

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030407

曆曆在目

學校名稱：彰化縣立彰興國民中學

作者：	指導老師：
國一 郭峻瑋	鍾素娟
國一 陳儒風	洪淑雲
國一 許淳皓	
國一 賴昱呈	

關鍵詞：日曆遊戲 十字型和 對角線總和

壹、摘要：

教室的月曆一個月一個月的抽換，代表時間流逝，對甫上國中童心未泯的我們，激起了對數學的好奇！撕下的月曆是否有特別的玩法？月曆上的數字配上新學到的一元一次方程式，激起了數個遊戲的火花。在遊戲一中，月曆上圈出任何十字型的五個數字和有何規則。遊戲二中，在月曆上隨意選出一個 4×4 的區塊，在從這個 4×4 的區塊依序選一數後便將和此數字同行同列的數字刪除，直到 4×4 的表格僅留下四個數字，尋找留下的數字總和有何規律。遊戲三中，找出一個 4×4 的區塊中，並在表格上方及左方填入 4 個數，將遊戲二的規則運用到此表格中，尋找留下的數字總和有何規律。

貳、研究動機：

自從國中一年級上學期學到了一元一次方程式後，更令我們對國中數學產生了極大的好奇心，藉著老師發給我們的數學遊戲，也激起我們國小時對數學的熱情，原來數學也可以這麼好玩，我們便針對月曆，做了一連串不同的月曆遊戲，並以一元一次方程式的解題方式去了解其中奧妙。

參、研究目的：

一、在月曆中，如果利用十字形的方式來圈出五個數，其

數字總和有何種之特性。

二、在月曆中，任意取出 4×4 的圖形，並在此區塊中任選一數並將同行、同列刪除，重覆此動作，其得到 4 個數總和之特性。

三、從月曆遊戲延伸出來，若在 4×4 方格中的上方及左方填入 4 個數字，並按照之前的遊戲規則，則最後選出 4 個數字和之特性。

四、在 $m \times m$ 的方格中，若在上方及左方各填入 m 個數字，並按照之前的遊戲規則，則最後選出 m 個數字和之特性。

肆、研究器材：紙、筆、計算機。

伍、研究過程：

一、遊戲一

下表示某月份的月曆，請利用數字圈出五個數字，並觀察此五數的總和。

（一）觀察活動： 是圈起來的數

活動(1)

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

$$7+14+21+15+13=70$$

活動(2)

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

$$9+16+23+15+17=80$$

活動(3)

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

$$1+8+15+7+9=40$$

活動(4)

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

$$3+10+17+9+11=50$$

活動(5)

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

$$13+20+27+19+21=100$$

(二) 結果發現：

由活動(1)到活動(5)可以發現時字型區塊內的五個數的總和剛好為十字形區塊中央的數的五倍，用活動(1)來解釋的話就可以解出 $7+14+21+15+13=70$ 也等於 $14 \times 5=70$ 。

(三) 證明：

				$A-7$		
			$A-1$	A	$A+1$	
				$A+7$		

設中央數為 $\{A\}$ ，而旁邊的數分別為 $(A+1)$ 、 $(A-1)$ 、 $(A+7)$ 、 $(A-7)$ ，則數字和為 $(A-1) + A + (A+1) + (A-7) + (A+7) = 5A$
故十字型圈選出的 5 個數字和為中央數的 5 倍。

二、遊戲二

在月曆上隨意選出一個 4×4 的區塊，在從這個 4×4 的區塊任選一數後便將和此數字同行同列的數字刪除，刪到第三次時， 4×4 的表格將僅留下四個數字。

(注意：本遊戲所任選的四數，任何一數都不可以與刪掉的數字在同一行或同一列上!)

(一) 觀察活動：

為 4×4 的區塊； 為選取的數

活動(1)

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

先選擇 6，將同行同列 (5,7,8,13,20,27) 刪除，再選擇 14，將同行同列 (12,15,21,28) 刪除，再選擇 19，將同行同列 (22,26) 刪除，最後剩下的 29 已沒有數可刪除。

而 $6+14+19+29=68$

活動(2)再選取一同 4×4 ，但圈選的數字要有改變

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

先選擇 7，將同行同列 (5,6,8,14,21,28) 刪除，再選擇 13，將同行同列 (12,15,20,27) 刪除，再選擇 22，將同行同列 (19,29) 刪除，最後剩下 26 的已沒有數可刪除。

而 $7+13+22+26=68$

活動(3)同上

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

先選擇 8，將同行同列（5,6,7,15,22,29）刪除，再選擇 12，將同行同列（13,14,19,26）刪除，再選擇 20，將同行同列（21,27）刪除，最後剩下 28 的已沒有數可刪除。

而 $8+12+20+28=68$

活動(4) 另外選取一個 4×4 的區塊，與活動(1)到(3)比較

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

先選擇 10，將同行同列（7,8,9,17,24,31）刪除，再選擇 14，將同行同列（15,16,21,28）刪除，再選擇 22，將同行同列（23,29）刪除，最後剩下的 30 已沒有數可刪除。

而 $10+14+22+30=76$

活動(5) 再選取一同 4 ×4，但圈選的數字要有改變

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

先選擇 7，將同行同列 (8,9,10,14,21,28) 刪除，再選擇 17，將同行同列 (15,16,24,31) 刪除，再選擇 23，將同行同列 (22,30) 刪除，最後剩下 29 的已沒有數可刪除。

而 $7+17+23+29=76$

活動(6)同上

			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

先選擇 8，將同行同列 (7,9,10,15,22,29) 刪除，再選擇 16，將同行同列 (14,17,23,30) 刪除，再選擇 21，將同行同列 (24,28) 刪除，最後剩下 31 的已沒有數可刪除。

而 $8+16+21+31=76$

(二) 結果發現：

1、在同一 4 ×4 的區域中，不管數字如何選取，所

任選的四個數總和都會相等。

2、在同一 4×4 的區域中，所任選的 4 個數總和會與『中央四數』或『四角四數』的總和相等。

(三) 證明：

1、用符號帶入 4×4 的區塊中，設左上角的數為 X 。

X	$X+1$	$X+2$	$X+3$
$X+7$	$X+8$	$X+9$	$X+10$
$X+14$	$X+15$	$X+16$	$X+17$
$X+21$	$X+22$	$X+23$	$X+24$

因為每行的數字都差一，上下都差七，如果同行相加會等於 $X+(X+7)+(X+14)+(X+21)$ 化簡後等於 $4X+42$ ，但題目規定不可在同行同列，所以有一行要加 1、有一行要加 2、有一行要加 3 最後答案就會是『 $4X+48$ 』。

例子： $(X) + (X+8) + (X+16) + (X+24) = 4X+48$

$(X+1) + (X+9) + (X+17) + (X+21) = 4X+48$

$(X+2) + (X+10) + (X+14) + (X+22) = 4X+48$

$(X+3) + (X+8) + (X+14) + (X+23) = 4X+48$

2、因為這是一張月曆，而月曆的上下都差 7、左右

都差 1，這是有規律的。所以認定不管是上、下、左、右只要有一定的規則，答案定會相等。

中央的數總和等於 $(X+8)+(X+9)+(X+15)+(X+16)$
化簡後變成 $4X+48$ 與『 $4X+48$ 』相等。

四角的數總和等於 $X+(X+3)+(X+21)+(X+24)$
化簡後變成 $4X+48$ 與『 $4X+48$ 』相等。

三、遊戲三

因為在遊戲【二】中，月曆有時在左上方，或右下角有空格，所以在選取 4×4 區域有限制，故接下來：自行設計一張 4×4 的正方形區域，我們自行在每行上方各填入一個數，及每列前方各填入一個數子，則 4×4 的正方形區域內表格中每個數字即是對應的行與列數字和。

(一) 觀察活動：

活動(1)

	2	7	3	6
9	11	16	12	15
8	10	15	11	14
10	12	17	13	16
1	3	8	4	7

$$16+11+12+7=46$$

活動(2)

	5	13	20	15
6	11	19	26	21
0	5	13	20	15
7	12	20	27	22
21	26	34	41	36

$$26+13+22+16=87$$

活動(3)

	10	20	20	100
30	40	50	50	130
60	70	80	80	160
50	60	70	70	150
40	50	60	60	140

$$130+70+130+60=330$$

活動(4)

	6	0	2	8
12	18	12	14	20
4	10	4	6	12
18	24	18	20	26
2	8	2	4	10

$$18+12+20+2=52$$

(二) 結果發現：

- 1、所剩下的四個數字和與之前月曆遊戲中的規則不同了。
- 2、但剩下的四個數字和恰好和所填入的八個數字和相同。

3、從活動一到五中，我們發現到上方及左方填入的 8 個數字和會等於 4×4 的任一對角線相加。

例子：

A : 5+6+1+3+2+4+9+7=37

B : 7+10+10+10 (斜左邊) =37

C : 12+15+5+5 (斜右邊) =37

		5	6	1	3	A
2	7	8	3	5		
4	9	10	5	7		
9	14	15	10	12		
7	12	13	8	10		
	C			B		

(圖一)

(圖一)

$A=B=C$

(三) 證明：

- 1、因為若選一個數字，同行同列都刪除，則那相加的兩個數字不會重複，所以圈選完時，外面 8 個數子都會有加一次。

由 (圖二) 可見，

	a	b	c	d
E	a+e	b+e	c+e	d+e
F	a+f	b+f	c+f	d+f
G	a+g	b+g	c+g	d+g
h	a+h	b+h	c+h	d+h

A 圖二 B

B 的對角線總和為 $(a+e) + (b+f) + (c+g) + (d+h)$,

而 A 為 8 個數填入的數字總合則為 $a+b+c+d+e+f+g+h$ 也

等於 $(a+e) + (b+f) + (c+g) + (d+h)$ 所以認定 $A=B$

2、依照證明 1 的發現，所以即可證明出 $m \times n$ 的對角線和與左方及上方的總和相同。

3、以符號帶入來解釋

	A	b	c	d
e	a+e	b+e	c+e	d+e
f	a+f	b+f	c+f	d+f
g	a+g	b+g	c+g	d+g
h	a+h	b+h	c+h	d+h

$(a+e) + (d+f) + (c+g) + (b+h)$ 經化簡後會變成 $a + b$

$+ c + d + e + f + g + h$ ，而上方與左方的總數相加等於

$a+b+c+d+e+f+g+h$ ，兩者正好相等！

結果發現，不管我們如何圈選，所剩下的四個數字和

皆等於填入的八個數字和。

四、遊戲四：

自行設計一張 $m \times n$ 的正方形區域，並依照上述遊戲方式，
你有何發現？

（一）觀察活動：

(1) 5×5 方陣

		A	B	C	D	E
F						
G						
H						
I						
J						

(2) 6×6 方陣

		Q	W	E	R	I	Y
A							
S							
D							
F							
G							
H							

(3) 9 × 9 方陣

	P	L	O	K	J	N	U	H	B
R									
T									
F									
S									
X									
Z									
V									
Q									
W									

(二) 結果發現：

- 1、不管是 5 × 5 或 6 × 6 或 9 × 9 的方正中遊戲規則所選出的數字和會等於上方及左方所填的數字和。
- 2、其對角線數字和依然等於上方及左方所填入的數字和。

陸、研究結果：

- 一、在遊戲一中由活動(1)到活動(5)可以發現 的總和剛好為十字形區塊中央的數的五倍
- 二、在遊戲二中同一 4 × 4 的區域中，不管數字如何選取，所任選的四個數總和都會和上方及左方填入的數字和相等。
- 三、在遊戲二中同一 4 × 4 的區域中，所任選的 4 個數總和

會與『中央四數』或『四角四數』的總和相等。

四、在遊戲三中從活動(一)到(五)中，我們發現到左邊及上方的數相加，會等於 4×4 的對角線的數相加。

五、在遊戲四中就算是 $m \times n$ 的表格，左邊及上方的數相加，仍會等於 $m \times n$ 斜角的數相加。

柒、討論：若將 4×4 方格中的數字改用負整數，情形一樣嗎？

活動(1)

	-1	-5	3	-8
-7	-8	-12	4	-15
5	4	0	8	-3
9	8	4	12	1
-10	-11	-15	-7	-18

活動(2) 若 4×4 區塊的與活動(1)位置相同，但數字位置改變了！

	-2	-3	6	-4
-7	-9	-10	-1	-11
5	3	2	11	1
9	7	6	15	5
-10	-12	-13	-4	-14

活動(3)

	-10	-2	-8	6
-2	(-12)	-4	-10	4
-8	-18	-10	-16	(-2)
-20	-30	-22	(-28)	-14
-33	-43	(-35)	-41	-27

結果我們發現到，不管是正數、負數甚至是小數，只要是在同一 4×4 的區塊中所圈選的數，一定會與左邊及上方的總和相等。

捌、結論：

綜合了遊戲一到遊戲四，發現了許多各式各樣有趣的結果，從月曆中的遊戲，也延伸到了自創的區塊，這個創舉也使我們的腦海中增加的「？」可以解決。

- 一、在遊戲一中由活動(1)到活動(5)可以發現 \square 的總和剛好為十字形區塊中央的數的五倍
- 二、在遊戲二中同一 4×4 的區域中，不管數字如何選取，所任選的四個數總和都會和上方及左方填入的數字和相等。
- 三、在遊戲二中同一 4×4 的區域中，所任選的 4 個數總和會與『中央四數』或『四角四數』的總和相等。

四、 在遊戲三中從活動(1)到(5)中，我們發現到左邊及上方的數相加，會等於 4×4 的對角線的數相加。

五、 在遊戲四中就算是 $m \times n$ 的表格，左邊及上方的數相加，仍會等於 $m \times n$ 斜角的數相加。

六、 我們發現到，不管是正數、負數，只要是在同一 $m \times n$ 的區塊中所圈選的數，一定會與左邊及上方的總和相等。

做這一連串的研究活動，使我們四個人受益良多，就算在研究的過程中有些風風雨雨，也不阻斷我們想要奮發向上的好奇心。

玖、參考資料：

一、國中第一冊數學課本

南一出版社

二、數學遊戲大觀第三集

前程出版社

【評語】 030407 曆曆在目

從所學的數學內容出發進而發展各式與月曆相關的數學遊戲，寓學於樂的神值得鼓勵，研究中的數學內容可再深化，將更能加強研究的數學內涵。