

台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：畢氏定理演譯的正三角形分割研究

得獎獎項：數學科佳作

學 校：臺北市立建國高級中學

作 者：邱冠霖

畢氏定理演譯的正三角形分割研究 摘要

關鍵字: 畢氏定理、幾何分割、正三角形、益智拼圖

畢氏定理($a^2+b^2=c^2$) 歷經 25 世紀, 發現了數百種的幾何論證法; 而畢氏定理演譯出的正三角形 ($\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$) 幾何分割研究, 卻一直沒有人研究。因此, 承襲著之前處理幾何分割問題的經驗, 決定挑戰畢氏定理演譯的正三角形分割研究。

本文研究兩正三角形, 經切割後拼成另一大正三角形; 期間以 GSP 及 AutoCAD 繪製分析幾何圖形, 並建立了 4 種分割模式, 更深入分出 9 種分割方法, 且探討了各種條件下之極限值。繼而歸納可能的最佳及通用分割模式, 得到了 3 段式「最佳分割模式」及準「通用分割模式」, 提供這方面問題一個可應用於所有條件之完善解決方案。

本研究成果豐碩, 補足了相關領域的空檔, 且可製成益智又富挑戰性之拼圖系列, 不管用作教具或遊戲, 對建立益智幾何相關資料, 有莫大貢獻!

The Study of Regular Triangle Dissection Extending from Pythagorean Theorem

ABSTRACT

keywords: Pythagorean Theorem, Geometry Dissection, Regular Triangle, Jigsaw puzzle

Twenty five centuries after its discovery, hundreds of proofs have been given for the Pythagorean Theorem ($a^2+b^2=c^2$). But, research about regular triangle dissection extending from Pythagorean Theorem has always been lacking. So, based on previous experience with geometric dissection problems, I have decided to do a research on regular triangle dissection extending from Pythagorean theorem.

This research dissects two regular triangles and assembles them into a large regular triangle Using GSP and AutoCAD to draw and analyze geometric shapes, four dissection models and nine dissection methods are constructed. The extreme values under all conditions are also discussed, as are the best and generic dissection models There is a Three-section type “best dissection model” and a semi “generic dissection model” Offering a perfect solution to this kind of problem that can be used under all conditions.

This study yields numerous results as well as filling in blanks in similar fields. It can also be made into challenging jigsaw puzzles for educational or entertainment purposes.

畢氏定理演譯的正三角形分割研究

The Study of Regular Triangle Dissection Extending from Pythagorean Theorem

一、前言

國外網站 <http://www.treasure-troves.com/math/PythagoreanTheorem.html> 中，收集了 29 種畢氏定理的幾何證明法，但千篇一律都是以正方形為例（圖 1-1），以表達畢氏定理的論證。而 The great G. Polya analyzes: 「*In right-angled triangles the figure on the side subtending the right angle is equal to the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.*」(圖 1-2、圖 1-3)，但是查遍網站、書籍，就是看不到有關 G. Polya 所說的畢氏定理在其他相似形情況下的分割圖例及資料。

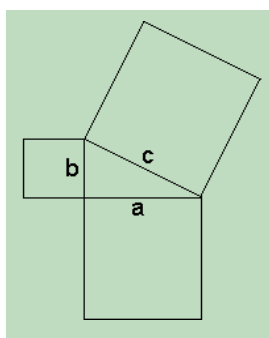


圖 1-1

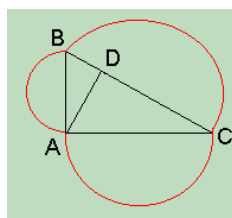


圖 1-2

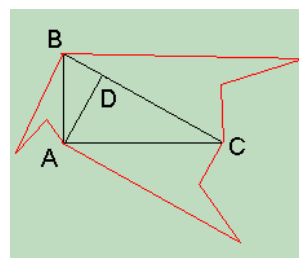


圖 1-3

後來在網路上，又看到這份有關三個正三角形之分割的資料：「*Take three equilateral triangles, of side lengths 8, 9, and 12, and cut them into a total of five pieces that can form a larger equilateral triangle.*」(圖 1-4、圖 1-5)，使我聯想到畢氏定理與等積幾何分割轉換間的關係，在對這個問題產生興趣後，經過先期分析研究，發現可行性頗高，但為了使研究更深入，因此定題目為「畢氏定理演譯的正三角形分割研究」。



圖 1-4



圖 1-5

本文為研究畢氏定理演譯出的正三角形 ($\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$) 幾何分割 (圖 1-6)，即分割兩正三角形 ($\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$)，拼成一大正三角形 ($\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$)。本作品目的在找出可能的分割模式、探討可能的最佳分割及通用分割模式，希冀能為這類問題提供一完善之解決方案，並建立益智幾何拼圖相關資料，藉此補足相關領域的空檔，以喚起更多的人加入此領域的後續研究。

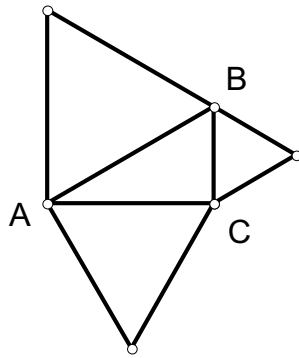


圖 1-6

二、 研究方法與過程

1. 圖書館查詢相關書籍、國內外網路收集相關資料。
2. 以 AutoCAD 繪出各種可能設計圖形，試行分割圖形並進行先期整理分析。
3. 建立幾何變換型式，研究分割模式及理論基礎。
4. 使用新分割模式，以 AutoCAD 進行各特定條件正三角形分割研究。
5. 以 GSP 研究新分割模式之限制條件以及推導邊界值。
6. 研究各種新分割模式可設計出之最佳分割方法以及通用分割方法。
7. 整理結果，並以 GSP 繪出展示圖及驗證各項結果。

三、 研究內容

(一)、 幾何轉換分析

本研究中，牽涉到的定性定值的幾何變換，茲以下圖 3-1.1 說明如下：

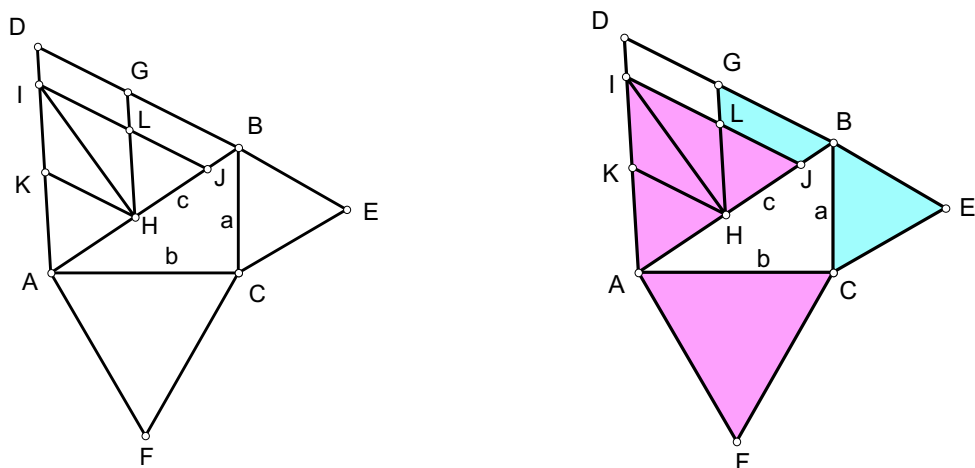


圖 3-1.1

若直角 $\triangle ABC$ ，兩股之短邊為 a ，長邊為 b ，斜邊為 c ；

且 $\triangle ACF = \triangle AIJ$ ， $\triangle BCE = \triangle GBH$ ；則

考慮到分割塊數越少越好，故優先考慮將其中短邊之正 $\triangle BCE$ 當作一完整分割塊，長邊

之正 $\triangle ACF$ 則推論出以下四種幾何面積轉換方式：

1. 第 I 型：正三角形 \rightarrow 等腰梯形（ $\triangle ACF = \triangle AIJ = \text{梯形 } ADGH$ ）
2. 第 II 型：等腰梯形 \rightarrow 平行四邊形（ $\text{梯形 } KIJH = \text{平行四邊形 } KDGH$ ）
3. 第 III 型：三角形 \rightarrow 斜梯形（ $\triangle IJH = \text{梯形 } IDGH$ ）
4. 第 IV 型：正三角形 \rightarrow 平行四邊形（ $\triangle LJH = \text{平行四邊形 } IDGL$ ）

上列 4 種變換圖式，分別表示如：圖 3-1.2、圖 3-1.3、圖 3-1.4、圖 3-1.5。

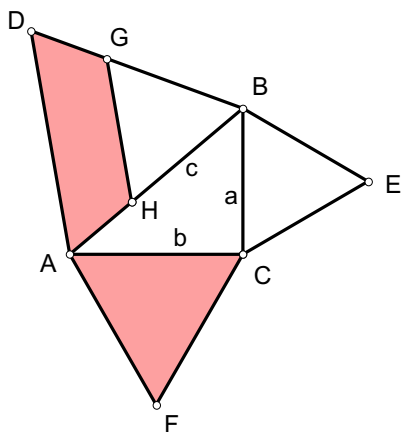


圖 3-1.2

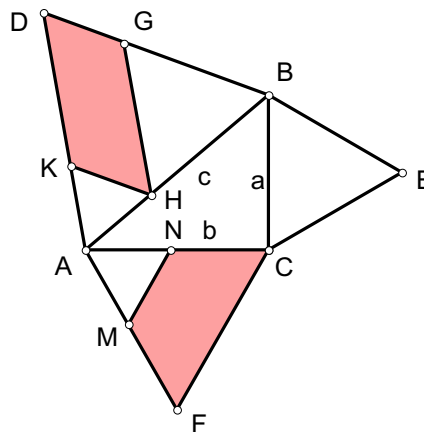


圖 3-1.3

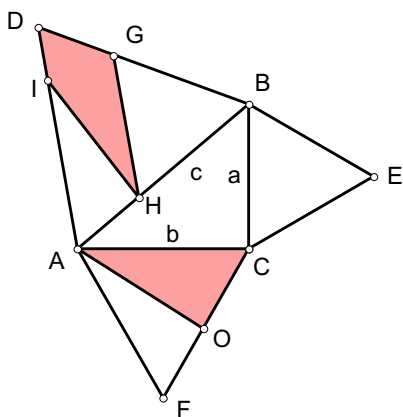


圖 3-1.4

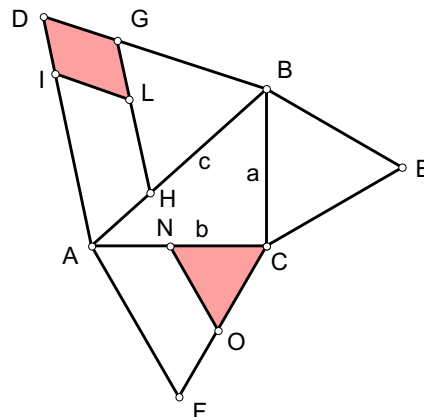


圖 3-1.5

至於幾何形狀之間分割線相互變換，牽涉不同分割模式，其線條變換不同，以下逐項詳細說明。

(二)、分割模式之建立

1. 第 I 型：正三角形 \rightarrow 等腰梯形

由下圖 3-2.1 可知，

正三角形 $ACD \rightarrow$ 梯形 $ILMN$ 中，

E 、 F 分別為 AC 、 CD 線段中點， $EF = GH = 1/2 (AD)$ 。

本分割模式線段轉換分別為：

- (1). $EG = 1/2(LM + IN)$
- (2). $FI = 1/2(LI)$
- (3). $JH = 1/2(MN)$
- (4). $OP = GH = 1/2(AD)$
- (5). $CF = 1/2(AC) = 1/2(CD) = CE$

因此，本分割模式得到結果：如圖 3-2.2。

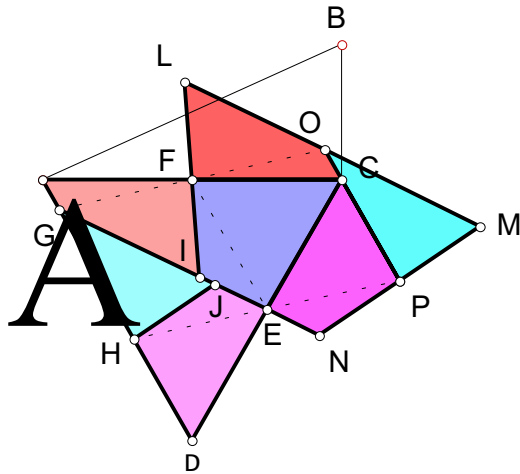


圖 3-2.1

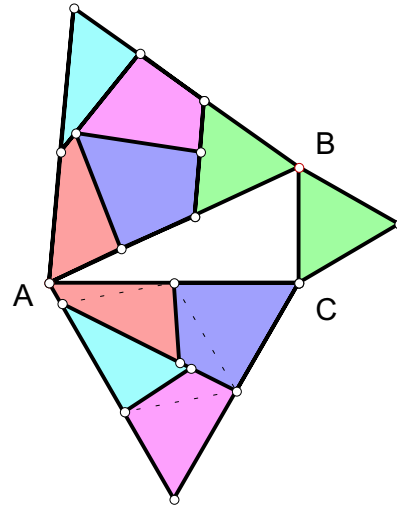


圖 3-2.2

2. 第 II 型：等腰梯形→平行四邊形

由下圖 3-2.3 可知，
 梯形 $ACFE \rightarrow$ 平行四邊形 $MNOJ$ 中，
 K 、 L 分別為 AE 、 CF 線段中點，
 本分割模式線段轉換分別為：

- (1). $GH = MJ = NO$
- (2). $KI = 1/2(MN) = 1/2(JO) = JL$

本分割模式可得到 2 種情形：第 1 種如圖 3-2.4，第 2 種如圖 3-2.5。

圖 3-2.4 中， $GH = BC = a$ ； $KI = JL = (c - a)/2$

圖 3-2.5 中， $GH = BC = c - a$ ； $KI = JL = a/2$

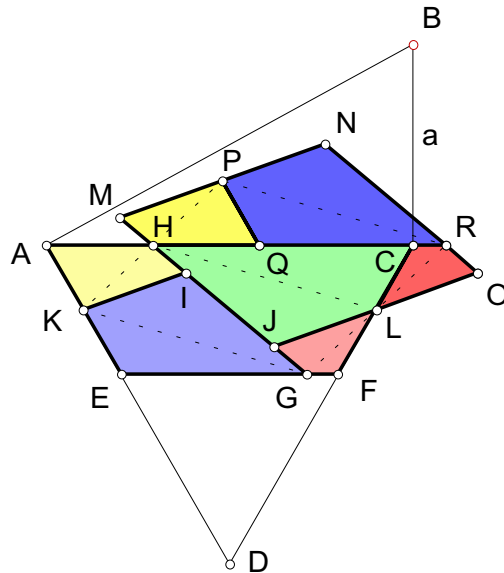


圖 3-2.3

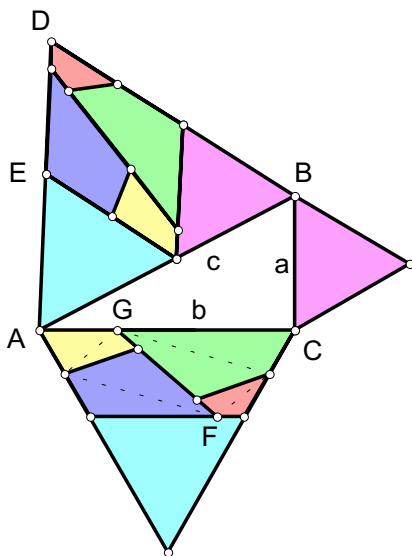


圖 3-2.4

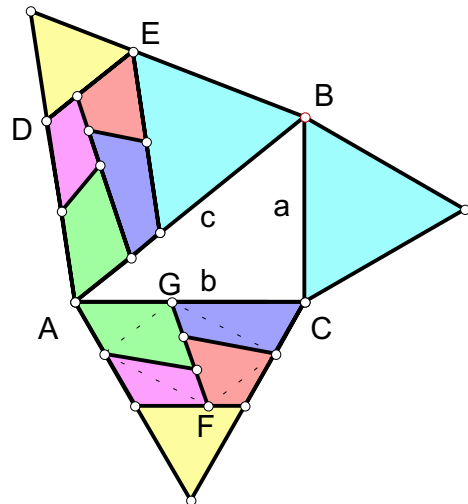


圖 3-2.5

此 2 種圖式，因為安排位置不同，所以會出現不同邊界值，下一節會加以分析到。

3. 第 III 型：三角形→斜梯形

由下圖 3-2.6 可知，

三角形 ACG→梯形 NLMI

本分割模式會出現 4 種情況：

(1) 第 III 型之第一種情況

此例中，E、H 分別為 CG、AG 線段中點， $CG = AC - (AB - BC)$ ，表示如下圖 3-2.6。
此情況線段轉換分別為：

1. $EF = 1/2(NI + LM)$
2. $JH = 1/2(NL)$
3. $KI = 1/2(IM)$

$$4. \quad NI = (IF + FJ)$$

$$5. \quad LM = (IE + EJ)$$

因此，本分割模式第一種情況可得到如圖 3-2.7 之結果。
此情況所得結果，因為出現一塊細狹形狀，效果不佳。

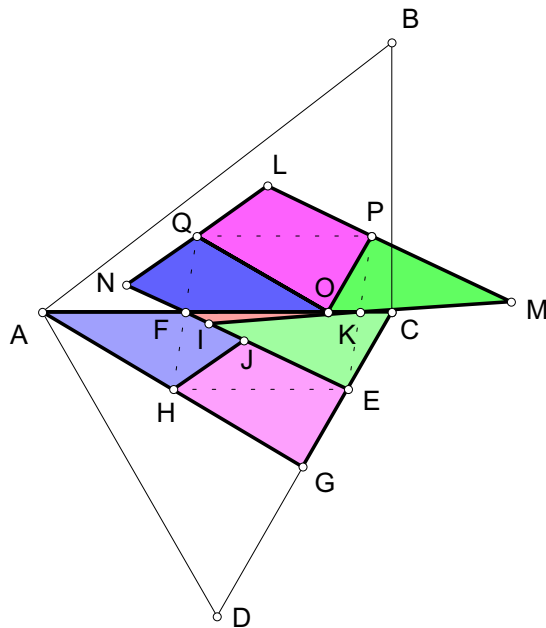


圖 3-2.6

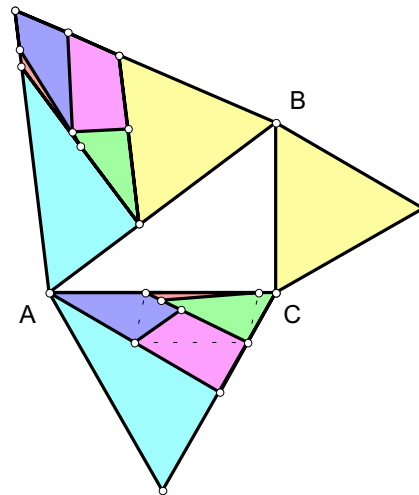


圖 3-2.7

(2) 第 III 型之第二種情況

此例中，E、F 分別為 AC、CH 線段中點， $EF = IG = 1/2 (AH)$ ， $CH = AC + BC - AB$ ，表示如下圖 3-2.8。此情況線段轉換分別為：

1. $EG = 1/2(EK + LM)$
2. $IJ = 1/2(KL)$
3. $EF = 1/2(EM) = 1/2(AH) = IG = NO$
4. $LM = (JG + EG)$

因此，本分割模式第二種情況可得到如圖 3-2.9 之結果。
此情況所得結果，形狀較為均勻，效果較佳。

3. $EF = 1/2(KF) = 1/2(AH) = GJ = NO$

在本分割模式第四種情況可得到如圖 3-2.13 之結果；圖中出現一塊反面拼接情形。此情況所得結果，形狀亦較為均勻，效果也較佳。

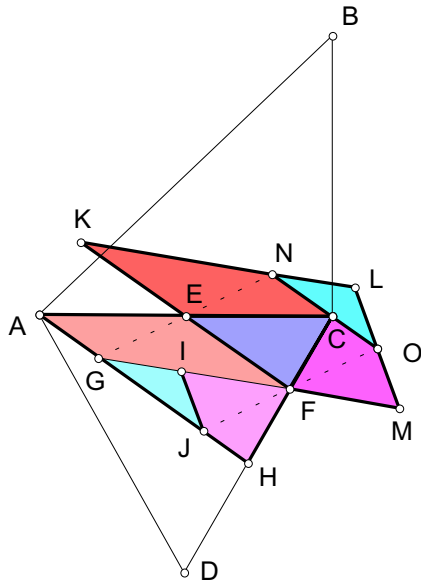


圖 3-2.12

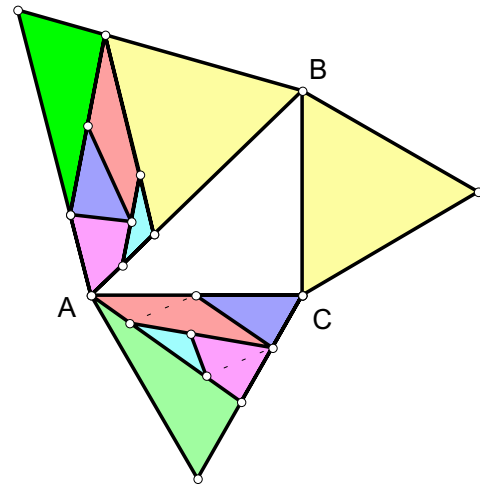


圖 3-2.13

4. 第 IV 型：正三角形→平行四邊形

由下圖 3-2.14 可知，

正三角形 KCL→梯形 IMNO 中，

E、F 分別為 KC、CL 線段中點， $EF = 1/2(KL) = GH$ 。

此情況線段轉換分別為：

1. $FG = IO = MN$
2. $EI = 1/2(MI) = 1/2(NO) = OQ = JH$
3. $PQ = GH = 1/2(KL) = 1/2(CL) = CF = CE$

第 IV 型分割模式得到結果，分割塊不均勻，效果亦不佳：如圖 3-2.15。

此外，第 IV 型分割模式亦可以如圖 3-2.16 之安排，此例與圖 3-2.15 會出現不同極限值，下一節會加以分析到。

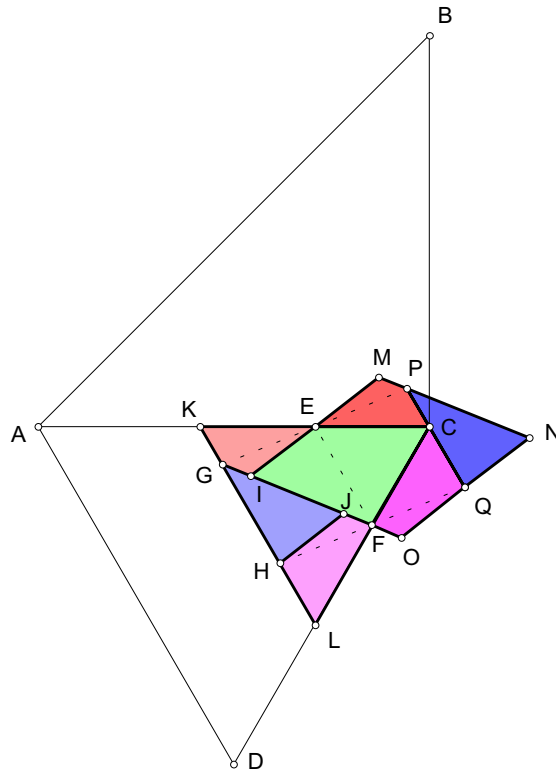


圖 3-2.14

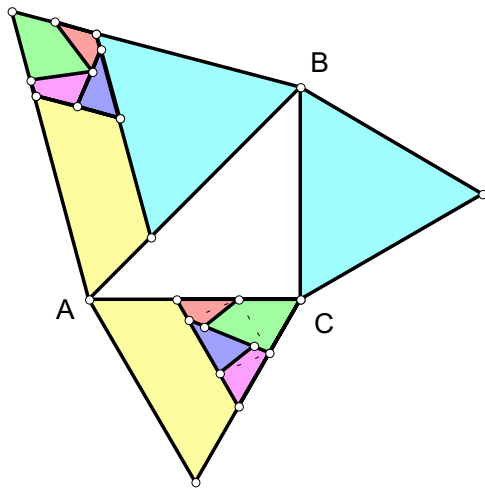


圖 3-2.15

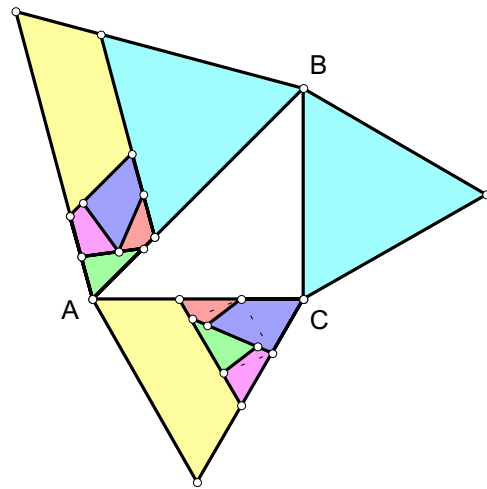


圖 3-2.16

(三)、各種分割模式應用之極限範圍及特例

設 直角 $\triangle ABC$ ，短邊股長為 a ，長邊股長為 b ，斜邊為 c ； $\angle BAC = \angle A = \alpha$ ：

1. 第 I 型分割模式之極限值與「整併法」

由上一章節，圖 3-2.1 基本模式線段轉換： $EG = 1/2(LM + IN)$ ；

若 $EG = AE$ ，則 I 、 J 兩點重疊， O 、 C 兩點重疊，此時出現第 I 型分割模式之最大極限值；
如圖 3-3.1、圖 3-3.2。

由圖可知： $(a+c)/2 = (\sqrt{3}/2)b$ ，則

直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$ ；且 $\alpha=\angle BAC=\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})=30^\circ$ ；

亦即，第 I 型分割模式僅適用於 $\alpha \leq 30^\circ$ 時。

另外，以「整併法」將圖 3-2.17 進行單元分割，如圖 3-3.3；再整併，即出現更少分割塊之效果，如圖 3-3.4。

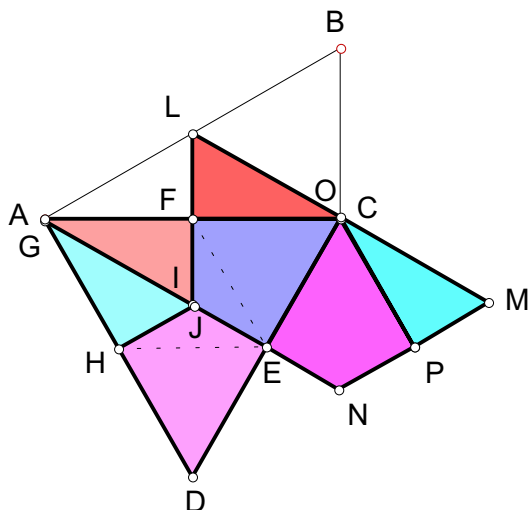


圖 3-3.1

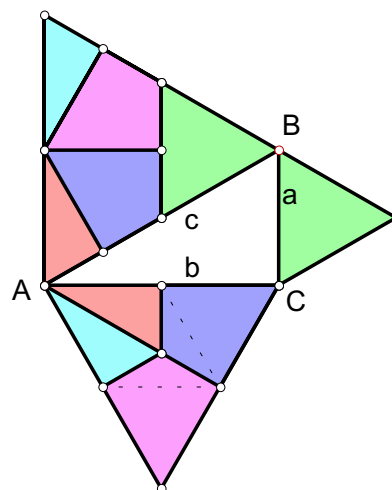


圖 3-3.2

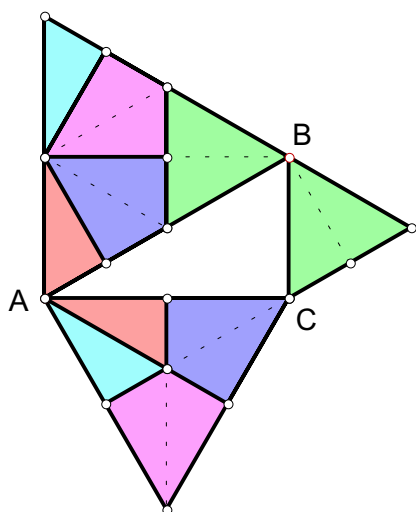


圖 3-3.3 「整併法」進行單元分割

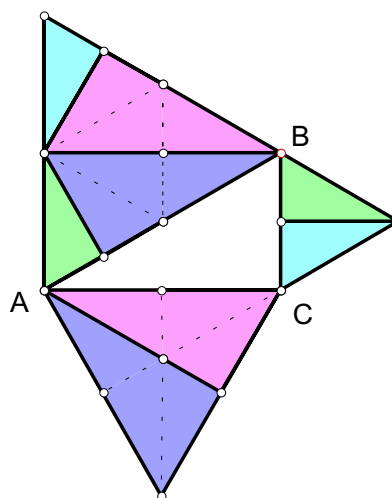


圖 3-3.4 經整併出現最少分割塊

2. 第 II 型分割模式之 2 種極限值

(1). 第 II-1 型之情況

由圖 3-2.3 第 II 型基本模式線段轉換： $GH=MJ=NO=BC=a$ ；

若 $HG=HF$ ，此時 G 、 F 兩點重疊，

由圖可知： $a^2 - (c-a)^2 = ((\sqrt{3}/2)(b - (c-a)))^2$ ，則

直角 $\triangle ABC$ 邊長之比： $a:b:c=2:3:\sqrt{13}$ ；且 $\alpha=\angle BAC=33.8^\circ$ ；

則出現此情況之最大極限值；如圖 3-3.5、圖 3-3.6。

亦即，第 II 型分割模式第一種情況僅適用於 $\alpha \leq 33.8^\circ$ 時。

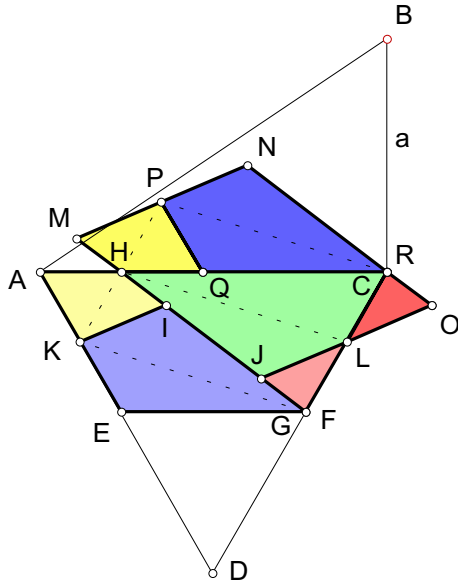


圖 3-3.5

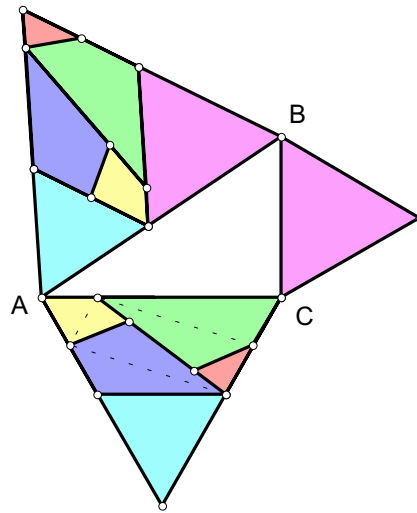


圖 3-3.6

(2) . 第 II-2 型之情況

另一種第 II 型基本模式線段轉換為： $GH = MI = NO$ ；

當 $GH =$ 梯形 $ACFE$ 之高時，即 $c - a = GH$ ，此時 H 、 I 重疊， J 、 G 重疊， Q 、 C 重疊， N 、 R 亦重疊；

$$\because HK = a/2, HC = b/2$$

$$\therefore a : b = HK : HC$$

又由圖可知：

$$(b + c - a) / 2 = (\sqrt{3}/2) a$$

$$\Rightarrow a : b = 2\sqrt{3} + 2 : 2\sqrt{3} + 3$$

故，直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比： $a : b : c = 2\sqrt{3} + 2 : 2\sqrt{3} + 3 : \sqrt{37 + 20\sqrt{3}}$ ；

$$\text{且 } \alpha = \angle BAC = \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} + 3} \right) = 40.208^\circ ;$$

則出現此情況最大極限值；如圖 3-3.7、圖 3-3.8。

亦即，第 II 型分割模式第二種情況僅適用於 $\alpha \leq 40.208^\circ$ 時。

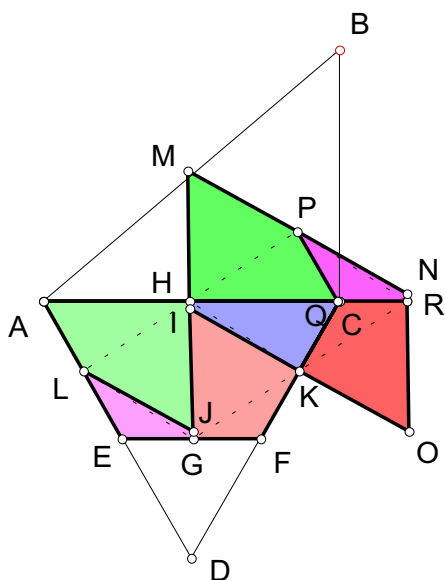


圖 3-3.7

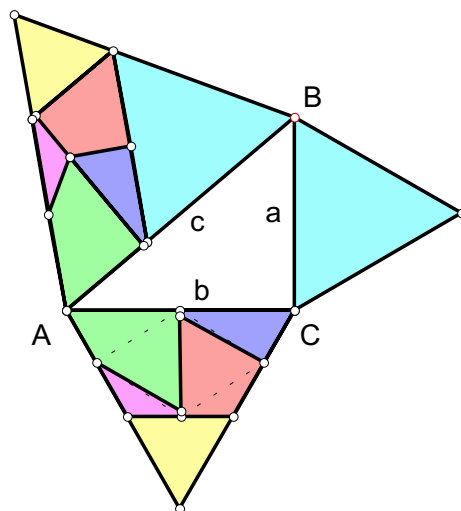


圖 3-3.8

3. 第 III 型分割模式之 4 種極限值

(1) . 第 III-1 型之情況

由圖 3-2.6 第 III 型基本模式第一種情況之線段轉換： $EF = 1/2 (NI + LM)$ ； $AG = MI$ ；
若 $EF = (1/2) AG = QO$ ，此時

出現此情況之最大極限值；如圖 3-3.9、圖 3-3.10。

且由圖可知， $(c - (b - a))^2 = b^2 + (c - a)^2 - 2b(c - a) \cos 60^\circ$

則，直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比： $a : b = 1 : 2 + \sqrt{5} - \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}$ ；

且 $\alpha = \angle BAC = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) = 33.645^\circ$ ；

即第 III 型分割模式第一種情況僅適用於 $\alpha \leq 33.645^\circ$ 時。

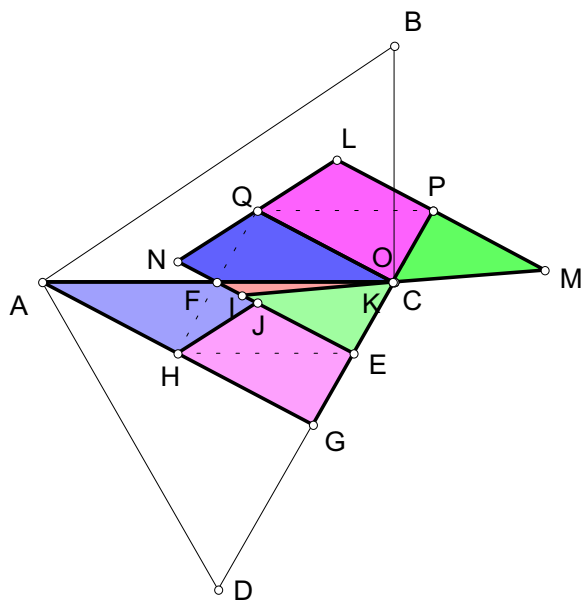


圖 3-3.9 $a : b = 1 : 2 + \sqrt{5} - \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}$

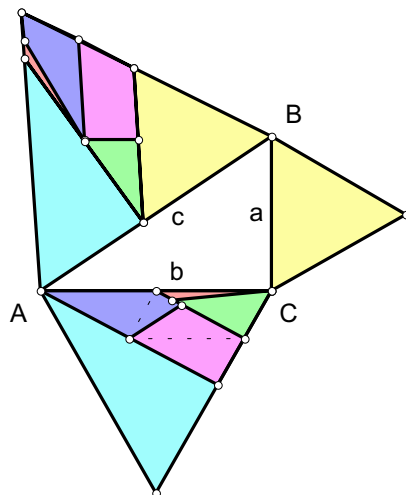


圖 3-3.10

(2) . 第 III-2 型之情況

由圖 3-2.8 第 III 型基本模式第二種情況：若線段轉換： $EG = 1/2(EK + LM) = EH$ ；

由圖可知： $c - a = b/2$ ，則

直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比： $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ；

且 $\alpha = \angle BAC = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = 36.87^\circ$ ；

則出現此情況之最大極限值；如圖 3-3.11、圖 3-3.12。

即第 III 型分割模式第二種情況僅適用於 $\alpha \leq 36.87^\circ$ 時。

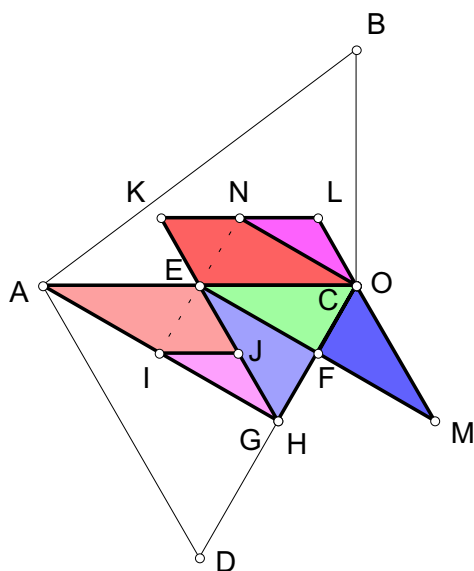


圖 3-3.11 $a : b : c = 3 : 4 : 5$

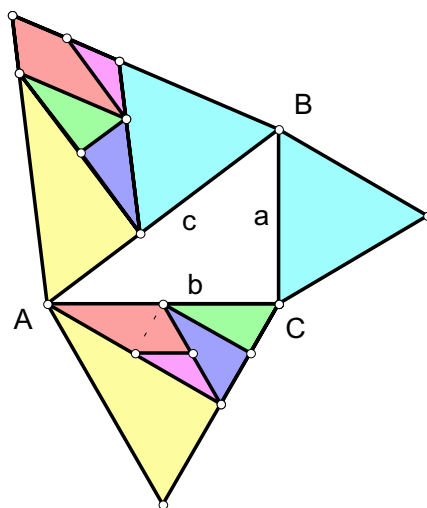


圖 3-3.12

(3) . 第 III-3 型之情況

由圖 3-2.10 第 III 型基本模式第三種情況：若線段轉換： $EG = 1/2(LJ + MN) = EC$ ；

由圖可知：

直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比： $a : b : c \doteq 1 : 1 : \sqrt{2}$ ；

且 $\alpha = \angle BAC \doteq \tan^{-1}(1/1) = 44.5^\circ$ ；

則出現此情況之最大極限值；如圖 3-3.13、圖 3-3.14。

即第 III 型分割模式第三種情況僅適用於 $\alpha \leq 44.5^\circ$ 時。

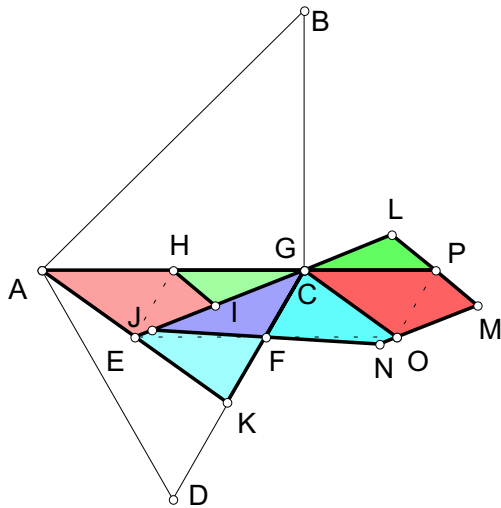


圖 3-3.13 $a : b : c \doteq 1 : 1 : \sqrt{2}$

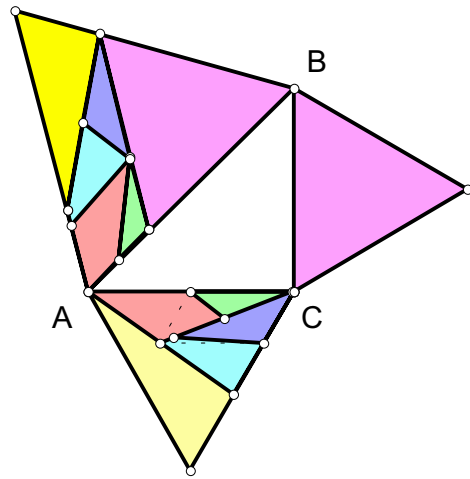


圖 3-3.14

(3) . 第 III-4 型之情況

由圖 3-2.12 第 III 型基本模式第四種情況：若線段轉換： $GF = 1/2(FM + KL) = b/2$ ，此時 J 點與 H 點重合，C 點與 O 點重合；

由圖可知： $(a + c - b) / 2 = b/2$ ，則

直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比： $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ；

且 $\alpha = \angle BAC = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = 36.87^\circ$ ；

則出現此情況之最小極限值；如圖 3-3.13、圖 3-3.14。

即第 III 型分割模式第四種情況僅適用於 $\alpha \geq 36.87^\circ$ 時。

在此，因為本研究前面假設之討論值僅限於 $\alpha \leq 45^\circ$ ；

故此例中 $\alpha > 45^\circ$ 之部分就此省略。

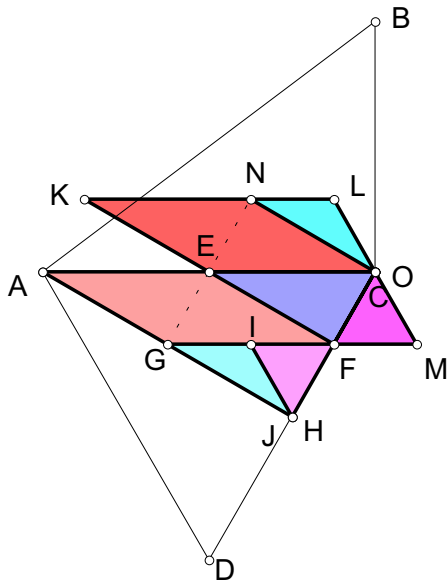


圖 3-3.15 $a : b : c = 3 : 4 : 5$

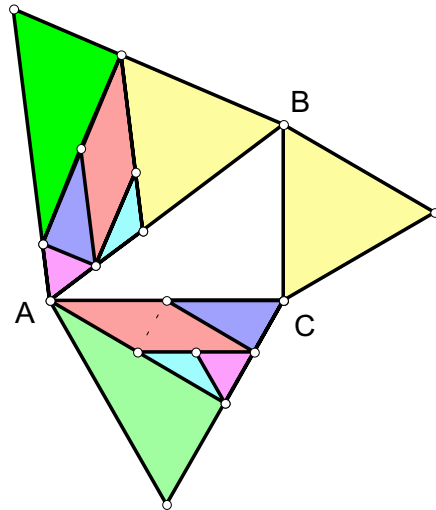


圖 3-3.16

4. 第 IV 型分割模式之 2 種極限值與「整併法」

(1). 第 IV-1 型之情況

由圖 3-2.14 第 IV 型基本模式線段轉換： $EF = 1/2 (KL) = GH$ ；

若 $FG = EF = GH$ ，此時 J、F 兩點重疊，H、L 兩點重疊，I、G 兩點亦重疊；

且 $GH = IJ = IO = MN$ ；

由圖可知： $a + b/2 = c$ ，則

直角△ABC 三邊長之比： $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ；且 $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$ ；

此時，出現此情況之最小極限值；如圖 3-3.17、圖 3-3.18。

亦即，第 IV 型分割模式第一種情況僅適用於 $\alpha \geq 36.87^\circ$ 時。

此外，圖 3-3.18 可利用「整併法」再整併，即出現更少分割塊之效果，如圖 3-3.19。

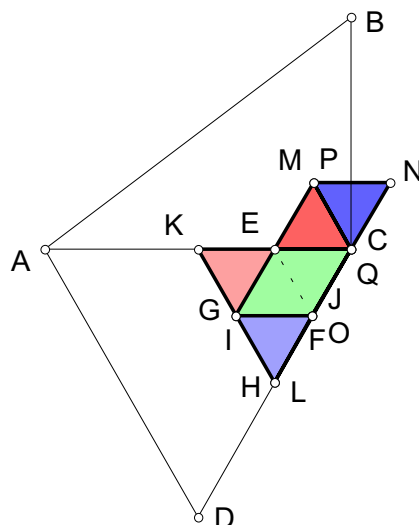


圖 3-3.17 最小極限值 $a : b : c = 3 : 4 : 5$

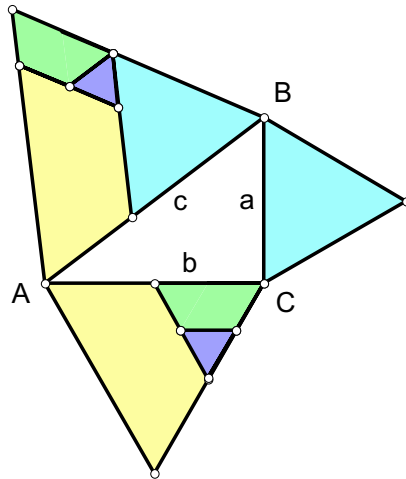
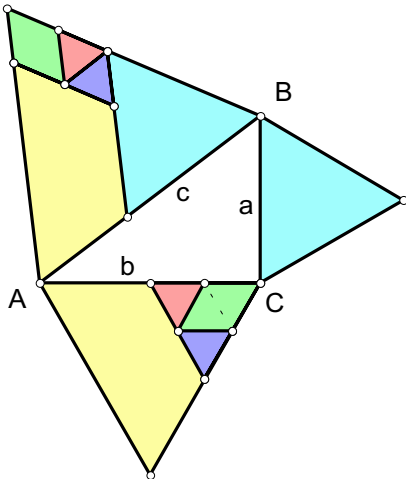


圖 3-3.18 極限值 $a : b : c = 3 : 4 : 5$

圖 3-3.19 $a : b : c = 3 : 4 : 5$ 之「整併法」

(2) . 第 IV 型之第二種情況

由圖 3-3.20 第 IV 型基本模式線段轉換，若： $HG = EG = MN$ ；

此時 H、E 兩點重疊，P、C 兩點亦重疊；

由圖可知： $(\sqrt{3}/2)(b - c + a) = c - a$ ，則

直角 $\triangle ABC$ 三邊長之比： $a : b : c = 2\sqrt{3} + 2 : 2\sqrt{3} + 3 : \sqrt{37 + 20\sqrt{3}}$ ；

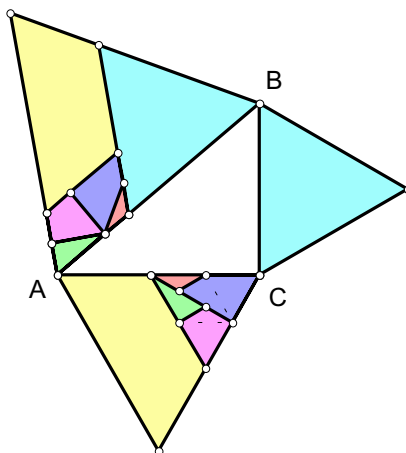
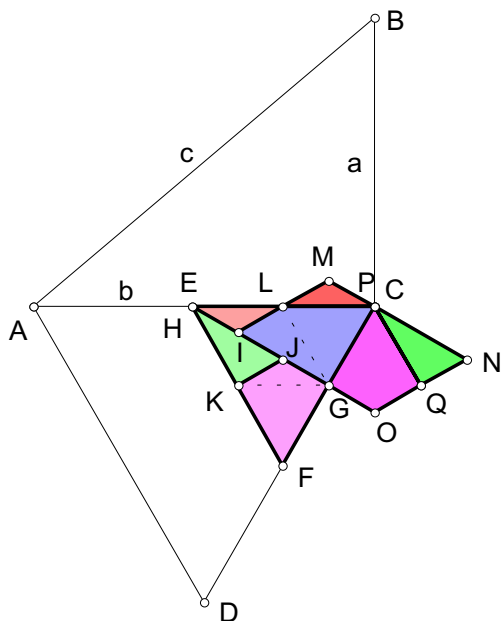
且 $\alpha = \angle BAC = \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} + 3} \right) = 40.208^\circ$ ；

則出現此情況之最小極限值；如圖 3-3.20、圖 3-3.21。

亦即，第 IV 型分割模式第二種情況僅適用於 $\alpha \geq 40.208^\circ$ 時。

同理，因為本研究前面假設之討論值僅限於 $\alpha \leq 45^\circ$ ；

故此例中 $\alpha > 45^\circ$ 之部分亦省略。



四、 研究結果與討論

1. 本研究建構出之分割法中，以第 I 型分割模式之分割塊最均勻、分割塊數最少（組合共 5 塊），效果表現最佳；但僅限於 $\alpha \leq \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$ 以內之直角三角形。
2. 當 $\alpha = 30^\circ$ 時，第 I 型分割模式可得最精采之分割塊：(1) 如圖 3-3.2，可得兩對相同分割塊、組合塊數（組合共 5 塊）最少，(2) 如圖 3-3.4，以「整併法」可得兩對相同分割塊、組合塊數（組合共 4 塊）更少；且是本研究當中，唯一分割直角三角形兩邊的正三角形者。
3. 當 $30^\circ < \alpha \leq \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} \right) = 40.208^\circ$ 時：以「第 II-2 型」分割模式之分割塊最均勻、分割塊數（組合共 6 塊）最少，效果表現最佳。
4. 當 $40.208^\circ < \alpha \leq \tan^{-1} (1/1) = 45^\circ$ 時，「第 III-4 型」分割模式之分割塊最均勻、分割塊數（組合共 6 塊）最少，效果表現最佳；但會出現一個分割塊為反面拼接情形。
5. 第 III 型分割模式：(1) 為出現最多分割法（4 種）之分割模式，(2) 為本研究中唯一涵蓋 $0 < \alpha \leq 45^\circ$ 之分割法，(3) 第 III-1 型出現一塊細狹形狀，效果最不佳，(4) 第 III-3 型，還涵蓋了本研究分割設計最大範圍 ($\alpha \leq 44.5^\circ$)，(5) 第 III-3 型、第 III-4 型，各出現一個分割塊為反面拼接情形，(6) 第 III-2 型、第 III-4 型，兩分割法之極限值角度互為邊界，且落於直角 $\triangle ABC$ 三邊長 $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ($\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$) 時。
6. 第 II 型分割模式，有 2 種圖式：圖 3-2.4 中， $GH = DE = a$ ；圖 3-2.5 中， $GH = DE = c - a$ ；因為安排位置不同，代表平行四邊形之相鄰兩邊，所以會出現不同邊界值。同理，第 III 型分割模式，因為三角形兩中點連線有三種情形（如圖 4-1 中 DF 、 EF 、 DE ，其中 DE 不可行），每種情形又有兩種分割法，所以出現 4 種可行分割圖式、4 種極限值（如圖 3-3.9~圖 3-3.16）。

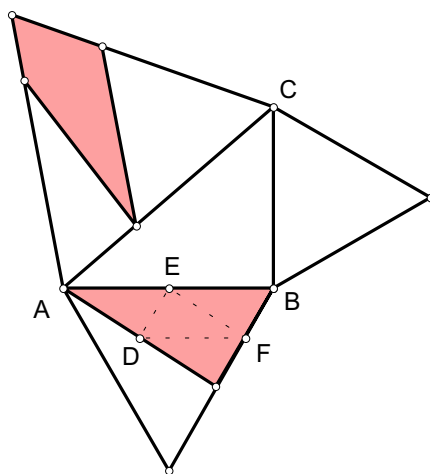


圖 4-1 第 III 型兩中點連線三種情形

7. 本研究之分割模式，永遠以直角 $\triangle ABC$ 之長邊股 b 為分割三角形；否則以短邊股 a 為分

割三角形，即會出現分割塊太小、比例大小不均、效果不佳情形！因此，本研究假設之討論值僅限於 $\alpha \leq 45^\circ$ 時；此情況會出現於第 III-4 型（適用於 $\alpha \geq \tan^{-1}(3/4) = 36.87^\circ$ ）、第 IV-1 型（適用於 $\alpha \geq \tan^{-1}(3/4) = 36.87^\circ$ ）、第 IV-2 型（適用於 $\alpha \geq \tan^{-1}(2\sqrt{3} + 2/2\sqrt{3} + 3) = 40.208^\circ$ ）。第 IV-1 型、第 IV-2 型之大小極限值角度還出現互補。

8. 第 IV 型分割模式，本身分割塊不均勻，效果亦不佳。但由於分割區較小，在以邊短股 a 為分割三角形中，其所得結果與長邊股 b 為分割三角形之結果相同，如圖 4-2。邊長 a : b : c = 3 : 4 : 5 時出現極限值，表現更明顯，亦可以「整併法」得到相同的最少分割塊；如圖 4-3、圖 4-4、圖 4-5。

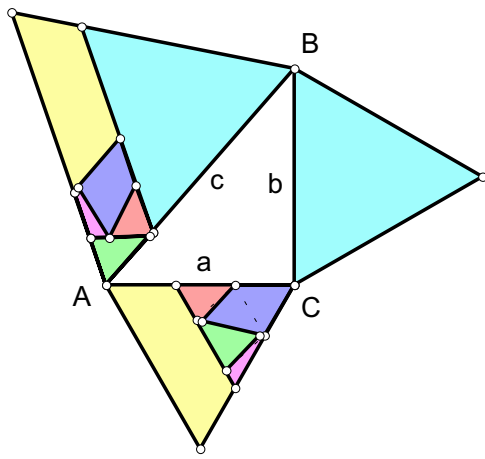


圖 4-2 邊短股 a 為分割三角形

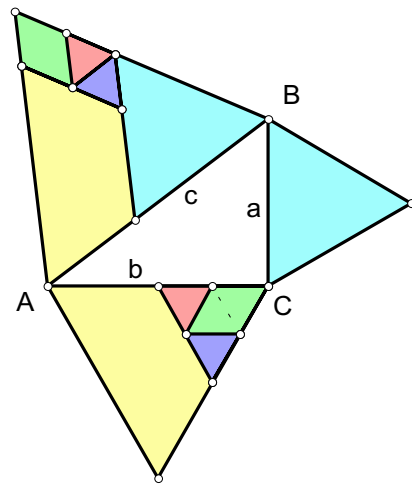


圖 4-3 長邊股 b 為分割三角形之極限

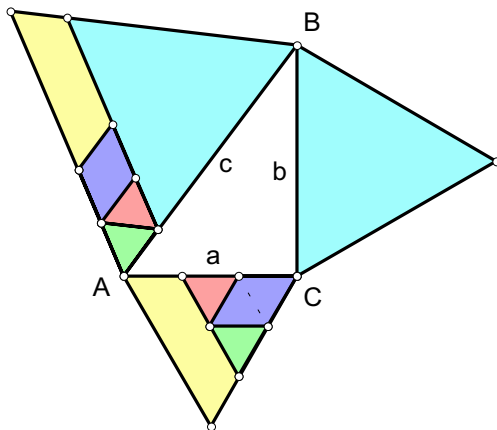


圖 4-4 邊短股 a 為分割三角形之極限

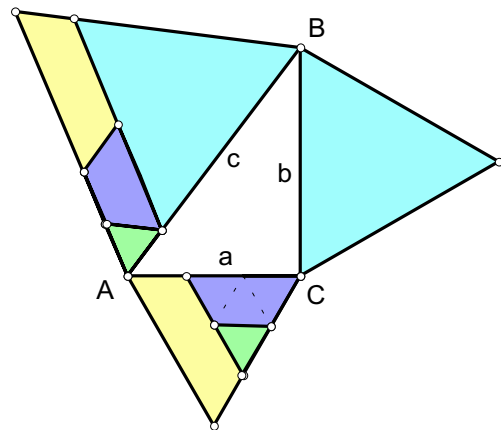


圖 4-5 左圖之「整併法」

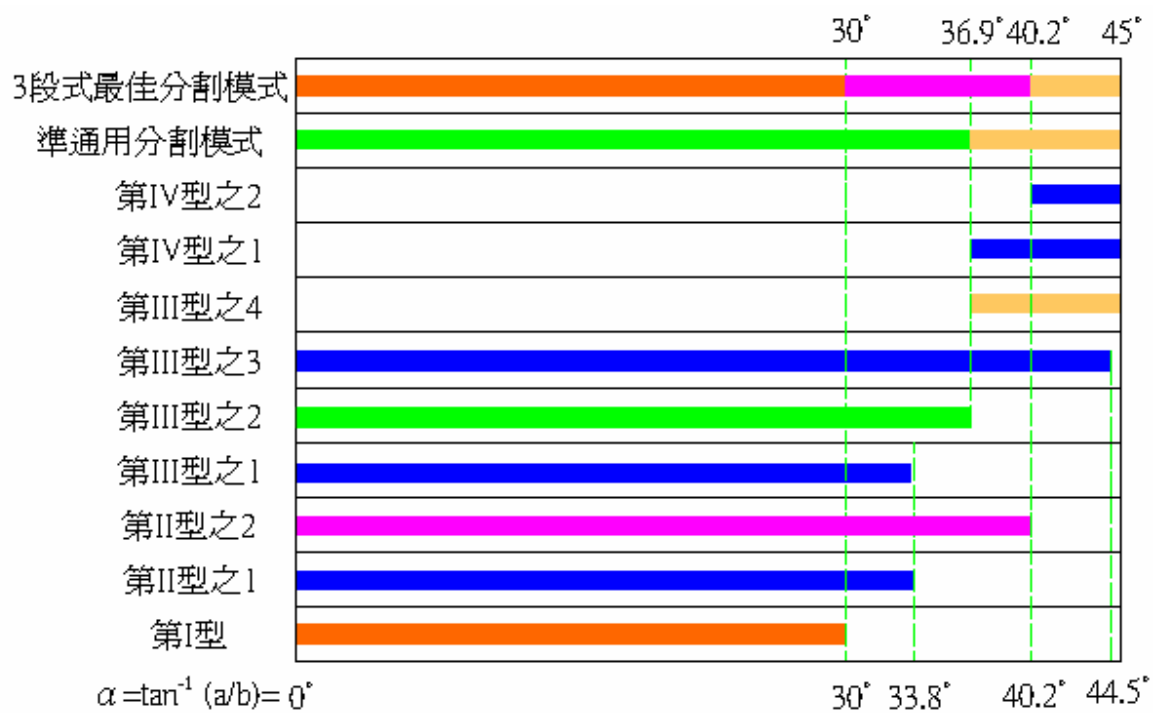


圖 4-6 各種分割模式之極限分配圖

五、 結論與應用

- 畢氏定理演繹的正三角形分割法，可建立 4 種基本幾何分割模式。
- 本研究發展出之全範圍三段式最佳分割模式，以效果最佳之三分割法互補適用範圍，得到如下結果：
 - 當 $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ 時；以「第 I 型分割模式」有最少分割塊（組合共 5 塊）、最均勻分割塊之特徵，效果表現最佳，為此範圍之「最佳分割模式」。
 - 當 $30^\circ < \alpha \leq \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+3}\right) = 40.208^\circ$ 時；以「第 II-2 型」分割模式之分割塊最均勻、分割塊數（組合共 6 塊）最少，效果表現最佳；為此範圍之「最佳分割模式」。
 - 當 $40.208^\circ < \alpha \leq \tan^{-1}(1/1) = 45^\circ$ 時：「第 III-4 型」分割模式之分割塊最均勻、分割塊數（組合共 6 塊）最少，效果表現最佳，為此範圍之「最佳分割模式」；但會出現一個分割塊為反面拼接情形。
- 第 I 型分割模式有最少分割塊（組合共 5 塊）、最均勻分割塊之特徵，堪稱本研究『效果表現最佳』分割模式，但僅適用於 $\alpha \leq \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$ 時。
- 第 III 型分割模式，雖然有 4 種分割法，卻涵蓋 $0 < \alpha \leq 45^\circ$ 之所有範圍；尤其第 III-2 型、第 III-4 型，兩分割法之極限值角度互為邊界，且落於直角 $\triangle ABC$ 三邊長 $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ($\alpha = \tan^{-1}(3/4) = 36.87^\circ$) 處；可稱為本研究之準「通用分割模式」。
- 本研究歸納探討可能的最佳及通用分割模式，得到了 3 段式「最佳分割模式」及準「通用分割模式」，提供這方面問題一個可應用於所有條件之完善解決方案。

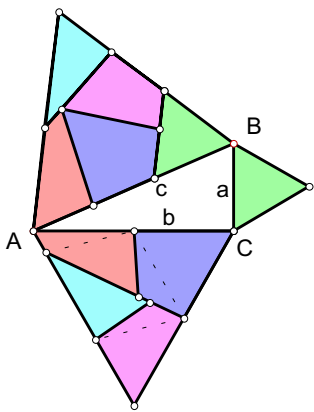
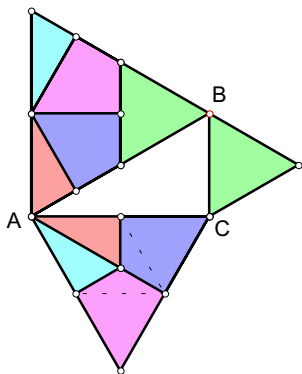
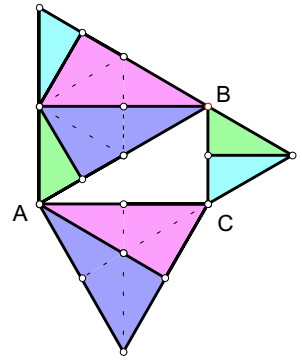
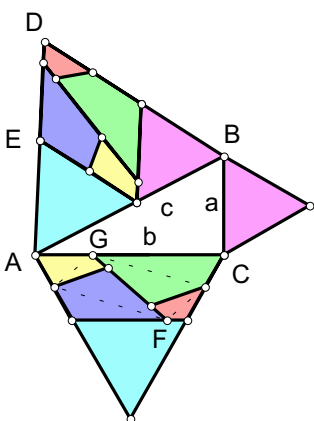
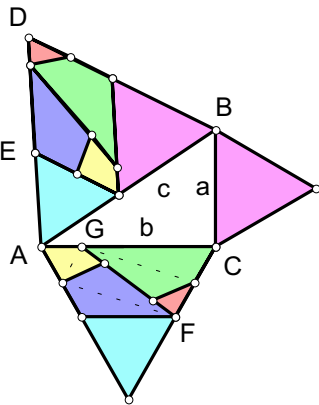
6. 本研究之成果極適合製成實物模型，可發展成益智又富挑戰性之拼圖，難度可高可低，製成系列又有連貫性，不管用作教具或遊戲都很適當。不但建立益智幾何相關資料，又補足了相關領域的空檔，希望喚起更多人投入這個領域。

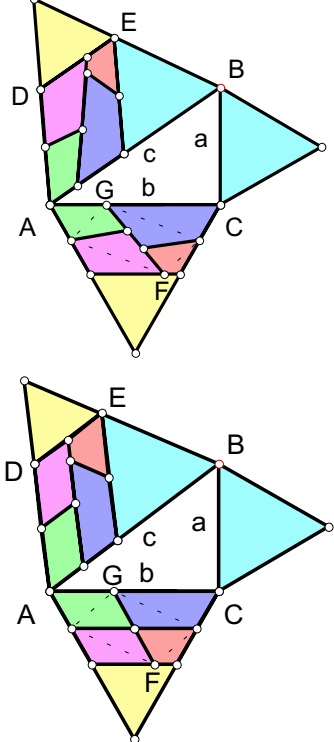
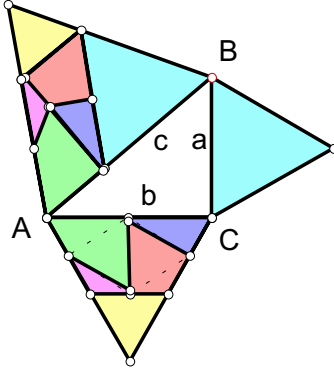
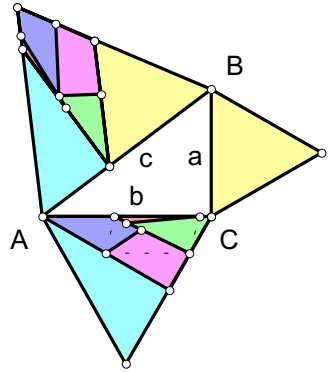
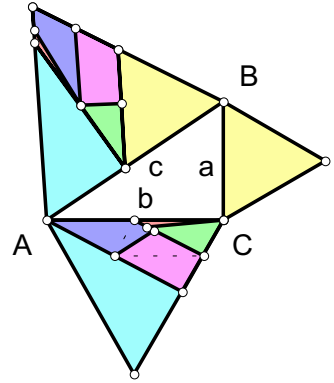
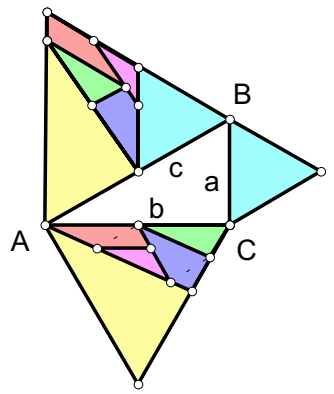
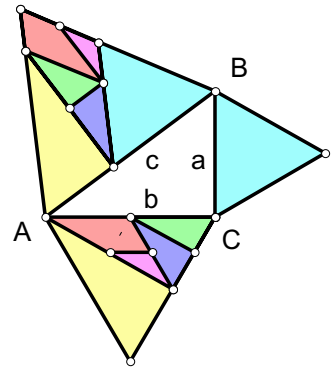
六、 參考文獻

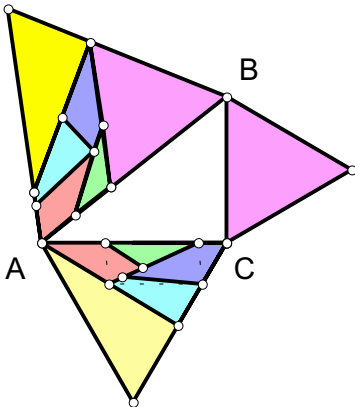
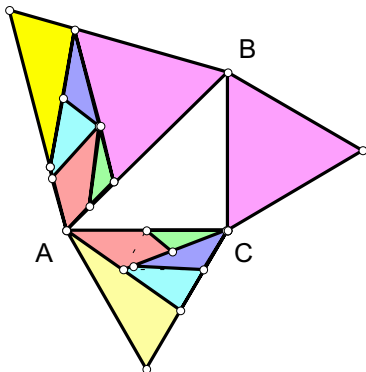
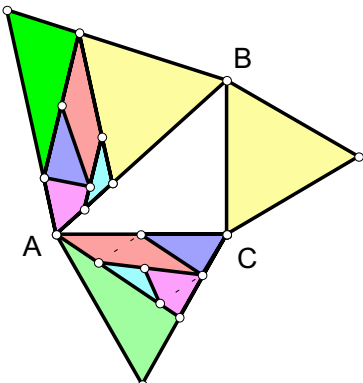
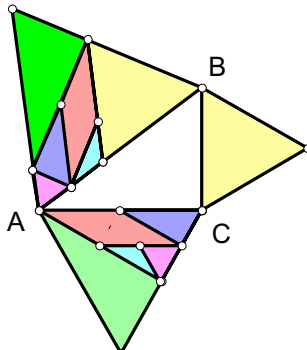
1. 邱冠霖，有趣的幾何變形魔術，中華民國 89 年國際科展作品。
2. 邱冠霖，Dudeney's 幾何分割問題之逆推及演繹，中華民國 90 年國際科展作品。
3. 洪耀堂，商高定理的介紹及衍生之相似形面積關係
<http://www.bio.ncue.edu.tw/bioedu/sampleedu/sci-affair/sci-m/sun/sun.htm>
4. 林保平，勾股定理，<http://abel.tmtc.edu.tw/pyth/11.htm>
5. <http://www.treasure-troves.com/math/PythagoreanTheorem.html>
6. <http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/index.html>
7. <http://195.241.72.4/speel/oplos60-2.htm>
8. <http://www.treasure-troves.com/math/Dissection.html>
9. <http://www.ies.co.jp/math/java/hypo/hypo.html>
10. <http://www.projmath.caltech.edu/pythag.htm>

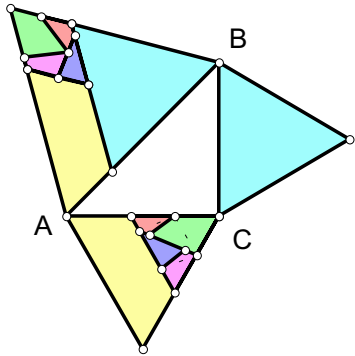
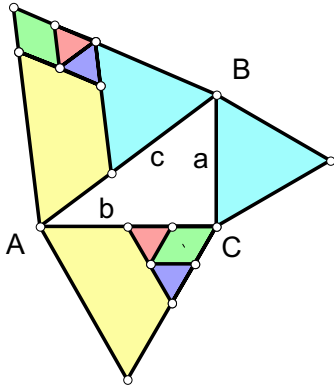
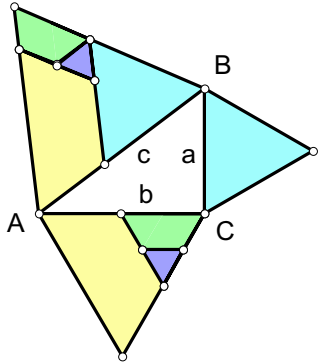
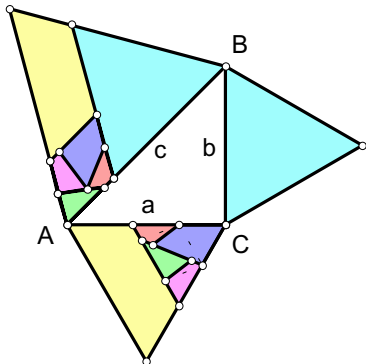
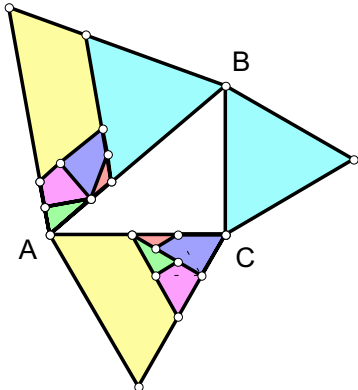
七、 附錄：畢氏演繹正三角形分割模式一欄表

設 直角 $\triangle ABC$ ，短邊股長為 a ，長邊股長為 b ，斜邊為 c ； $\angle BAC = \angle A = \alpha$ 。

分割 模式	圖 示	極 限 值	特 性
第 I 型		 $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$ $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$  <p>極限值之「整併法」</p>	<p>適用時機： $\alpha \geq \tan^{-1} (1/\sqrt{3})$ $= 30^\circ$ 時。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分割組合塊數最少 5 塊。 2. 最 均 勻 分 割 塊，效果表現最佳。 3. $\alpha = 30^\circ$ 時，可以「整併法」設計出最少分割塊 (組合共 4 塊)，為本研究最少分割設計。 4. $\alpha \leq 30^\circ$ 時「最佳分割模式」。
第 II 型 第一種		 $a : b : c \doteq 2 : 3 : \sqrt{13}$ $\alpha \doteq \tan^{-1} (2/3) = 33.8^\circ$	<p>適用於： $\alpha \leq 33.8^\circ$ 時。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分 割 塊 尚 均 勻、分割組合塊數最少 6 塊。

第 II 型	第二種	 <p>$a : b : c = 3 : 4 : 5$ 之特殊分割</p>	 <p> $a : b : c = 2\sqrt{3}+2 : 2\sqrt{3}+3 : \sqrt{37+20\sqrt{3}}$ $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+3} \right) = 40.2^\circ$ </p>	<p>適用於： $\alpha \geq \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+3} \right) = 40.208^\circ$ 時。</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分割塊極均勻，效果表現極佳。 2. 分割組合塊數最少 6 塊。 3. $30^\circ < \alpha \leq 40.208^\circ$ 時「最佳分割模式」。 4. $a : b : c = 3 : 4 : 5$ 時，可得極均勻特殊分割設計。
第 III 型	第一種		 <p> $a : b = 1 : 2 + \sqrt{5} - \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}$ $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) = 33.645^\circ$ </p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 適用於： $\alpha \leq 33.645^\circ$ 時 2. 出現一塊細狹形狀，效果不佳！
第 III 型	第二種		 <p>$a : b : c = 3 : 4 : 5$</p>	<p>適用於： $\alpha \geq \tan^{-1} (3/4) = 36.87^\circ$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分割塊尚均勻、效果表現亦佳。 2. 分割組合塊數最少 6 塊。 3. 極限值與第 III-4

			$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$	<p>型極限值相鄰界。</p> <p>4. 與第 III-4 型，兩分割法之極限值角度互為邊界，稱之為：準「通用分割模式」。適用於： $\alpha = \tan^{-1} (3/4) = 36.87^\circ$</p>
第 III 型	第三種		 <p> $a : b : c \doteq 1 : 1 : \sqrt{2}$ 且 $\alpha \doteq \tan^{-1} (1/1) = 44.5^\circ$ </p>	<p>適用於： $\alpha \leq 44.5^\circ$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分割塊尚均勻、效果表現亦佳。 2. 分割組合塊數最少 6 塊。 3. 涵蓋本研究分割設計最大範圍（$\alpha \leq 44.5^\circ$）。 4. 出現一個分割塊為反面拼接情形。
第 III 型	第四種		 <p> $a : b : c = 3 : 4 : 5$ 且 $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$ </p>	<p>適用於： $\alpha \geq \tan^{-1} (3/4) = 36.87^\circ$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 分割塊均勻，效果表現佳。 2. 分割組合塊數最少 6 塊。 3. $40^\circ < \alpha \leq 45^\circ$ 時「最佳分割模式」。 4. 出現一個分割塊為反面拼接情形。 5. 與第 III-2 型，兩分割法之極限值角度互為邊

				界，稱之為：準「通用分割模式」。
第IV型	第一種		 $a : b : c = 3 : 4 : 5$ $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$  <p>極限值之「整併法」</p>	<p>1. 適用於： $\alpha \geq \tan^{-1} (3/4)$ $= 36.87^\circ$</p> <p>2. 分割區較小，會出現分割塊太小、比例不均，故效果不佳。</p> <p>3. 極限值可以「整併法」設計出最少分割塊（共4塊組合）。</p>
第IV型	第二種		 $a : b : c = 2\sqrt{3}+2 : 2\sqrt{3}+3 : \sqrt{37+20\sqrt{3}}$ $\alpha = \angle BAC = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+3} = 40.208^\circ$	<p>1. 適用於： $\alpha \geq \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+3} \right)$ $= 40.208^\circ$</p> <p>2. 分割區較小，會出現分割塊太小、比例不均，故效果不佳。</p> <p>3. 分割區較小，故以長邊股 b 為分割三角形之結果與邊短股 a 為分割三角形結果相同。</p>

			<div data-bbox="730 174 1109 510" data-label="Image"> </div> <p>邊短股 a 為分割形之極限值</p> <div data-bbox="730 593 1109 913" data-label="Image"> </div> <p>邊短股 a 為分割三角形中， 極限值之「整併法」</p>	<p>4. 長邊股 b 為分割三角形之極限值可以「整併法」設計出最少分割塊(共 4 塊組合)。</p>
--	--	--	---	--

評 語

- (1) 作者重複過去得獎之方法及內容。
- (2) 請用 \approx 來表達近似值 P.12 $\tan^{-1} (2\sqrt{3}+2 / 2\sqrt{3}+3) \approx 40.208^\circ$ 。
- (3) 「最佳分割模式」一詞使用似乎過為主觀。