連鎖反應下仍有一終端速度，但大於單列之骨牌脈波速，且連鎖反應具有放大推力之功能。

由我們的研究可預測一系列物體傾倒時所花費時間和所能達到之終端速度，而連鎖反應可比擬為一雷射模型能量集中和釋放的機制，相信可利用骨牌儲存能量的機制應用於需迅速釋能的機械中。

Abstract

This research is mainly discussing the changing of velocity of a domino pulse, and comparing the terminal velocity of various kinds of dominos and arresting modules. Also we focus on the energy-enlarging fact of chain-reaction of domino series.

We found that after running a distance, the pulse of a single-series domino will finally reach a terminal velocity by the friction force of air. The terminal velocity will inversely proportion to the height of a single domino, and will proportion to the square of mass of a single domino. During a chain-reaction, the pulse still has a terminal velocity, but it is higher than the terminal velocity of a single series domino. The chain-reaction has an ability to enlarge the original force, too.

By the research, we are able to predict the time interval and the terminal velocity while a series of objects are falling. On the other hand, the chain reaction is similar with mechanism of energy concentration and emission of LASER. We also believe that this mechanism is able to explain and apply to those machines which need to release energy rapidly.

壹、研究動機

今年參加由思源科技教育金會主辦的骨牌趣味競賽時，拿到了近 1500 片骨牌，在準備競賽之餘，我們拿骨牌排列各式各樣的圖案，觀察到骨牌倒下所形成的脈波的速率似乎有些特殊的規律，同時骨牌排列十分類似橋墩，我們猜想橋墩在倒塌時，或許也會發生嚴重的骨牌效應，造成嚴重的破壞；恰好學校物理課也討論到與力學相關的部分，因此我們便決定要運用所學，先研究單純骨牌脈波傳遞時的速率和骨牌本身特性及排列方式此三者間的關係，更進一步探討骨牌釋放能量的機制及效能，而後類比應用於實際橋樑的建設上。

貳、研究目的

- 一、了解單一、單列骨牌倒下的機制及空氣阻力對骨牌脈波終端速率之影響
- 二、研究骨牌排列方式中排列間距及路徑曲率，對骨牌脈波終端速率之影響
- 三、應用骨牌模擬橋樑倒塌時橋墩間距對倒塌終端速度之關係
- 四、應用骨牌模擬橋樑倒塌時橋面載重對倒塌終端速度之關係

參、實驗器材

用品名稱	數量	規格	用途
骨牌	200 個	4.4x2.2x0.7(cm)	研究主題
光電控制計時器	5 組		測量時間
積木	20 個	1.8x1.8x7.2(cm)	架設儀器
水平儀	1 個		檢查桌面水平
直尺	20 把	30(cm)	模擬橋面
攝錄影機	1 台		快錄慢放以 測量脈波速率

肆、應用原理

如圖 4.1，長 L 、寬 W 、厚 D 、質量 M 之骨牌兩兩相距 X ，直線排列，假設骨牌為彈性碰撞，相撞後即分開，過程中不耗損能量。其終端速度 V 的公式：

$$V = \sqrt{0.851Mg(L - \sqrt{L^2 - X^2} - DX/L) / (L^2W(\pi/2 - \cos^{-1}(X/L)))} * \sqrt{L^2 - X^2} / L$$

證明：如圖 4.2，當前一個骨牌倒下，並且撞到後一個骨牌的瞬間，其與地面之夾角 $\theta = \cos^{-1}(X/L)$ 。各骨牌之重心原高 $L/2$ ，在撞到下一個骨牌時的高度降為

$$(L/2)\sin\theta + (D/2)\cos\theta。$$

所以位能釋出：

$$Mg((L/2) - (L/2)\sin\theta - (D/2)\cos\theta)$$

當骨牌脈波之速率穩定時，能量來源只有位能降，而動能的耗損來自空氣阻力。所以空氣阻力所作的功等於位能的消耗。設骨牌脈波終端速率為 V ，則單位時間內行進距離即為 V ，其撞到的空氣量將是骨牌劃過的扇形。當骨牌用 V 的速度去撞空氣，也就是空氣以 V 的速度撞向骨牌，而撞完後速度當然就是零。

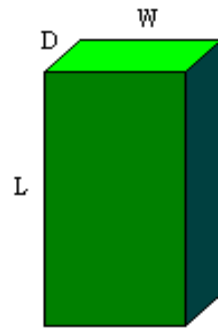


圖 4.1

若在 V 長度內有 $V/(X+D)$ 個骨牌，用衝量公式：

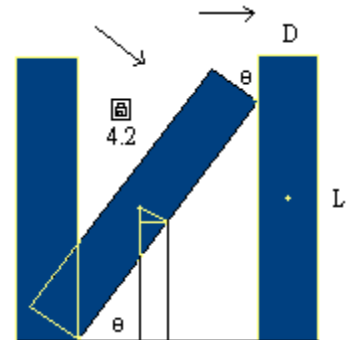
$$F\Delta t = m\Delta v$$

$$F \cdot 1 = \text{空氣質量} \cdot \text{空氣變化速度}$$

$$F = \text{空氣體積} \cdot \text{空氣密度} \cdot \text{空氣變化速度}$$

$$= \{L \cdot (\pi/2 - \theta) \cdot (L/2) \cdot W \cdot (V/(D+X)) \cdot (1000/24.5) \cdot 0.028.8\} \cdot V$$

$$= 1.175(1/2)L^2WV^2(\pi/2 - \theta)(1/(D+X))$$



F 再乘上這段期間內所走的距離 S

$$F \cdot S = 1.175(1/2)L^2WV^2(\pi/2 - \theta)(V/(D+X))$$

會等於這段長中所消耗的位能

$$Mg((L/2) - (L/2)\sin\theta - (D/2)\cos\theta) \cdot (V/(D+X)) \quad (\theta = \cos^{-1}(X/L))$$

兩式相等，即得到

$$V_{\text{傾斜}} = \sqrt{0.851Mg(L - \sqrt{L^2 - X^2} - DX/L) / (L^2W(\pi/2 - \cos^{-1}(X/L)))}$$

但是這個速度應該是往斜下方向，骨牌脈波為水平的，所以要再乘上 $\sin\theta$

$$V = \sqrt{0.851Mg(L - \sqrt{L^2 - X^2} - DX/L) / (L^2W(\pi/2 - \cos^{-1}(X/L)))} \cdot \sqrt{L^2 - X^2} / L$$

伍、 實驗過程

實驗一 骨牌間距與脈波終端速度的關係

1. 在水平桌面上，等距排放骨牌(如圖 5.1 裝置)。
2. 傾斜第一個骨牌，使其恰倒下，以啓動整列骨牌，骨牌脈波行進中，以五組光電管計時，測各間距之平均速度。
3. 分別作各種間距的骨牌列，測量其終端速度。

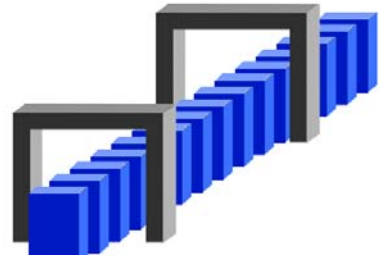


圖 5.1

實驗二 骨牌曲率與終端速度的關係

1. 在水平桌面上，在 10 個直線排列的骨牌後接上彎道行進的 10 個骨牌，其間兩兩骨牌的質心距離、相對位置、面對角度相同(如圖 5.2)。
2. 傾斜第一個骨牌，使其恰倒下，以啓動整列骨牌，骨牌脈波行進中，以兩組光電管測量骨牌列由彎道頭至尾的時間。
3. 分別測量半徑為 10cm 及 15cm 和 20cm 以及 30cm 的彎道上，骨牌脈波的平均速率。

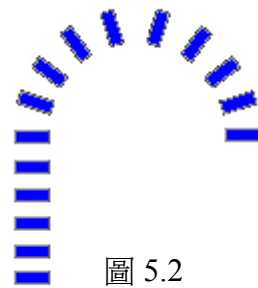


圖 5.2

實驗三 骨牌鏈鎖與終端速度的關係

1. 在水平桌面上，等距排放骨牌，在初始直線骨牌之後連上一個方陣(如圖 5.3 裝置)。
2. 傾斜第一個骨牌，使其恰倒下，以啓動整列骨牌，骨牌脈波行進中，以兩組光電管測量骨牌列自方陣由頭至尾的時間。
3. 分別測定鏈鎖數目為 3 到 7 方陣之骨牌脈波之平均速度。

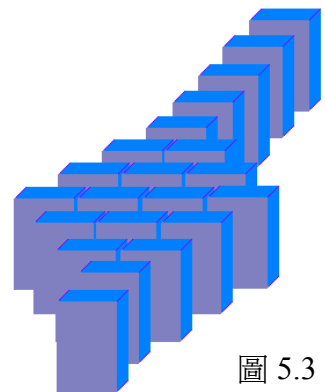


圖 5.3

實驗四 骨牌高度與終端速度的關係

1. 在水平桌面上，等距、橫向排放骨牌。
2. 傾斜第一個骨牌，使其恰倒下，以啓動整列骨牌，骨牌脈波行進中，以五組光電管計時，測各間距之平均速度。

實驗五 骨牌脈波模擬橋墩坍塌

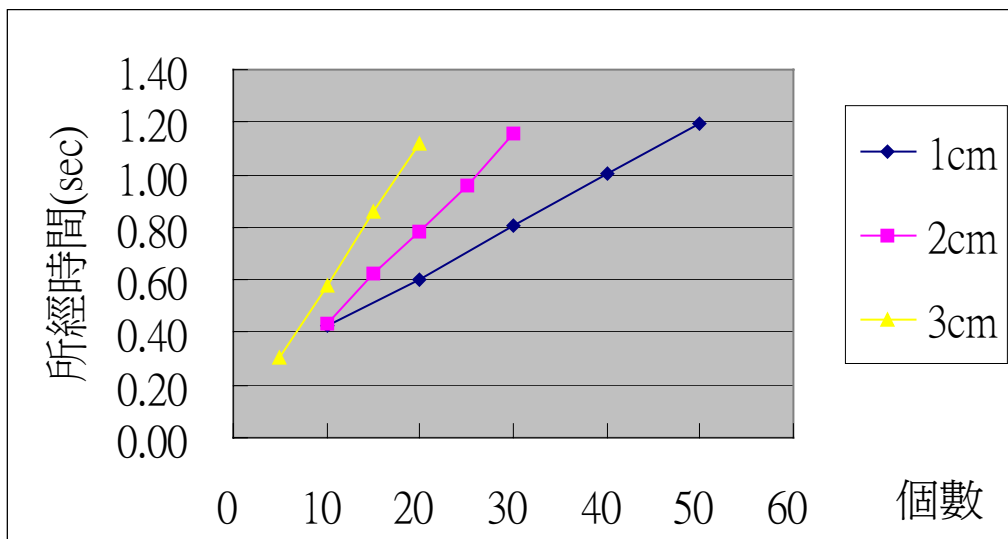
1. 在水平桌面上，等距排放骨牌，在初始直線骨牌之後的骨牌上方都疊放著比擬橋面的骨牌。
2. 傾斜第一個骨牌，使其恰倒下，以啟動整列骨牌，骨牌脈波行進中，以攝影機拍攝倒下過程並與無橋面之骨牌列比較。

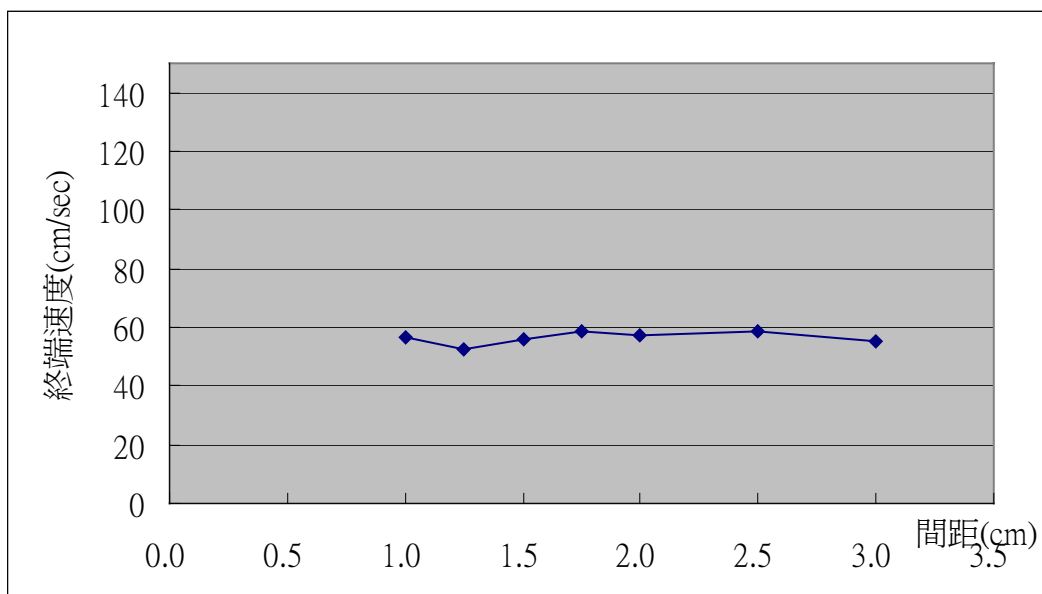
實驗六 橋墩間距、橋面載重與橋墩倒塌之關係

1. 在水平桌面上，以一把 30cm 的直尺模擬橋面，分別在橋下排列不同間距的骨排列模擬橋墩、橋面上放置不同個數的骨牌以載重。
2. 橋首接上若干骨牌，傾斜第一個，使其恰倒下，以模擬橋墩倒塌，骨牌脈波行進中，以攝影機拍攝倒下過程。
3. 反覆進行多次間距與載重的配對，討論各種間距、載重的影響下之情形。

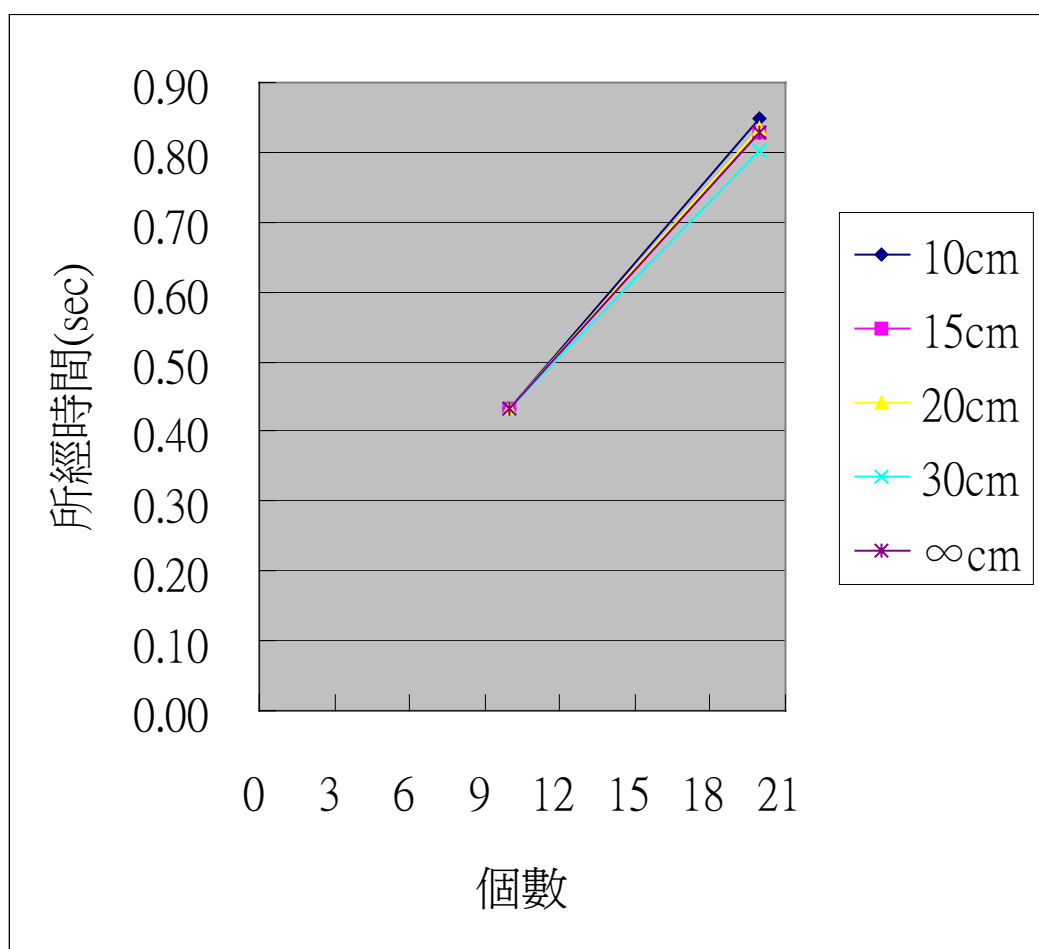
陸、 實驗結果

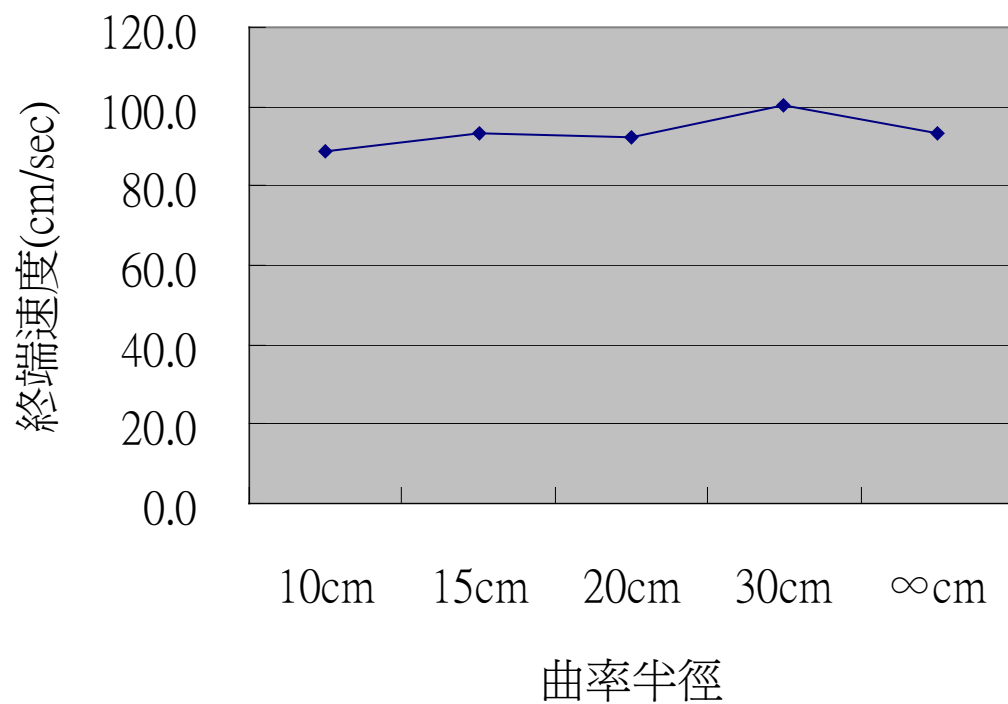
1. 骨牌間距與終端速度圖



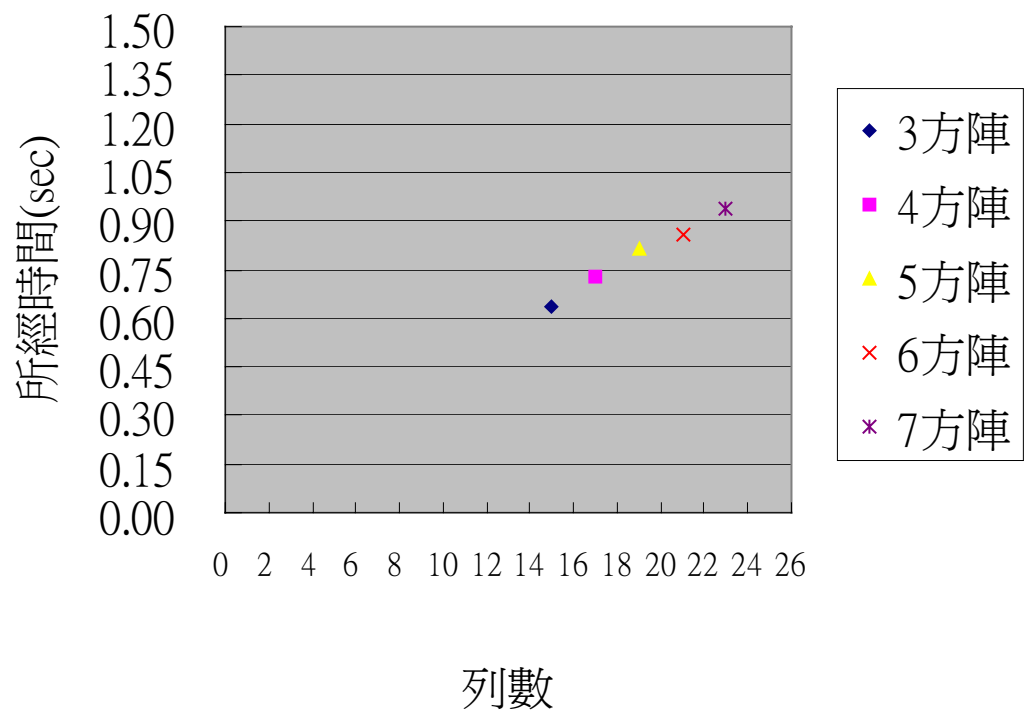


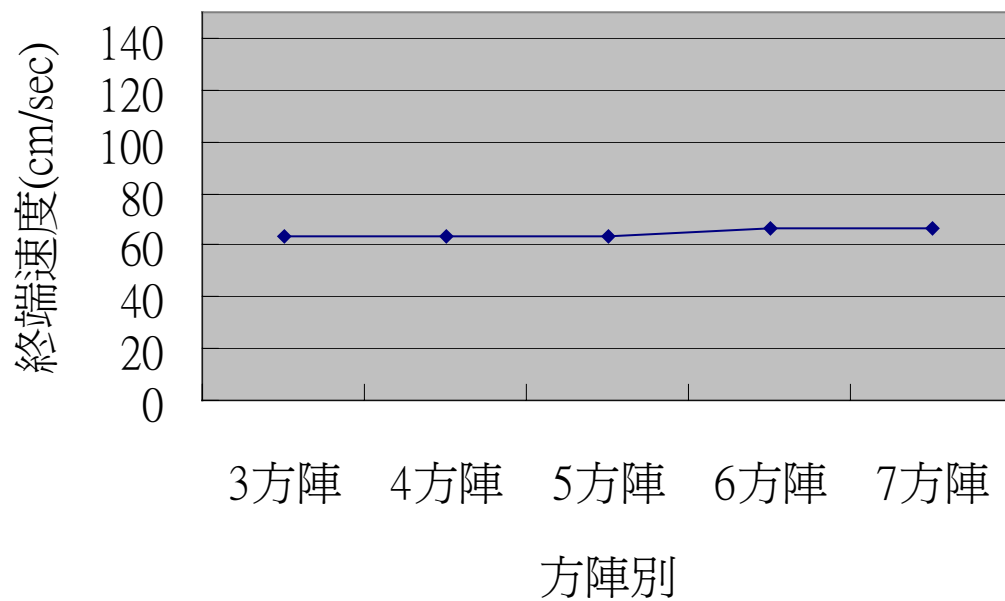
2. 骨牌曲率與終端速度圖



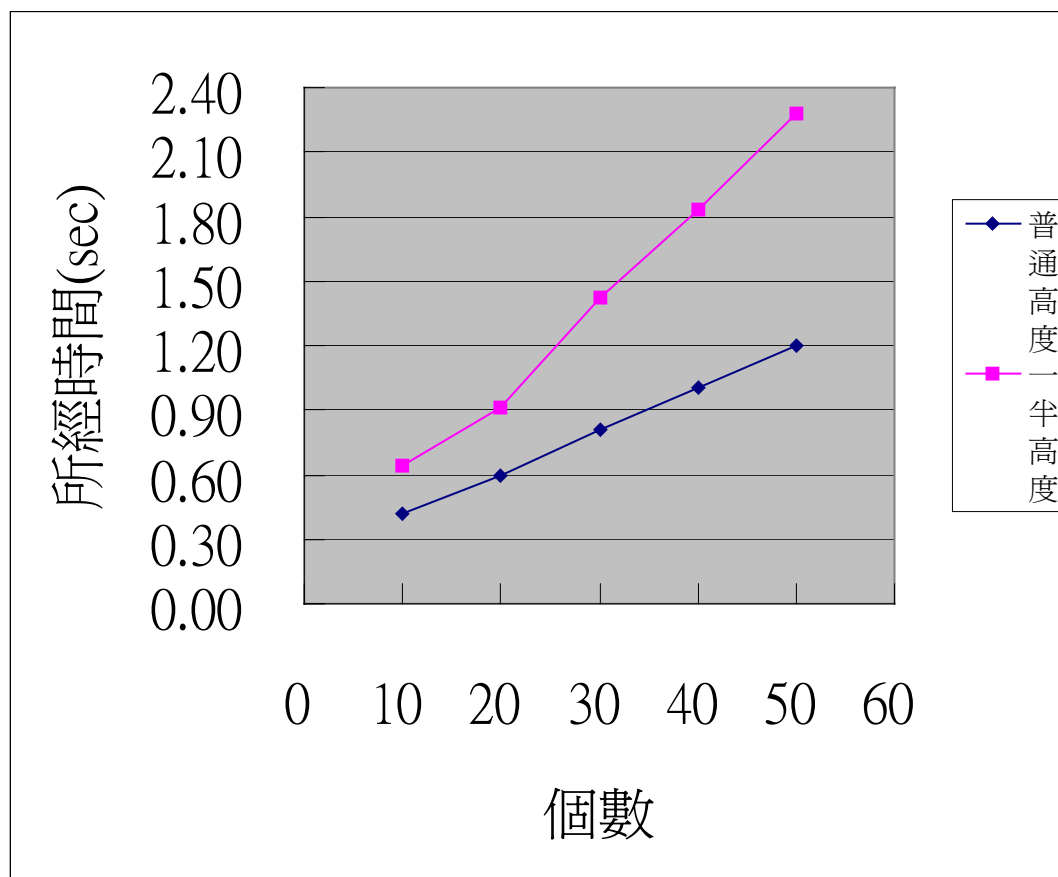


3. 骨牌連鎖與終端速度圖

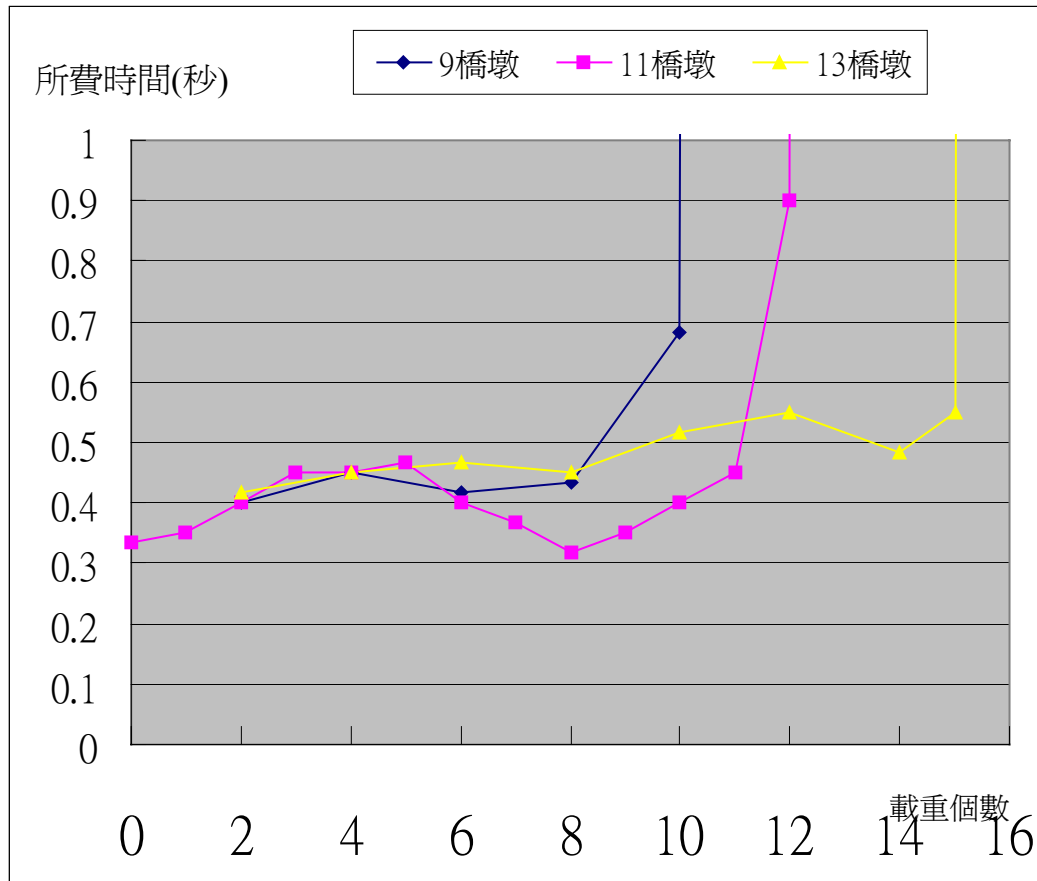




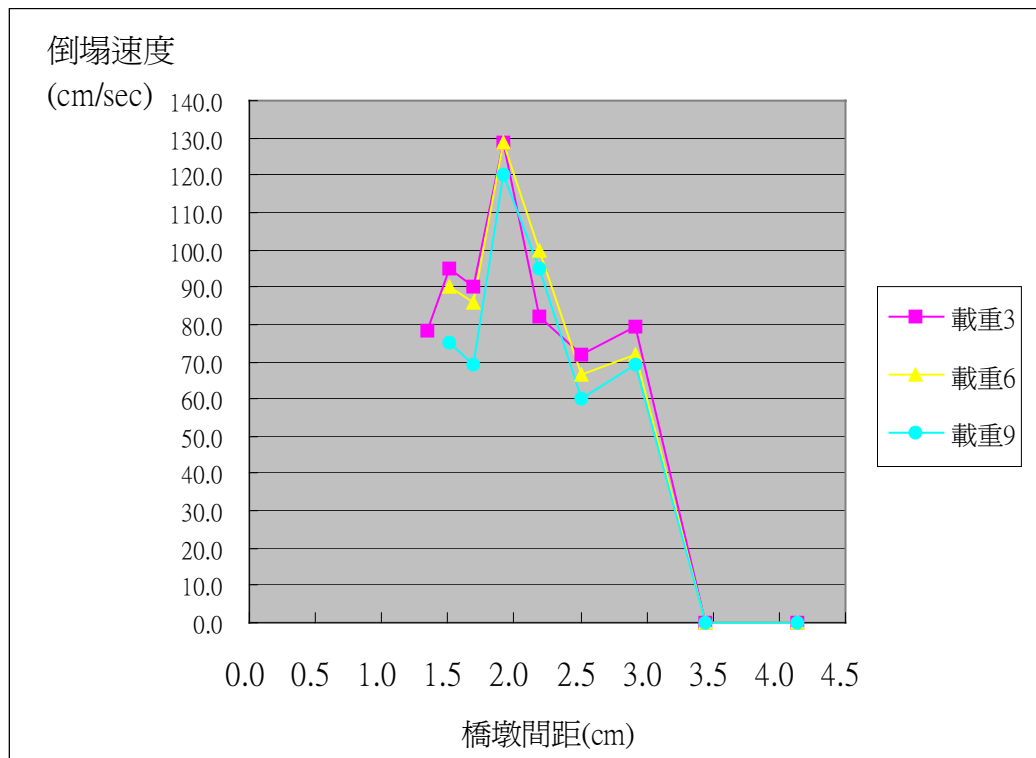
4. 骨牌高度與終端速度圖



5. 橋面載重與倒塌平均速度關係圖



6. 橋墩間距與倒塌平均速度關係圖



柒、 討論

1. 實驗二、三中直線排列的十個骨牌是必要的，它用來確定此行列在後續反應的啓始條件相同。
2. 實驗中，骨牌的碰撞應是非彈性碰撞，因此可能有熱量散逸。另一方面，骨牌表面並不平整，也會使骨牌能量傳遞不完全，因此所測出來的終端速度當然會比理論推算的略小，這是可以理解的。
3. 因為骨牌的動能是由位能所轉換來的，而骨牌在倒下的時候，其中有一段時間，質心的高度不是往下降，而是往上移。所以骨牌脈波要獲得能量，再撞擊下一個骨牌的瞬間時，質心位置必須高於原本位置，如此才能由倒下的動作獲得能量。所以說，骨牌與骨牌之間的距離不能太近，否則就不是因為相撞而得以傳遞，反而用壓的方式使下一個骨牌倒下。如此就不符合先前的彈性碰撞假設，並非我們所定義的骨牌脈波，故不予討論。
4. 由上述的理論，可以找到一個骨牌間距，使得上一個骨牌打到下一個時，給予的動能剛好足以讓第二個骨牌爬升至臨界點，恰恰好倒下，如此反覆循環，每個骨牌的運動情形都等同於第一個骨牌。如在我們的骨牌下，這個臨界間距為 1.35cm(我們的骨牌高 $L=4.3\text{cm}$ 、 $W=0.7\text{cm}$)。
5. 在實驗三中，鏈鎖方陣雖然後半段的速度加成不可小覷，但是在前半段的分散動能中實在是太慢了，以致整體來看比同長的直線骨牌脈波還慢。
6. 在鏈鎖方陣的測試中，位於方陣外圍週邊的骨牌特別容易向外傾倒，由運動完的骨牌狀況便可看出。這些沒有壓到下一塊骨牌的骨牌，自然也就沒有辦法把它所擁有的動能傳遞給下一個骨牌，因此測得的速度比單列骨牌的速度慢，但最末一個骨牌的速度前者平均較快。
7. 測時的裝置有兩種，其一，是由骨牌倒下遮蔽光線，因而觸發光電控制計時器造成。而究竟要把這一個觸發點設在骨牌的上方、中間、下方其實並沒有什麼不一樣，因為所測得的都是相同數目骨牌的週期。另一種是用數位攝影機將整個骨牌脈波拍攝下來，再使用電腦看每一影格(1/25sec)內骨牌倒下的情形。光電控制器的優點在於其精準度可達到小數四位，而數位攝影機的優點是一次的實驗可獲得大量的數據。
8. 在實驗五中，作為橋墩的骨牌在受到前一個骨牌敲擊時，不同於一般的直線骨牌，它會受到上方的橋面骨牌壓制而稍稍難以進行傳遞。在在那接觸的一瞬間，上方的橋面骨牌有點類似被撞飛起來，因此在此骨牌敲擊下一個骨牌時，上方的橋面骨牌是與它沒有接觸的。換句話說，除了要消耗一些將橋面骨牌撞飛的能量之外，在傳遞時等同於一般直線骨牌。

9. 空氣的阻力與物體運動速率的平方成正比 $f \propto v^2$ ，而骨牌所獲得的位能與個數(速度/(厚度+間距))成正比 $\Delta U \propto N$ 。而終端速度的就是因獲得能量等於損失能量而造成的。所以當個別骨牌的速度大於終端速度時，損失能量便會大於得到能量，速率便會因此而減小，直到等於終端速度為止。
10. 由實驗一、二、三等可以看出在不同狀況下，似乎都存在著一個速率。
11. 在實驗六的載重實驗中，橋面的增重與橋面倒塌有密切關係。一般橋面的重心都是在中央，所以當橋墩倒塌時浮撐橋面、帶動橋面應該是到橋之重心—中央時才有的事。但是當橋面平均地被增重時，浮撐橋面的橋墩卻越來越靠近橋首。這應該是因為正向力變大、橋面與橋墩摩擦力也變大，每個倒下的橋墩所給予橋面的衝力更大，使得橋面只需要接收較少個橋墩的力就能倒塌。
12. 當載重固定而橋墩間距改變時，若橋墩能發生碰撞並傳遞，有一間距能使橋之倒塌速度最快，也同樣有一間距能使橋之倒塌速度最慢。因為間距增大時，橋墩發生碰撞之距離增大，但同時橋墩碰撞時之速度也較大；反之，當橋墩間距縮小時，碰撞距離減小，但碰撞時速度也隨之遞減。再加上當間距越大，碰撞位置就越低也就越接近支點，力矩越小；而間距越小，碰撞位置就越高也就越遠離支點，力矩越大。綜合上述幾點，可知必有一種以上之間距可使橋墩之倒塌速達到最大值或最小值。以我們模擬之橋墩而言，使倒塌速度最大之間距為 1.92cm，大約為橋之高度的 41%；倒塌速度最小之間距為 2.57cm，大約為橋之高度的 53%。
13. 在實驗六中發現，在載重的情況下，若橋墩間距小於橋之高度不多的情況下，雖倒塌時橋墩有發生碰撞，但因位置低，力矩小，因此碰撞雖發生，但被橋面給予橋墩的摩擦力所抵銷，不會繼續傳遞。以我們模擬之橋墩而言，間距大小約只要大於橋之高度的 73%，倒塌便不會傳遞。
14. 固定不同間距下，載重數與橋墩倒塌所費時間關係有一定的波形圖。同樣的，固定不同載重下，間距與橋墩倒塌所費時間也有一定的波型圖。

捌、 結論

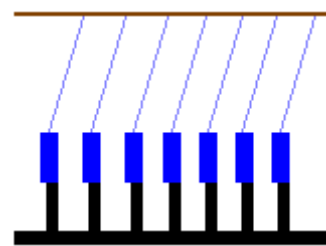
1. 長列骨牌有終端速度，不論直列或彎曲皆然。
2. 此終端速與骨牌長、寬、厚、重、材質有關，愈矮、愈窄、愈重、愈硬、愈厚的骨牌其脈波速度愈大。
3. 骨牌間距愈密，脈波終端速度愈大，但小於 1.35cm 時，已有壓潰現象，

暫不列入討論。

4. 有橋面(負載且連接)之骨牌列比無橋面的骨牌列脈波之終端速度小。
5. 橋墩之間距若非必要，應儘可能大於或等於橋之高度，以避免連續倒塌。
6. 若橋高大於橋墩間距，載重不宜過輕，破壞擴散才不會過快。

玖、 未來展望

1. 骨牌的型式可是將許多小的位能累積，用一連造成整個運動，以此機制可創造出變型的骨牌架在方。在上端也用一條固定物將每個骨牌繫住，個骨牌被推向第二個骨牌時也可以釋放位能造運動。



串的釋放來牌。(如圖底座的上如此在第一成一連串的

2. 骨牌這種積少成多的能量機制，相信也可以應用在許許多多的機械上，使得需要花很大的力量的運動可以用一長串微小力量的運動所取代，讓原本難以達成的目的化為反掌般的容易。目前認為人們由高樓層往低處走動也是利用了類似的原理，其他如電線杆傾倒和油槽的連鎖爆炸等的預防都與此相關，甚至在奈米領域亦有發展空間，十分值得好好地探討研究。
3. 在討論了橋面間距與載重之後，可以加以推廣至轉彎的橋面與上坡下坡等一般會出現的，甚至可以深入研究到橋面材質、連結方法，以及各種橋墩的重量、粗細等等，然後應用在實際的造橋技術。另外也可用這種倒塌的式，找出坍塌速率極值後，以其最快與最慢的預測，用來作為橋樑的安全參考值之一。應該也能以同樣型式的載重、間距關係來對應於微小的機械處理，用以算計其微妙多變的數值，相信會有很大的幫助。

壹拾、參考資料

奇妙的骨牌世界

作者：翁邦彥、吳欣儒、施傑文

七十九年度第三十屆中小學科學展覽

數學科第二名

壹拾壹、 附錄

實驗數據的平均值表

	實驗一	實驗一	實驗一	實驗二	實驗二	實驗二	實驗二
變因	間距 1cm	間距 2cm	間距 3cm	半徑 10cm	半徑 15cm	半徑 20cm	半徑 30cm
5			0.3009				
10	0.4225	0	0.5751	0.4319	0.4319	0.4319	0.4319
15		0.6246	0.8600				
20	0.6000	0.7802	1.1209	0.8486	0.8279	0.8336	0.8013
25		0.9558					
30	0.8089	1.1577					
40	1.0068						
50	1.1967						

	實驗二	實驗三	實驗三	實驗三	實驗三	實驗三	實驗四
變因	半徑 ∞	3 方陣	4 方陣	5 方陣	6 方陣	7 方陣	1cm
10	0.4319						0.6432
15		0.6362					

17			0.7276				
19				0.8123			
20	0.8275						0.9159
21					0.8567		
23						0.9354	
30							1.4192
40							1.8365
50							2.2785

載重 0		載重 3		載重 6		載重 9	
間距與平均速度		間距與平均速度		間距與平均速度		間距與平均速度	
7.00	0.00	7.00	0.00	7.00	0.00	7.00	0.00
8.00	78.26	8.00	0.00	8.00	0.00	8.00	0.00
9.00	94.74	9.00	79.65	9.00	72.00	9.00	69.23
10.00	100.00	10.00	72.00	10.00	66.67	10.00	60.00
11.00	90.00	11.00	81.82	11.00	100.00	11.00	94.74
12.00	91.84	12.00	128.57	12.00	128.57	12.00	120.00
13.00	85.71	13.00	90.00	13.00	85.71	13.00	69.23
14.00	94.74	14.00	94.74	14.00	90.00	14.00	75.00
15.00	100.00	15.00	78.26	15.00		15.00	

9 橋墩		第幾個橋墩造成			
載重個數	花費秒數	平均速率	橋面倒塌	橋面浮撐	橋面卡住
2	0.4	0.75		5	
4	0.45	0.666667		5	
6	0.416667	0.72		4	
8	0.433333	0.692308		4	
10	0.683333	0.439024	4		
12	3.33E+98	9E-100			4
11 橋墩		第幾個橋墩造成			
載重個數	花費秒數	平均速率	橋面倒塌	橋面浮撐	橋面卡住
0	0.333333	0.9			
1	0.35	0.857143			
2	0.4	0.75			
3	0.45	0.666667		6	
4	0.45	0.666667		5	
5	0.466667	0.642857		5	

6	0.4	0.75	5		
7	0.366667	0.818182	5		
8	0.316667	0.947368	4		
9	0.35	0.857143	4		
10	0.4	0.75	4		
11	0.45	0.666667	4		
12	0.9	0.333333	4		
13	3.33E+98	9E-100			4
13 橋墩			第幾個橋墩造成		
載重個數	花費秒數	平均速率	橋面倒塌	橋面浮撐	橋面卡住
2	0.416667	0.72		6	
4	0.45	0.666667		6	
6	0.466667	0.642857		5	
8	0.45	0.666667	5		
10	0.516667	0.580645	5		
12	0.55	0.545455	4		
14	0.483333	0.62069	4		
15	0.55	0.545455	4		
16	3.33E+98	9E-100			4

評 語

探討骨牌倒下的物理現象，其中推導出終極速度的理論公式，以及實驗出各種狀況下的實際值。本作品也將前述結果擴大運用到橋面影響橋墩倒下的模擬現象，具有相當的創意與應用企圖。實驗技巧與分析能力都隨研究進程而逐漸完備，是一個優良作品，但應更有系統地分析理論與實驗值之間的關係。