# 中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

國小組　數學科

## 佳作

080408

## 依〝形〞組隊，優勢再現！ ~ 六邊形蜂巢堆砌策略再探討

學校名稱： 嘉義縣六腳鄉六美國民小學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 小四 林鈞誼 | 陳雪美 |


關鍵詞： 六邊形總數、初始配對、共用格

# 摘要

我運用學姐前三年研究的結論，採用初始配對方式，針對共有格數量、角對角數量及各類模組間最佳的組合研究：「在六邊形蜂巢中如何擺放有色六邊形，可求得外圍白色六形總數最少？」且依據模組間的相互關係值，求得 K 值(包圍的白色六邊形總數)計算公式。

在延伸活動中，我沿用初始配對模式，找出平面長鏈形六邊形的蜂巢堆砌模式，也求得足球這種立體六邊形組合的蜂巢堆砌模式。

# 壹、 研究動機

去年我跟在學姐身邊開始科展研究，我們的研究一直是繞著這個主題：「若有灰色及白色的六邊形多個，利用這些六邊形堆砌成一個蜂巢，最外圍的六邊形一定要白色，若現在要利用 10 個灰色六邊形堆砌一個蜂巢，能相鄰的最多只能有 3 個灰色六邊形時，最少需要幾個白色六邊形包圍？」

學姐三年來利用不同的方式做研究，有些過程圖形繁多，計算繁複；這次在學姐前導研究的基礎上，我將研究範圍擴增，但方式簡化，希望用簡化的圖形數量找出較佳的堆砌策略，另外，我也將研究觸角擴增至立體的足球，讓研究的深度加廣。

# 貳、 研究目的

本研究我想要探討下列問題：

一、 利用初始配對組合做堆砌組合時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

二、 模組間應該怎麼配對組合，才能達到外圍最少白色六邊形？ 利用初始配對組合做堆砌的策略解原問題，外圍白色六邊形總數最佳解(公式)？

三、 利用解原問題的策略，延伸探討長鏈形六邊形及立體足球的堆砌方式。

# 參、 研究設備及器材

紙、色筆。

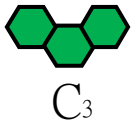
# 肆、 研究方法

## 一、關於蜂巢的排列組合各項定義

(一) 六邊形相鄰的基模類型定義及名詞說明

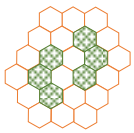
1. 單一模組：以 $C_N$：N 代表基本灰色(此次研究更動為〝有色〞一詞)的組合數，如圖 1-1。

2. 初始配對組合：以 $C_{I\ N*N}$：I 代表兩種有色六邊形已經先行配對組合了，N 代表個別有色的組合數，如圖 1-2。
3. 固定配對組合：其實和 $C_{I\ N*N}$ 圖形一致，在於它是後來堆砌上去的組合，以 $C_{F\ N*N}$ 區別之。
4. 初始模組配對組合的外圍白色六邊形總數：以 $W_{N*N}$：N 代表基本灰色的組合數，W 則代表包圍在其外的六邊形總數。如下圖說明：



$C_3$

圖 1-1



$W_{3A*3A=16}$

圖 1-2

圖 1-3

圖 1-4

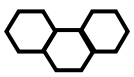
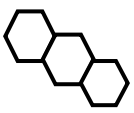
《註：本圖形由作者親自製作》

5. 角對角的數量：設為 A。關於邊角相對分類：如上圖所示(圖 1-3 及圖 1-4)：
圖 1-3 中，2 個灰色六邊形是角對角的不相鄰（紫色圈出處），其共用格為 2；而圖 1-4 中，2 個灰色六邊形是邊對邊的不相鄰（紫色線），其共用格為 1。
6. 共用格：指的是模組間的彼此共用的格子，設為 S，若是和固定配對模組組合，以 $S_P$ 記之。
7. 模組組合外圍所需的白色六邊形總數，設為 K。
8. 整個模組組合所需的灰色六邊形總數，設為 P。

(二)　計算所需的白色六邊形總數的方法

依題目要求有色六邊形的個數為 10（設為 P=10），而能相鄰的最大有色六邊形（題目為 $N_3$），模組數取最少的 4 組，根據學姐以前的研究證明：在 P 值相同的條件下，外圍環繞著的組合模式以越少模組組合越能達到經濟效益，即外圍所需的白色六邊形總數（設為 K）越少，因此我採 3,3,3,1 及 3,3,2,2 兩種模組來探討。

而 $N_3$ 的組合模式有以下三種，為方便辨識，設為 3A、3B 及 3C：

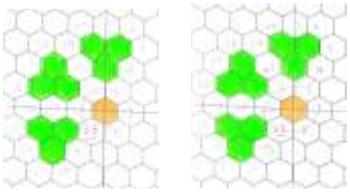
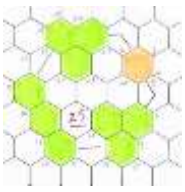
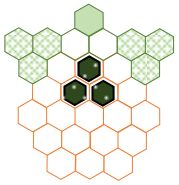
| | | |
|---|---|---|
| --$C_{3A}$； W=10  | --$C_{3B}$； W=10  | --$C_{3C}$； W=9 |

《註：本表圖形由作者親自製作》

(三)　有色六邊形模組數量與可能的組合類型

組合類型若經過翻轉、旋轉後相同、或對稱性質者視為同一種。

## 二、之前學姐解原問題的方式

| 年度 | 111 年 | 112 年 | 113 年 |
|---|---|---|---|
| 方法 | 以白色六邊形為主角，標直角坐標，以環狀方式堆砌。 | 以灰色六邊形為主角，固定蜂巢形狀。 | 以灰色六邊形為主角，以凹或凸六邊形蜂巢為形狀，採用單一模組為中心，依序在外圍順時針堆砌模組。 |
| 研究結果 | 只要是凹槽形的，或中間白色數量大於 6 時，都可透過轉換成類似〝結繩〞方式的排列(右圖)，進而取得最佳的 K 值。 | 若是固定圖形的狀況下，正六邊形的蜂巢，有不錯的 K 值。 | 以外圍三個凸角組合的類型，間隔數為 12 時的模組組合，可得最小 K 值 23。 |
| 圖形與數量 |  3,3,3,1(P=10, K=23) |  3,3,3,1 ( P=10, K=25) |  3,3,3,1 ( P=10, K=23) |

註：本表圖形出自嘉義縣第 62 屆、63 屆、64 屆中小學科學展覽會作品「環狀堆砌蜂巢策略再探討」、「多邊形蜂巢堆砌策略之探討」及「凹凸有竅門，完美再呈現！~六邊形蜂巢堆砌策略之探討」(作者：楊婷婷)

根據學姐前三年的研究中，我引用以下幾個重點：

(一)、最大範圍的模組使用越多，相對的角或共用格多，外圍所需的白色六邊形總數也越省。

(二)、在 P 值相同的條件下，組合模式以越少基模組合越能達到經濟效益。

(三)、而若在相同的灰色模組 $N_{MAX}$ 條件下，W 值越少，也就越有利。

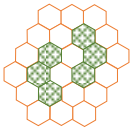
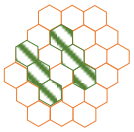
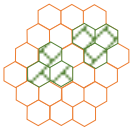
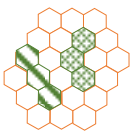
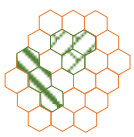
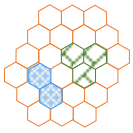
## 三、我運用的方法

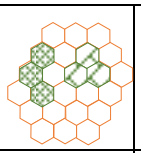
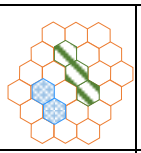
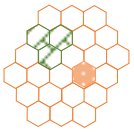
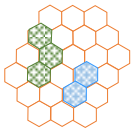
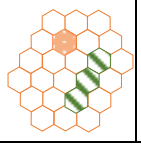
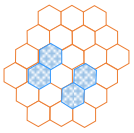
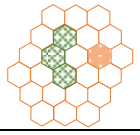
學姐採用單一模組為中心，依序在外圍堆砌模組的方式，這次我以倆倆模組配對為初始組合，探討外圍應該如何堆砌會更有利？

我將運用上述一些排列上的規則進行此次的研究，除了有系統地尋求堆砌的方法，也能依此推論得出 K 值的計算公式。

### (一) 確認六邊形蜂巢配對組合

因應研究目的，因此我將 3,3,3,1 及 3,3,2,2 兩種組合形式分別配對，以 N*N 表示，並求出配對後的 W 值。所得配對組合如下表 1-1：

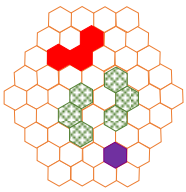
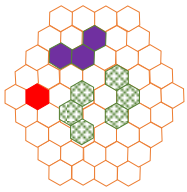
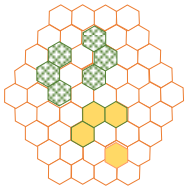
| 初始配對組合 | 圖形 | 共用格數量 | W 值 | 初始配對組合 | 圖形 | 共用格數量 | W 值 | 初始配對組合 | 圖形 | 共用格數量 | W 值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3A*3A |  | 4 | 16 | 3B*3B |  | 4 | 16 | 3C*3C |  | 3 | 15 |
| 3A*3B |  | 3 | 17 | 3B*3C |  | 3 | 16 | 3C*2 |  | 3 | 14 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3A*3C |  | 3 | 16 | 3B*2 |  | 3 | 15 | 3C*1 |  | 2 | 13 |
| 3A*2 |  | 3 | 15 | 3B*1 |  | 2 | 14 | 2*2 |  | 3 | 13 |
| 3A*1 |  | 3 | 13 | ※配對模式以能產出較小 W 值的方式為主。 | | | | | | | |

《註：本表圖形由作者親自製作》

(二)　六邊形蜂巢配對組合堆砌方式說明

一開始若以倆倆模組配對，因有共用格，W 值是較小的，另兩組的模組的堆砌方式，我將分別採取單一模組依序擺放和固定配對模組組合，比較哪種方式較有利？

| -1-3A | -3A-1 | -$F_{3A*1}$ |
|---|---|---|
|  |  |  |

《註：本表圖形由作者親自製作》

初始配對組合及固定配對組合，分別以 I N*N 及 F N*N 簡單記之；若是單一模組一個一個堆砌的，按順序記為-N-N，若是堆砌的是固定配對的模組，則記為-N*N，如上表 1-2 所示。

之前和學姐一起研究時發現，共用格的模式有兩種，一種是角相對產生的(圖 1-4 紅圈處)，而另一種則是邊相對產生的(圖 1-4 紫圈處)，研究顯示，擺放紅色圈處會形成 3 個共用格，若擺放紫色圈的則有 2 個，因此，針對單一模組一個一個堆砌的擺放方式，我訂定第一個模組需在這兩種模式所產生的共用格上，兩個模組依序以紫色和紅色表示(圖 1-5 先擺放紫色模組，再擺放紅色模組)：

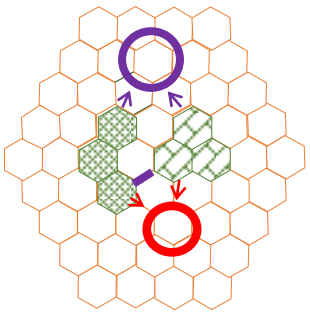


圖 1-4

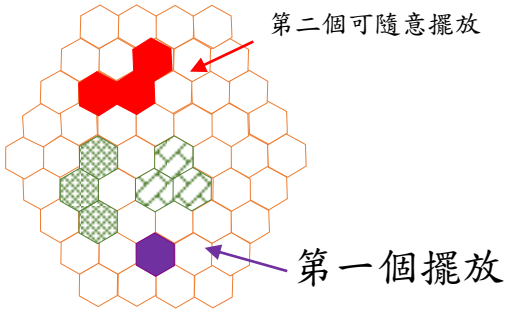



圖 1-5

《註：本圖形由作者親自製作》

我是以能產生較多共用格的方式配對組合，我以兩個單一模組能產生第一條角對角的線(圖中的紫色線)當成對齊的格子，如此兩個模組間確定能產生較多的共用格，且與後來堆砌的模組間也確保和初始配對有共用格。

下圖 1-6 與圖 1-7 是我和老師討論時產生的組合差異處：圖 1-6 中角對角形成 3 個共用格，而老師在圖 1-7 中紫色模組對初始配對組合都是邊對邊的堆砌方式，共用格只有 2 個，其所得 K 值比較大，為避免類似的情況發生，我採取：

1. 初始配對組合所衍生出的共有格，若先填入，能創造 3 個共用格；如圖 1-8、圖 1-9 紅圈處的擺放。
2. 選擇能和初始配對或單一模組彼此間能形成角對角關係的格子填入，若有幾個選擇，以能再產生共用格的優先考量，如圖 1-10 綠圈處的擺放。

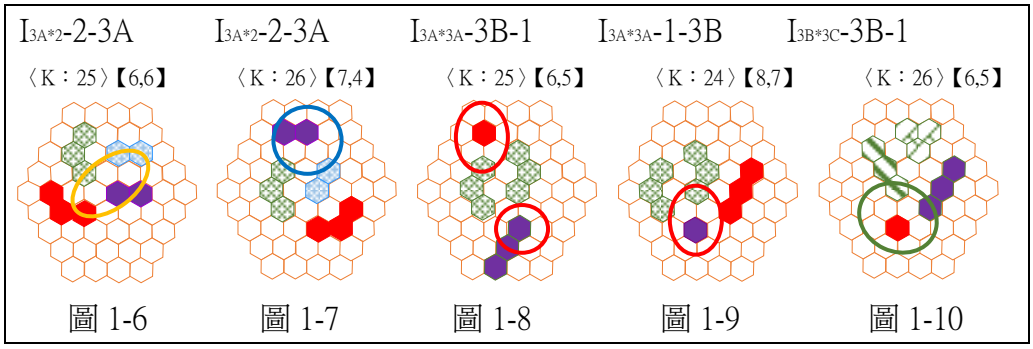



圖 1-6　圖 1-7　圖 1-8　圖 1-9　圖 1-10

《註：本表圖形由作者親自製作》

(三)　六邊形蜂巢配對組合中，角相對數量和共用格數量計算方式說明

1. 單一模組一個一個堆砌的：圖 1-11，角對角的計算就是藍線部分總數；至於共用格數量，則是繞著初始配對組合外圍的共用格，如藍色星星處。
2. 堆砌的是固定配對的模組：圖 1-12，角對角的計算就是藍線部分總數，至於共用格數量，為統一計算模式，一樣是繞著初始配對組合外圍的共用格(紫色星星處)再加上兩者間的共用格(紅色星星處)。

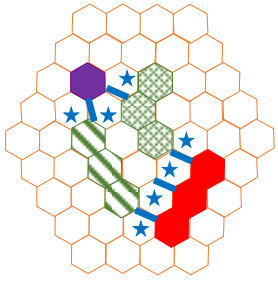


圖 1-11

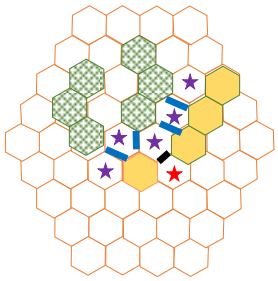


圖 1-12　《註：本圖形由作者親自製作》

## 伍、 研究過程

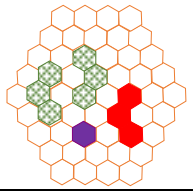
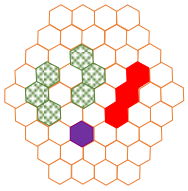
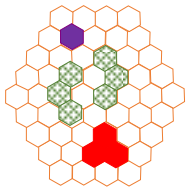
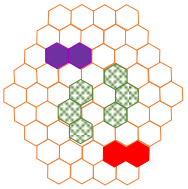
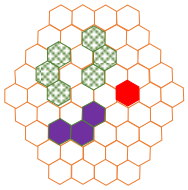
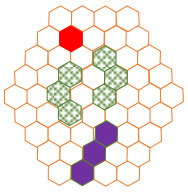
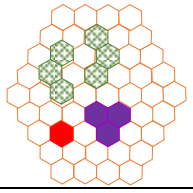
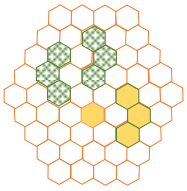
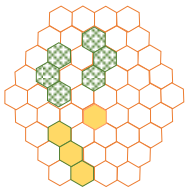
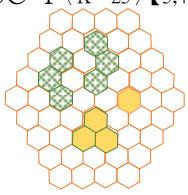
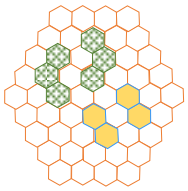
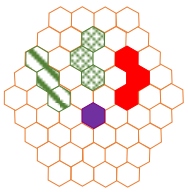
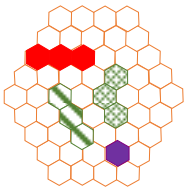
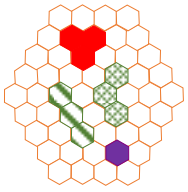
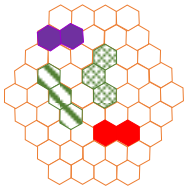
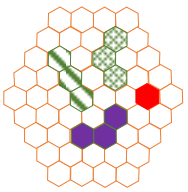
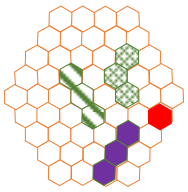
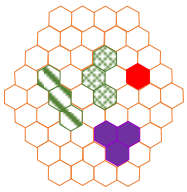
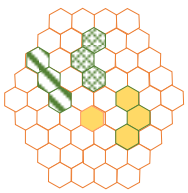
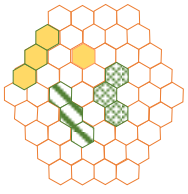
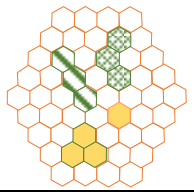
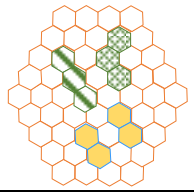
活動一、利用初始配對組合做堆砌組合時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

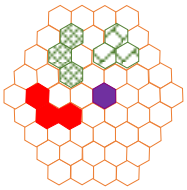
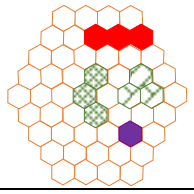
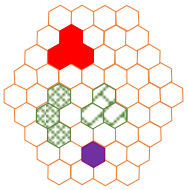
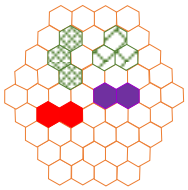
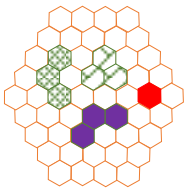
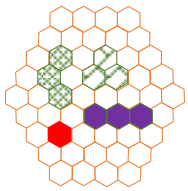
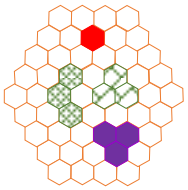
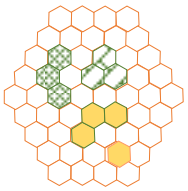
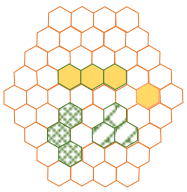
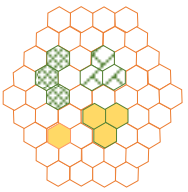
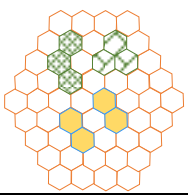
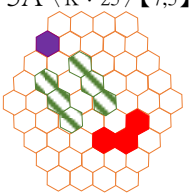
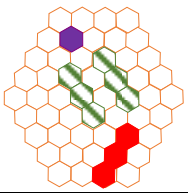
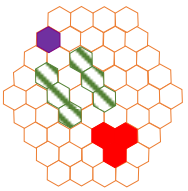
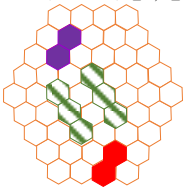
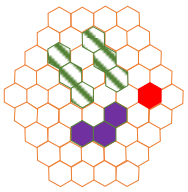
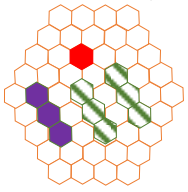
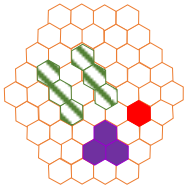
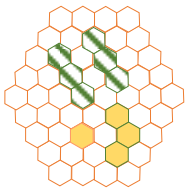
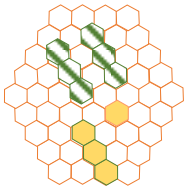
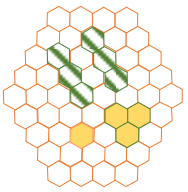
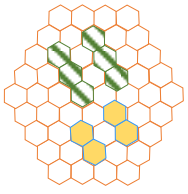
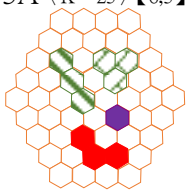
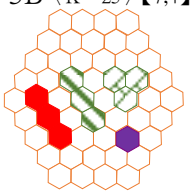
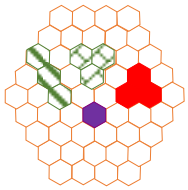
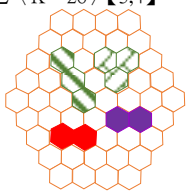
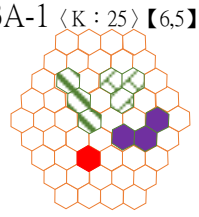
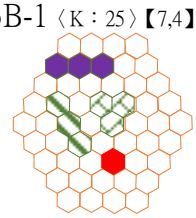
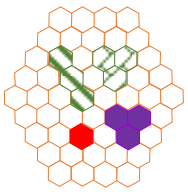
問題：在尋求最佳化的堆砌過程中，究竟共用格數量還是角相對的數量影響較為重要呢？而擺放順序有差嗎？固定模組較有利嗎？

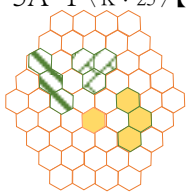
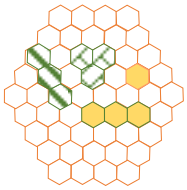
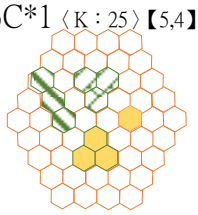
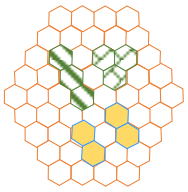
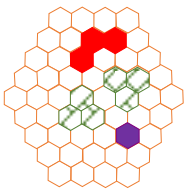
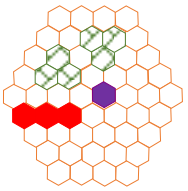
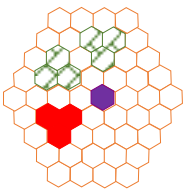
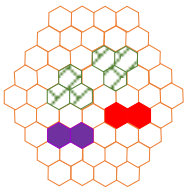
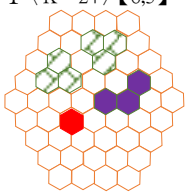
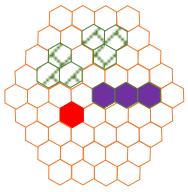
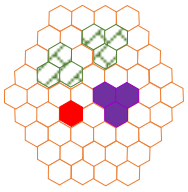
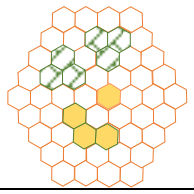
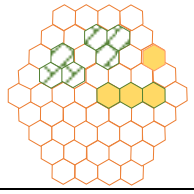
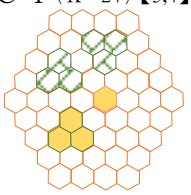
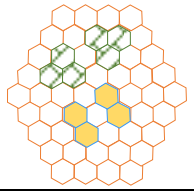
我針對這幾個問題，將配對模式、堆砌後的圖形、共用格數量、角相對數量及 K 值列於表 2-1、2-2、2-3 及 2-4。

## 一、初始配對為 3*3 類型的堆砌圖形

表 2-1

| 初始配對組合 (初始 W 值) | 堆砌方式 (-模組-模組) 或(-初始配對組合)<br>〈K 值〉 【共用格數量 ，角對角數量】<br>(與初始配對組合的共用格 ＋後來堆砌模式所形成的共用格), (與初始配對組合的角相對數量 ＋後來堆砌模式所形成的角相對數量) | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ⅰ 3A*3A (16) | -1-3A 〈K：25〉【6,5】  | -1-3B 〈K：25〉【6,5】  | -1-3C 〈K：25〉【6,4】  | -2-2 〈K：26〉【6,4】  |
| | -3A-1 〈K：25〉【6,5】  | -3B-1 〈K：26〉【6,4】  | -3C-1 〈K：25〉【5,4】  | |
| | -3A*1 〈K：25〉【6,5】  | -3B*1 〈K：26〉【5,4】  | -3C*1 〈K：25〉【5,4】  | -2*2 〈K：25〉【6,5】  |
| Ⅰ 3A*3B (17) | -1-3A 〈K：25〉【7,6】  | -1-3B 〈K：26〉【7,5】  | -1-3C 〈K：26〉【6,3】  | -2-2 〈K：26〉【7,4】  |
| | -3A-1 〈K：26〉【6,5】  | -3B-1 〈K：27〉【5,4】  | -3C-1 〈K：26〉【6,4】  | |
| | -3A*1 〈K：26〉【6,5】  | -3B*1 〈K：26〉【7,3】  | -3C*1 〈K：26〉【5,4】  | -2*2 〈K：26〉【6,5】  |

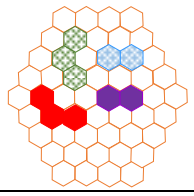
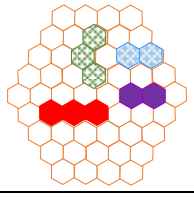
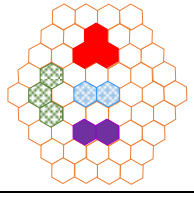
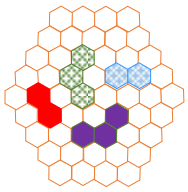
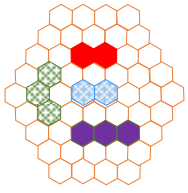
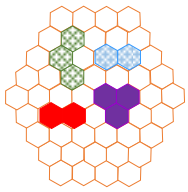
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ⅰ 3A*3C (16) | -1-3A〈K：25〉【6,5】  | -1-3B〈K：25〉【7,4】  | -1-3C〈K：25〉【6,3】  | -2-2〈K：25〉【6,5】  |
| | -3A-1〈K：25〉【6,5】  | -3B-1〈K：25〉【6,5】  | -3C-1〈K：25〉【6,3】  | |
| | -3A*1〈K：25〉【7,5】  | -3B*1〈K：26〉【6,4】  | -3C*1〈K：24〉【6,5】  | -2*2〈K：25〉【6,5】  |
| Ⅰ 3B*3B (16) | -1-3A〈K：25〉【7,5】  | -1-3B〈K：26〉【6,4】  | -1-3C〈K：25〉【6,4】  | -2-2〈K：26〉【6,4】  |
| | -3A-1〈K：25〉【6,5】  | -3B-1〈K：26〉【6,4】  | -3C-1〈K：25〉【5,4】  | |
| | -3A*1〈K：25〉【6,5】  | -3B*1〈K：26〉【5,4】  | -3C*1〈K：25〉【5,4】  | -2*2〈K：25〉【6,5】  |
| Ⅰ 3B*3C (16) | -1-3A〈K：25〉【6,5】  | -1-3B〈K：25〉【7,4】  | -1-3C〈K：25〉【5,4】  | -2-2〈K：26〉【5,4】  |
| | -3A-1〈K：25〉【6,5】  | -3B-1〈K：25〉【7,4】  | -3C-1〈K：25〉【5,4】  | |

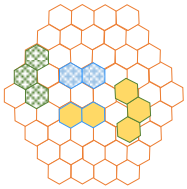
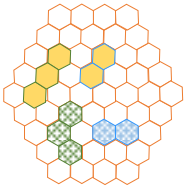
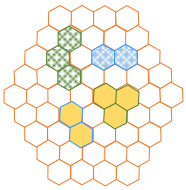
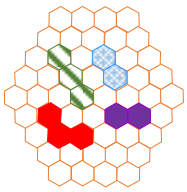
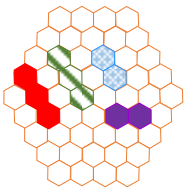
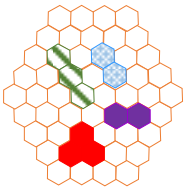
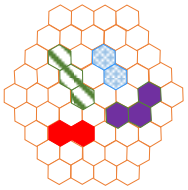
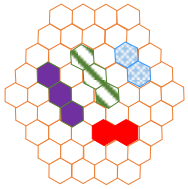
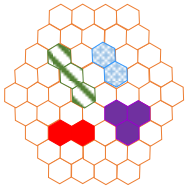
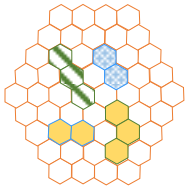
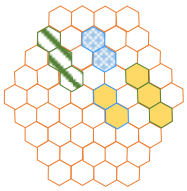
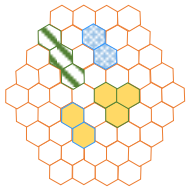
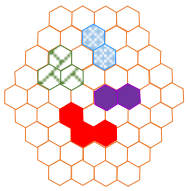
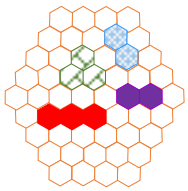
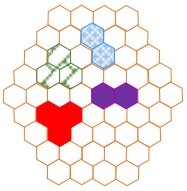
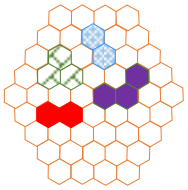
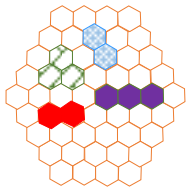
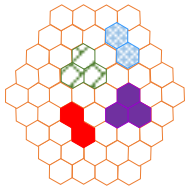
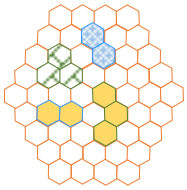
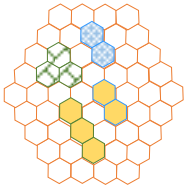
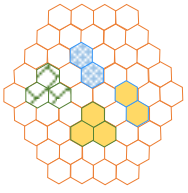
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | -3A*1〈K：25〉【6,5】<br>  | -3B*1〈K：25〉【7,4】<br>  | -3C*1〈K：25〉【5,4】<br>  | -2*2〈K：25〉【6,5】<br>  |
| Ⅰ 3C*3C<br>(15) | -1-3A〈K：24〉【7,5】<br>  | -1-3B〈K：24〉【6,5】<br>  | -1-3C〈K：23〉【6,5】<br>  | -2-2〈K：24〉【6,5】<br>  |
| | 3A-1〈K：24〉【6,5】<br>  | -3B-1〈K：25〉【5,4】<br>  | -3C-1〈K：24〉【5,4】<br>  | |
| | -3A*1〈K：24〉【6,5】<br>  | -3B*1〈K：24〉【7,4】<br>  | -3C*1〈K：24〉【5,4】<br>  | -2*2〈K：24〉【6,5】<br>  |

《註：本表圖形由作者親自製作》

## 二、初始配對為 3*2 類型的堆砌圖形

表 2-2

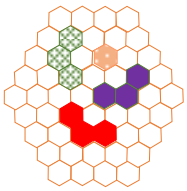
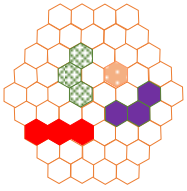
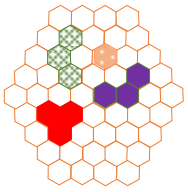
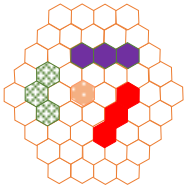
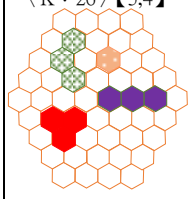
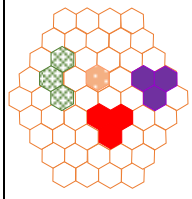
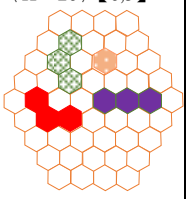
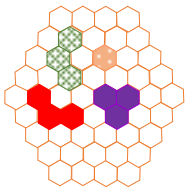
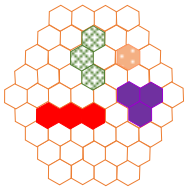
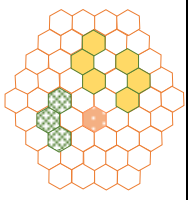
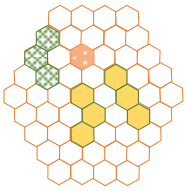
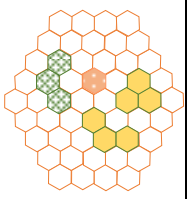
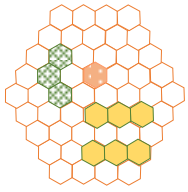
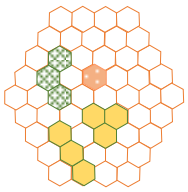
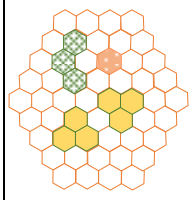
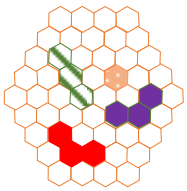
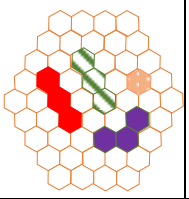
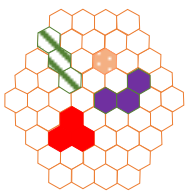
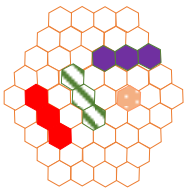
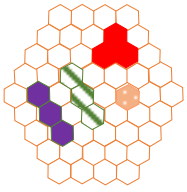
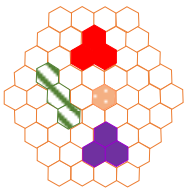
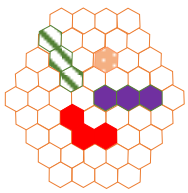
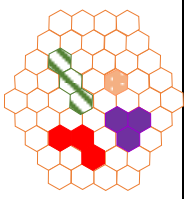
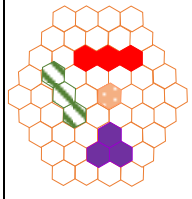
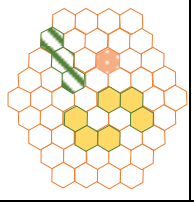
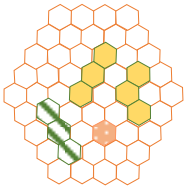
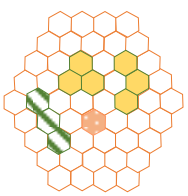
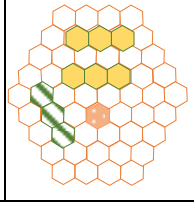
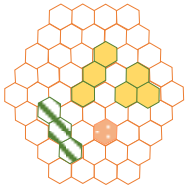
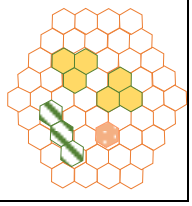
| 初始配對組合<br>(初始 W 值) | 堆砌方式 (-模組-模組) 或(-初始配對組合)<br>〈K 值〉 【共用格數量，角對角數量】<br>(與初始配對組合的共用格 ＋後來堆砌模式所形成的共用格), (與初始配對組合的角相對數量 ＋後來堆砌模式所形成的角相對數量) | | |
|---|---|---|---|
| Ⅰ 3A*2<br>(15) | -2-3A〈K：25〉【6,6】<br>  | -2-3B〈K：26〉【6,5】<br>  | -2-3C〈K：24〉【8,6】<br>  |
| | -3A-2〈K：26〉【7,3】<br>  | -3B-2〈K：25〉【8,6】<br>  | -3C-2〈K：25〉【6,5】<br>  |

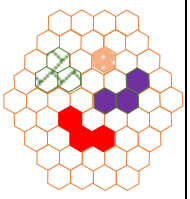
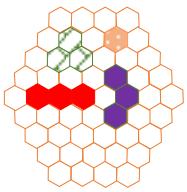
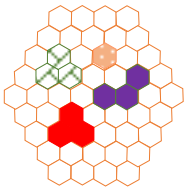
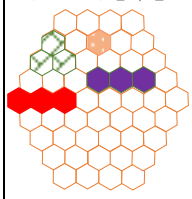
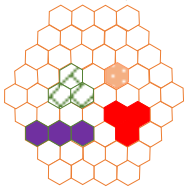
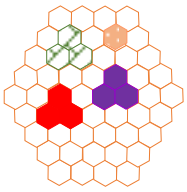
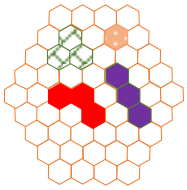
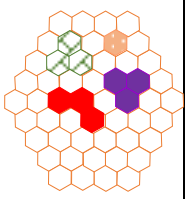
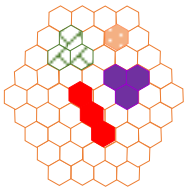
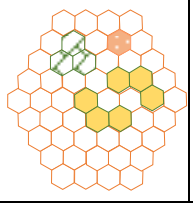
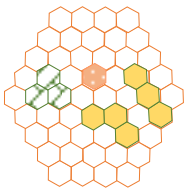
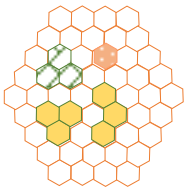
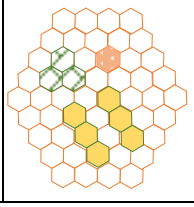
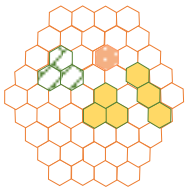
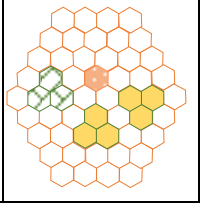
| | | | |
|---|---|---|---|
| | -3A*2〈K：25〉【7,6】<br>  | -3B*2〈K：26〉【7,5】<br>  | -3C*2〈K：24〉【7,6】<br>  |
| Ⅰ 3B*2<br>(15) | -2-3A〈K：26〉【6,5】<br>  | -2-3B〈K：26〉【7,5】<br>  | -2-3C〈K：26〉【5,4】<br>  |
| | -3A-2〈K：26〉【6,5】<br>  | -3B-2〈K：26〉【6,5】<br>  | -3C-2〈K：26〉【5,4】<br>  |
| | -3A*2〈K：26〉【6,5】<br>  | -3B*2〈K：26〉【6,5】<br>  | -3C*2〈K：26〉【5,4】<br>  |
| Ⅰ 3C*2<br>(14) | -2-3A〈K：25〉【6,5】<br>  | -2-3B〈K：25〉【6,5】<br>  | -2-3C〈K：24〉【6,5】<br>  |
| | -3A-2〈K：24〉【7,6】<br>  | -3B-2〈K：25〉【6,5】<br>  | -3C-2〈K：24〉【7,4】<br>  |
| | -3A*2〈K：24〉【7,6】<br>  | -3B*2〈K：25〉【6,5】<br>  | -3C*2〈K：24〉【6,5】<br>  |

《註：本表圖形由作者親自製作》

## 三、初始配對為 3*1 類型的堆砌圖形

表 2-3

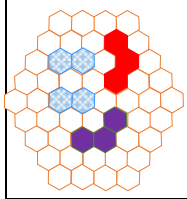
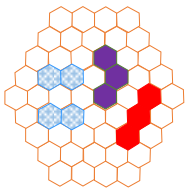
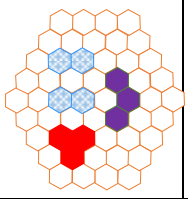
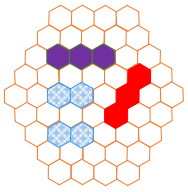
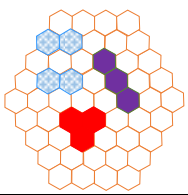
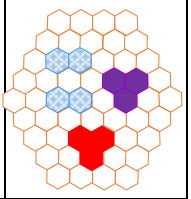
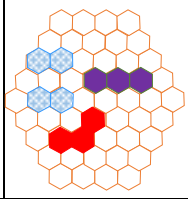
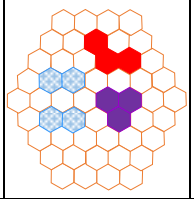
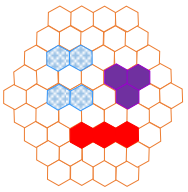
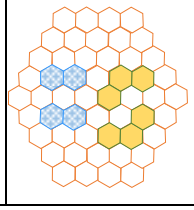
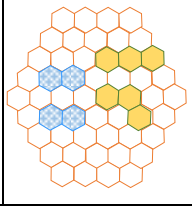
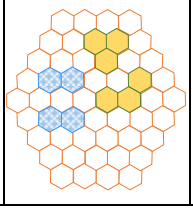
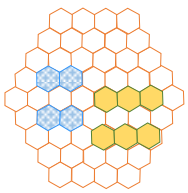
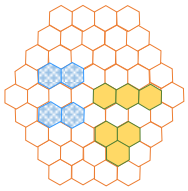
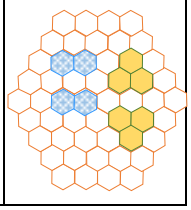
| 初始配對組合<br>(初始 W 值) | 堆砌方式 (-模組-模組) 或(-初始配對組合)<br>〈K 值〉 【共用格數量 ，角對角數量】<br>(與初始配對組合的共用格 ＋後來堆砌模式所形成的共用格), (與初始配對組合的角相對數量 ＋後來堆砌模式所形成的角相對數量) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ⅰ 3A*1<br>(13) | -3A-3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A-3B<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | -3A-3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3B-3B<br>〈K：26〉【7,5】<br>  | -3B-3C<br>〈K：26〉【5,4】<br>  | -3C-3C<br>〈K：25〉【6,3】<br>  |
| | | -3B-3A<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | -3C-3A<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | | -3C-3B<br>〈K：26〉【5,4】<br>  | |
| | -3A*3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A*3B<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | -3A*3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3B*3B<br>〈K：26〉【7,5】<br>  | -3B*3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3C*3C<br>〈K：24〉【6,5】<br>  |
| Ⅰ 3B*1<br>(14) | -3A-3A<br>〈K：26〉【7,6】<br>  | -3A-3B<br>〈K：25〉【8,7】<br>  | -3A-3C<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | -3B-3B<br>〈K：26〉【8,5】<br>  | -3B-3C<br>〈K：25〉【8,5】<br>  | -3C-3C<br>〈K：25〉【7,4】<br>  |
| | | -3B-3A<br>〈K：27〉【6,5】<br>  | -3C-3A<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | | -3C-3B<br>〈K：26〉【7,4】<br>  | |
| | -3A*3A<br>〈K：26〉【7,6】<br>  | -3A*3B<br>〈K：26〉【8,5】<br>  | 3A*3C<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3B*3B<br>〈K：26〉【8,5】<br>  | -3B*3C<br>〈K：26〉【7,3】<br>  | -3C*3C<br>〈K：26〉【6,3】<br>  |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ⅰ 3C*1<br>(13) | -3A-3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A-3B<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A-3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3B-3B<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3B-3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3C-3C<br>〈K：24〉【7,4】<br>  |
| | | -3B-3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3C-3A<br>〈K：24〉【7,6】<br>  | | -3C-3B<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | |
| | -3A*3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A*3B<br>〈K：25〉【8,5】<br>  | -3A*3C<br>〈K：24〉【7,6】<br>  | -3B*3B<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3B*3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3C*3C<br>〈K：24〉【6,5】<br>  |

## 四、初始配對為 2*2 類型的堆砌圖形

表 2-4

《註：表 2-3 及表 2-4 圖形皆由作者親自製作》

| 初始配對組合<br>(初始 W 值) | 堆砌方式 (-模組-模組) 或(-初始配對組合)<br>〈K 值〉 【共用格數量，角對角數量】<br>(與初始配對組合的共用格 ＋後來堆砌模式所形成的共用格), (與初始配對組合的角相對數量 ＋後來堆砌模式所形成的角相對數量) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ⅰ 2*2<br>(13) | -3A-3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A-3B<br>〈K：26〉【7,5】<br>  | -3A-3C<br>〈K：24〉【7,6】<br>  | -3B-3B<br>〈K：25〉【8,5】<br>  | -3B-3C<br>〈K：25〉【7,4】<br>  | -3C-3C<br>〈K：25〉【6,3】<br>  |
| | | -3B-3A<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | -3C-3A<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | | -3C-3B<br>〈K：25〉【7,4】<br>  | |
| | -3A*3A<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3A*3B<br>〈K：26〉【6,5】<br>  | -3A*3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3B*3B<br>〈K：25〉【7,6】<br>  | -3B*3C<br>〈K：25〉【6,5】<br>  | -3C*3C<br>〈K：24〉【6,5】<br>  |

發現：

1. 3A 模組 ，適合放於有轉折的地方，容易形成個共用格；且由表 1-1 發現，單一模組依序堆砌的方式，較適合 3A 模組 。
2. 由表 2-2 發現：配對組合中有 2 個 3C 模組 的，K 值較小，除了本身 W 值小，因圖形有轉折且有齊邊，因此能彈性運用空間較大。
3. 3B 模組 ，適合擺放與初始模組齊邊的位置，如圖 2-1 及圖 2-2，分別有多個角對角及共用格的機會；因 3B 模組和其他模組配對時最多能產生 4 個共用格，若要強化這份優勢，以單一模組依序堆砌的方式較適合，或 2 個 3B 模組以初始模組配對形式出現(圖 2-3)；若 3B 模組是跟其他模組以初始模組形式出現，容易侷限這份優勢，如圖說明(圖 2-4 與圖 2-5 比較)，但整個組合中有 3 個 3B 模組時，共用格的優勢就不那麼明顯，因為在模組集中，K 值小的要求下，圖形的齊邊位置不足，因此以 2 個 3B 模組較適宜(圖 2-2 與圖 2-4 比較)。

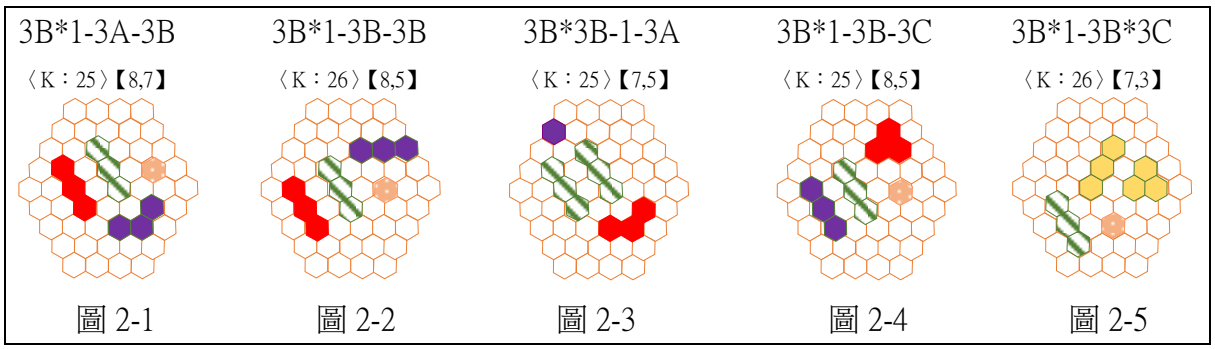



圖 2-1　圖 2-2　圖 2-3　圖 2-4　圖 2-5

《註：本表圖形由作者親自製作》

4. 在相同模組組合的情況下，若 $N_1$ 是以初始配對出現，缺少彈性運用的空間，讓其餘 $N_3$ 模組擺放受限，尤其是 3B 模組 ；再者若 3B 模組為第一個且需擺放在規定的格子內時，3B 模組和其他模組配對時最多能產生 4 個共用格的優勢已然消失，K 值也暴增為 27(如圖 2-6)；若 $N_1$ 是以單一模組形式擺放，能靈活運用，即便圖形有凹角，也能因 $N_1$ 的加入，產生共用格(如圖 2-7 與圖 2-8)。

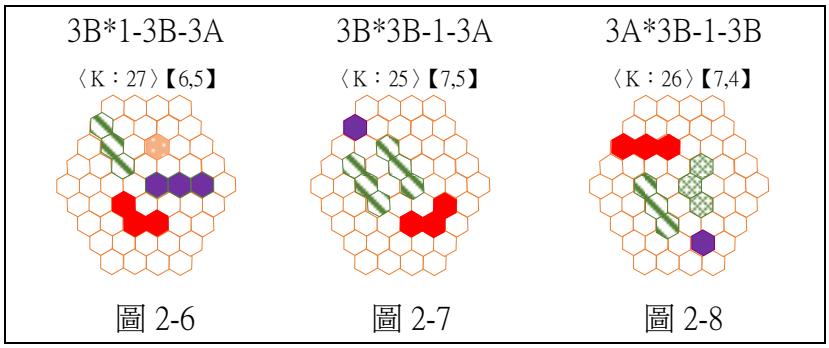
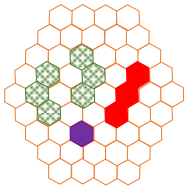
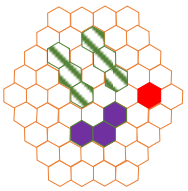
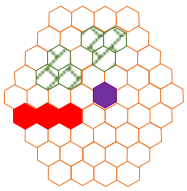
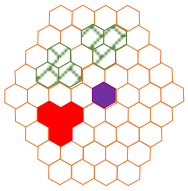
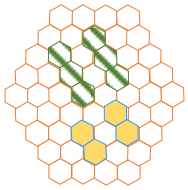



圖 2-6　圖 2-7　圖 2-8

《註：本表圖形由作者親自製作》

5. 以相同單一模組組合初始配對組合時，對 w 值的影響：

(1) 若初始配對組合為 3A*3A：因為 3A*3A 屬集中型配對，雖只有兩個轉折處，但其本身即為彎曲形，也有齊邊的優勢(如圖 2-9)，因此在組合時有較多的選擇，也能產生較多共用格，與其他模組組合後 K 值，分別為 24、25 及 26。

| -1-3B〈K:25〉【6,5】 | -3A-1〈K：25〉【6,5】 | -1-3B〈K：24〉【6,5】 | -1-3C〈K：23〉【6,5】 | -3C-1〈K：25〉【5,4】 |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |
| 圖 2-9 | 圖 2-10 | 圖 2-11 | 圖 2-12 | 圖 2-13 |

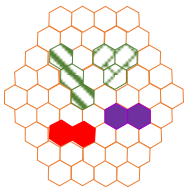
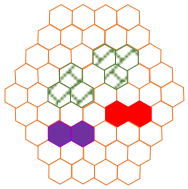
《註：本表圖形由作者親自製作》

(2) 若初始配對組合為 3B*3B：同上述第 3 點，初始配對 3B*3B 有四個轉折處，對於 3A、3C、$N_2$ 及 $N_1$ 這些模組而言，能產生共用格機會較多(如圖 2-10)，所得 K 值，分別為 25 及 26。

(3) 若初始配對組合為 3C*3C，因為其本身組合的 W 值已經小了，加上他的轉角多，也有齊邊的優勢，因此相較於其他初始配對組合(3A*3A、3C*3C……)，即便共用格少於其他初始配對組合，K 值的表現也優於其他。如圖 2-11 與圖 2-12，這和學姐之前研究出的結論相符(若在相同的灰色模組 $N_{MAX}$ 條件下，W 值越少，也就越有利) 。K 值，最少是 23，其餘的 K 值落於 24、25 及 26。

(4) 若初始配對組合為 2*2，也有四個轉折處，且因本身圖形為長條形，也有齊邊的優勢，尤其是組合 3B 模組，最為合適(如圖 2-13)。與其他模組組合後 K 值，分別為 24、25 及 26。

6. 若原先初始配對的 W 值已較低，則所得 K 值也較小：如圖 2-14 中，$I_{3B*3C}$-2-2 這配對的 W 值是 16，且因這配對中有 3B 模組，若沒有運用齊邊的優勢，K 值就會大；而圖 2-15 中，$I_{3C*3C}$-2-2 這配對的 W 值是 15，再加上和其他模組產生較多的共用格，K 值也較小。

| $I_{3B*3C}$-2-2 〈K：26〉【5,4】 | $I_{3C*3C}$ -2-2 〈K：24〉【6,5】 |
|---|---|
|  |  |
| 圖 2-14 | 圖 2-15 |

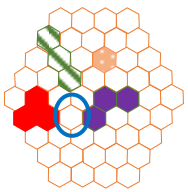
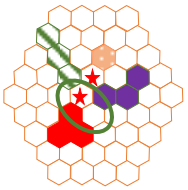
《註：本表圖形由作者親自製作》

討論一：利用初始配對做堆砌時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

1. 模組堆砌組合時，究竟共用格數量、角相對的數量，哪個影響大？

(1) 各種堆砌組合的類型中，若是單一模組在初始配對外圍堆砌，應該優先考量共用格數量，3 個模組間有較大變數，並非倆倆之間都容易產生角對角的關係，因此以能產生較多共用格為優先。

(2) 而兩個單一模組間或初始模組在找尋配對組合時，角對角數量相對重要，因為只有兩個模組對應出的角對角會直接影響他們之間共用格數量，如圖 2-16 中紅色的 3C 模組和紫色的 3A 模組彼此間只有邊對邊的關係，只有一個共用格(藍色圈)，但圖 2-17 中紅色的 3C 模組和紫色的 3A 模組彼此間卻是角對角的關係，會產生兩個共用格(綠色圈)。

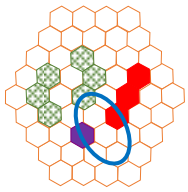
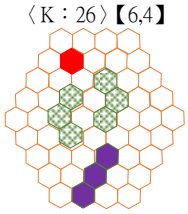
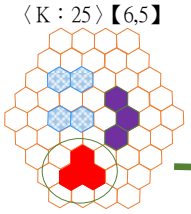
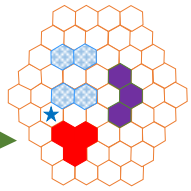
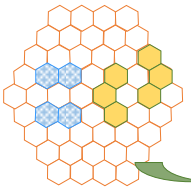
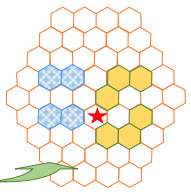
| $I_{3B^{*}1}$-3A-3C〈K：27〉【6,3】 | $I_{3B^{*}1}$-3B-3C〈K：26〉【6,5】 |
|---|---|
|  |  |
| 圖 2-16 | 圖 2-17 |

《註：本表圖形由作者親自製作》

(3) 研究過程中發現：在共用格的數量和角對角的數量之間差值為 1 的情況下，後來的堆砌模組分別和初始配對中的兩個單一模組有共用格，或後來堆砌的兩模組和初始配對模組之間有共用格(圖 2-17 紅色星星處)，可藉此判定是否和初始配對組合緊密相鄰。

(4) 讓共用格增加的堆砌方式：

A. 兩個單一模組分開放是不利 K 值減少，若能創造兩者角對角的機會，使其產生共用格，K 值才能降低，如圖 2-18 與圖 2-19 比較，藍色圈處會多出一格。

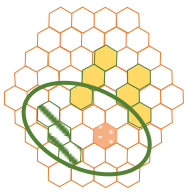
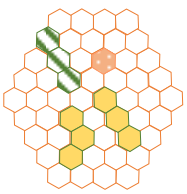
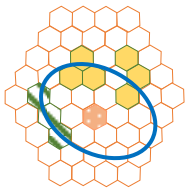
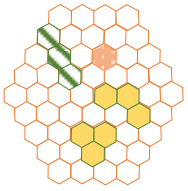
| $I_{3A^{*}3A}$-1-3B | $I_{3A^{*}3A}$-3B-1 | $I_{2^{*}2}$-3A-3C | $I_{2^{*}2}$-3A-3C | $I_{2^{*}2}$-3A-3A | $I_{2^{*}2}$-3A-3A |
|---|---|---|---|---|---|
| 〈K：25〉【6,5】 | 〈K：26〉【6,4】 | 〈K：25〉【6,5】 | 〈K：24〉【7,6】 | 〈K：26〉【7,5】 | 〈K：25〉【7,6】 |
|  |  |  |  |  |  |
| 圖 2-18 | 圖 2-19 | 圖 2-20 | 圖 2-21 | 圖 2-22 | 圖 2-23 |

《註：本表圖形由作者親自製作》

B. 遇到兩個邊的模組時，也以倒三角形方式相對以期製造較多的共用格，如圖 2-20 垂直翻轉成圖 2-21，便可再增加一格共用格(圖 2-21 藍色星星處)。

C. 遇 3A 模組，可改變方向增加共用格，使得 K 值降低，圖 2-23 紅色星星處，原為 3A 和 3A 模組之間的共用格，改變方向後，這一格也和初始配對模組共用，因此 K 值比圖 2-22 的少 1。

D. 遇有凹角的共用格應用，如圖 2-24 和圖 2-25 的 3A*3B 配對模組的位置，圖 2-24 中 3A*3B 配對模組擺在初始配對產生的凹角中，和初始配對組合間形成更多的共用格(如綠色圈)，有 6 格，而圖 2-25 中只有 4 格；圖 2-26 和圖 2-27 也是相同情況，如藍色圈。

| $I_{3B^{*}1}$-3A*3B | $I_{3B^{*}1}$-3A*3B | $I_{3B^{*}1}$-3A*3C | $I_{3B^{*}1}$-3A*3C |
|---|---|---|---|
| 〈K：25〉【9,6】 | 〈K：26〉【7,6】 | 〈K：24〉【9,6】 | 〈K：26〉【7,5】 |
|  |  |  |  |
| 圖 2-24 | 圖 2-25 | 圖 2-26 | 圖 2-27 |

《註：本圖形由作者親自製作》

2. 在初始配對組合外圍做堆砌時：

(1) 兩個單一模組擺放順序有差嗎？會影響 K 值嗎？

若沒規定位置，其實沒差(如圖 2-16 與圖 2-17 比較)，如若有規定的位置的話，差異較為顯著，尤其是 3B 模組(如圖 2-19 與圖 2-20 比較)。

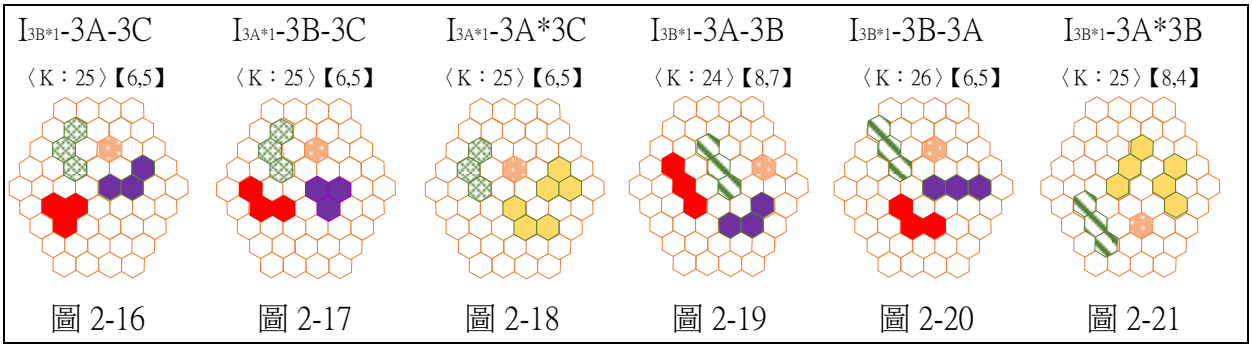



圖 2-16　圖 2-17　圖 2-18　圖 2-19　圖 2-20　圖 2-21

《註：本表圖形由作者親自製作》

(2) 固定模組較有利嗎？

固定模組在初始模組形狀也是固定的情況下，凹角或轉折點的擺放受限，較不利 K 值(如圖 2-19 與圖 2-21 比較)，但若模組組合中以 3A、3C 為主的，基本上與單一模組一個一個方式堆砌的，其 K 值差異不顯著(如圖 2-16 與圖 2-18 比較)。

活動一結論：

1. 針對角對角數量，以單一模組要和另外單一模組配對時影響較為大，若以本研究先設定初始配對組合的情況下，共用格的數量比角相對的數量來得重要！
2. 在初始配對組合外圍做堆砌時，兩個單一模組擺放順序對 K 值無顯著影響。
3. 固定模組在初始模組形狀也是固定的情況下，在凹角或轉折點的擺放方式易受限，調整性小，較不利 K 值。
4. 雖然 3B 模組和其他模組配對時最多能產生 4 個共用格，但因六邊形有較多轉折，若要強化這份優勢，以單一模組依序堆砌的方式，或 2 個 3B 模組以初始模組配對形式出現較適宜。
5. 在活動一的組合研究中，最佳的組合模式，請參閱表 2-1~2-4。
6. 以 I3C*3C-1-3C 組合的類型， K 值 23 最佳。另外扣除其中因擺放限制得出 K 值 27 的狀況，其他組合類型的 K 值皆介於 24~26。

## 活動二、模組間應該怎麼配對組合，才能達到外圍最少白色六邊形？

在尋求最佳化的堆砌過程中，究竟模組間應該怎麼配對組合，才能達到外圍最少白色六邊形？初始配對組合用越大模組越好？

### 一、最佳配對組合

我先依據活動一的研究，將各類模組組合所得出的 K 值(最少，最多)做比較，如表 3-1。

表 3-1

| 組合 | 3A,3A 3B ,1 | 3A,3A 3B ,1 | 3A,3A 3C ,1 | 3A,3B 3B ,1 | 3A,3B 3C ,1 | 3A,3C 3C ,1 | 3B,3B 3B ,1 | 3B,3B 3C ,1 | 3B,3C 3C ,1 | 3C,3C 3C ,1 | 3A,3A 2 ,2 | 3A,3B 2 ,2 | 3A,3C 2 ,2 | 3B,3B 2 ,2 | 3B,3C 2 ,2 | 3C,3C 2 ,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| K 值 | 25 | 25，26 | 25 | 25，27 | 25，26 | 24，25 | 26 | 25，26 | 24，25 | 23，24 | 25，26 | 25，26 | 24，25 | 24，25 | 25，26 | 25，26 |

發現：

1. 如同活動一結果，若組合中沒有 3B 的情況下，K 值普遍小。
2. 和 2-2 這種配對組合時，若 2-2 以初始配對方式和其他模組進行堆砌，K 值會比較小；因為 2-2 模組也是長條型的，若以單一模組形式依序堆砌時，在轉折出較不容易產生共用格，若以初始配對形式出現，能創造四個轉折處(圖 3-1 紅線處)，且上下皆有易產生共用格之處(圖 3-1 紫色格子)，堆砌時能彈性運用。
3. 同第 2 點敘述，兩個 3A、兩個 3B 及兩個 3C 也能創造這樣的轉折處，但若要與其他模組組合時，以兩個 3C 的彈性運用效果最好；兩個 3B 則是適合與 2-2 模組組合，K 值會降低。除了產生共用格之處(圖 3-2 中 2 個紅色圈圈處)能同時運用，且兩個 3B 也能產生最多的共用格，有效降低因圖形沒有彎曲處的劣勢，而取得較佳的 K 值。

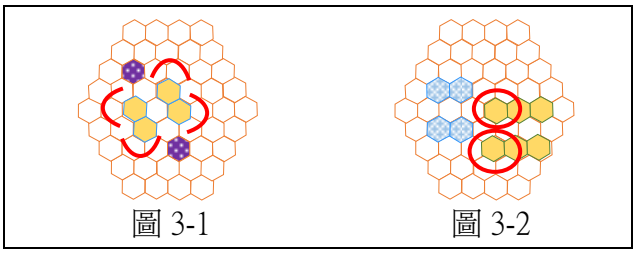


圖 3-1　圖 3-2

《註：本表圖形由作者親自製作》

討論二：在活動二最佳堆砌組合探討中，有初始配對好嗎？需要設定擺放的共用格嗎？初始配對組合用越大模組越好？

1. 模組堆砌組合時，有初始配對好嗎？

若有初始配對組合，外圍模組在堆砌時，會圍繞著初始配對，模組間也容易集中，且因初始配對的 W 值已固定，和其他模組堆砌後，也不需考慮初始配對中的共用格了，可簡化計算。

2. 初始配對組合擺放後，需要設定擺放的共用格嗎？

若以本研究的結果而言，一開始便設定擺放的共用格，不管哪種組合，K 值的數值小，如果去除 3B 擺放在固定位置得到 K 值 27 的狀況，其餘的 K 值在 24、25、26 這三個數值間，而 K 值 27 的狀況會產生是因為 3B 模組又遇上 $N_1$ 模組已經先固定位置了，所以強制將 3B 模組擺放在圖 3-3 綠圈處，和 $N_1$ 模組不會較多的共用格出現；反觀圖 3-4，和圖 3-3 一樣都有兩個與初始配對的共用格(紅色星星處)，但強制擺放黑圈處是 3A 模組，則 3B 模組又能和 3B 模組組合，產生較多的共用格 4 格，K 值當然降低。

$I_{3B*1}$-3B-3A〈K：27〉【6,5】

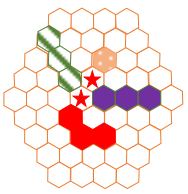


圖 3-3

$I_{3B*1}$-3A-3B〈K：25〉【8,7】

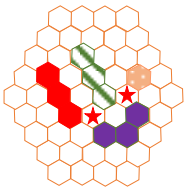


圖 3-4

《註：本表圖形由作者親自製作》

3. 初始配對組合用使用越大模組越好？

就本研究結果而言，初始配對模組的大小對 K 值無顯著的影響。

## 二、K 值的計算公式

研究中發現，共用格數量與角對角數量差 1，就代表外圍堆砌的模組(2 個單一模組或固定模組)與初始模組有共用格(如圖 3-5，紅色星星處)，若不是差 1 則表示僅一個後來的單一模組與初始模組有共用格(如圖 3-6，綠色星星處 )。

圖 3-5 中扣除的共用格還包含原先初始配對組合的 W 值，另一個則是後來堆砌的兩個單一模組和初始配對模組之間的空用格，因為採角對角方式堆砌，需再扣 1；若如圖 3-6，綠色星星處，他僅是其中一個單一模組和初始配對組合的共用格，就不需再多扣 1。

$I_{2*2}$-3B-3C〈K：25〉【6,5】

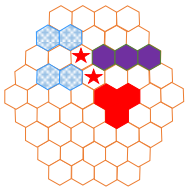


圖 3-5

$I_{2*2}$-3B -3C〈K：25〉【7,4】

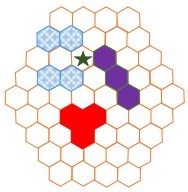


圖 3-6

《註：本表圖形由作者親自製作》

我借用學姐的公式模板，推出此次研究的計算公式：

$$K = \boxed{W_{N*N} + (W_N + W_N) \text{或} W_{N*N}} - \Sigma S_P - 1$$

〈 □： 初始配對組合的 W 值+2 個單一模組(或固定配對組合)總和；

$\Sigma S_P$：所有模組與初始配對組合間的共用格總數；

1： 若 $\Sigma S - \Sigma A=1$ ，則需減多共用的一格，否則為 0〉

討論三：共用格與角相對數量相減非 1 時的狀況，是否 K 值變大？

依本研究發現，若 $\Sigma S - \Sigma A=1$ ，只能說明後來堆砌的模組彼此間和初始配對組合出現了 2 個共用格；即便 $\Sigma S - \Sigma A \neq 1$ ，不代表模組彼此間的共用格減少，只是沒有三者間的共用格或共用格僅 1 個。

且依活動一、二得知，共用格是影響 K 值的最主要因素，而共用格的多少取決於擺放的位置，因此即便 $\Sigma S - \Sigma A \neq 1$ ，K 值也不會因此有明顯的變化。

## 三、此次研究的特色及優勢

我將研究成果和學姐去年研究結果相比，結果列於表 3-2：

表 3-2

| 時間 | 最佳 K 值 | 討論的方式 | 討論範圍 | 討論的總組數 | K 值範圍 | K 值的公式 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 113 年<br>學姐 | 23 | 凸角和凹角六邊形為固定圖形，中心擺放單一模組，並在外圍依序順時針排列 | 3331 | 超過<br>220 組 | 23<br>\|<br>31 | $K = \Sigma W - \Sigma S - \Sigma S_3$<br>$\Sigma W$：所有個別模組的 W 值總和 ；<br>$\Sigma S$：所有模組與鄰近模組間的共用格總數；<br>$\Sigma S_3$：任意三模組間的共用格總數 |
| 114 年<br>我 | 23 | 無固定圖形，但以正六邊形蜂巢形狀為主，以初始配對組合和其他模組做堆砌 | 3331<br>3322 | 153 組 | 23<br>\|<br>27 | $K = \boxed{W_{N*N} + (W_N + W_N) \text{或} W_{FN*N}} - \Sigma S_P - 1$<br>□：初始配對組合的 W 值+2 個單一模組(或固定配對組合)總和；<br>$\Sigma S_P$：所有模組與初始配對組合間的共用格總數；<br>1：若 $\Sigma S - \Sigma A=1$ ，則需減多共用的一格，否則為 0 |

學姐的貢獻：

1. 確認各種模組的堆砌關係，角對角和邊對邊的差異性。
2. 討論範圍廣：不只模組間的堆砌方式、模組大小，對於外圍的六邊形也以不同形狀做探討。
3. 根據模組的相對關係，包含 W 值、A 值及 S 值等，求得 K 值公式。

我的優勢：

在學姐前導研究的基礎上，這次我將研究範圍擴增，但方式簡化，深度加廣，與學姐前一年的研究相比，這次研究有以下特點：

1. 變數少：學姐以中心擺放一個模組，其餘模組在外圍依序以順時針方式擺放，因須討論三個模組共用格的問題，變數多，導致探討的圖形超過 200 組，耗時且需檢查多次；此次我先以兩個模組配對後，在探討其餘兩模組堆砌的相對關係，將變數減少，因此討論的圖形相對減少。
2. 範圍加廣：學姐只針對 3331 形式探討，我則是多增加 3322 形式的探討。
3. 公式簡化：在這個活動中，我分析圖形的三個關係值：W 值、S 值和 A 值的相互關係，得知 S 值和 A 值的差值，可判定格子共用時，需不需要再減 1，以求得 K 值的計算公式。
4. 學姐選用固定圖形做外圍堆砌，模組間容易分散，K 值範圍大，為 23~31；我採取初始配對組合方式，另兩組依著這個配對堆砌，因為模組集中，K 值範圍相對小，為 23~27。

活動二結論：

1. 在活動二最佳堆砌組合探討中，若有初始配對組合，模組間容易集中，可簡化計算。
2. 若以本研究的結果而言，初始配對組合擺放後，一開始便設定擺放的共用格，不管哪種組合，K 值的數值會比較小。
3. 就本研究結果而言，初始配對模組的大小對 K 值無顯著的影響。
4. K 值計算方式：

$$K = \boxed{W_{N*N} + (W_N + W_N) \text{或} W_{N*N}} - \Sigma S_P - 1$$

〈 □： 初始配對組合的 W 值+2 個單一模組(或固定配對組合)總和；

$\Sigma S_P$：所有模組與初始配對組合間的共用格總數；

1： 若 $\Sigma S - \Sigma A = 1$ ，則需減多共用的一格，否則為 0〉

5. 依本研究發現，共用格是影響 K 值的最主要因素，而共用格的多少取決於擺放的位置，因此即便 $\Sigma S - \Sigma A \neq 1$ ，K 值也不會因此有明顯的變化。
6. 研究的特色及優勢，請參閱表 3-2 及其說明。

## 活動三：六邊形蜂巢模組堆砌策略延伸應用

經由前兩個活動，對於模組間的最佳配對有初步的掌握，接著我將運用活動二的

結果，嘗試以長鏈型的六邊形及立體的足球做蜂巢堆砌。模組的類型和活動一二相同，最大的為 $N_3$ 模組。

## 一、策略應用過程分析與討論

(一) 長鏈型的六邊形

1×1　　1×2　　單一鏈形　　固定鏈形

圖 4-1　《註：本圖形由作者親自製作》

觀察點：

圖形的變化為一個完整的六邊形，在其右邊不斷疊合六邊形(如圖 4-1)，鄰近兩個六邊形會有兩小格是重合的，也就是說不斷增加這個鏈形 ；而中心處的黑色六邊形設定為共用格，也就是不能擺放模組的意思！

思考點：

根據活動一及活動二得知，若須 $N_3$ 模組，以 3A 模組 最適合。我以 $N_3$ 模組、$N_2$ 模組及 $N_1$ 模組分別做探討。

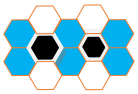
我先以初始配對組合方式，針對 1×2 的長鏈形做分析，再依次增加鏈形。因為初始配對組合最右邊的模組所占格子數會影響後續鏈形上模組的擺放形式，因此我以這兩格有無填滿作為分類基準。

若圖形擺放經由移動或翻轉，其相對位置不變，視為同一種；堆砌時以能最大限度填滿格子為準，若單一鏈形或固定鏈形中出現鄰近的 2 個空白格(如下圖 4-2 中紫色圈圈處)，這類鏈形則不考慮。

圖 4-2　《註：本圖形由作者親自製作》

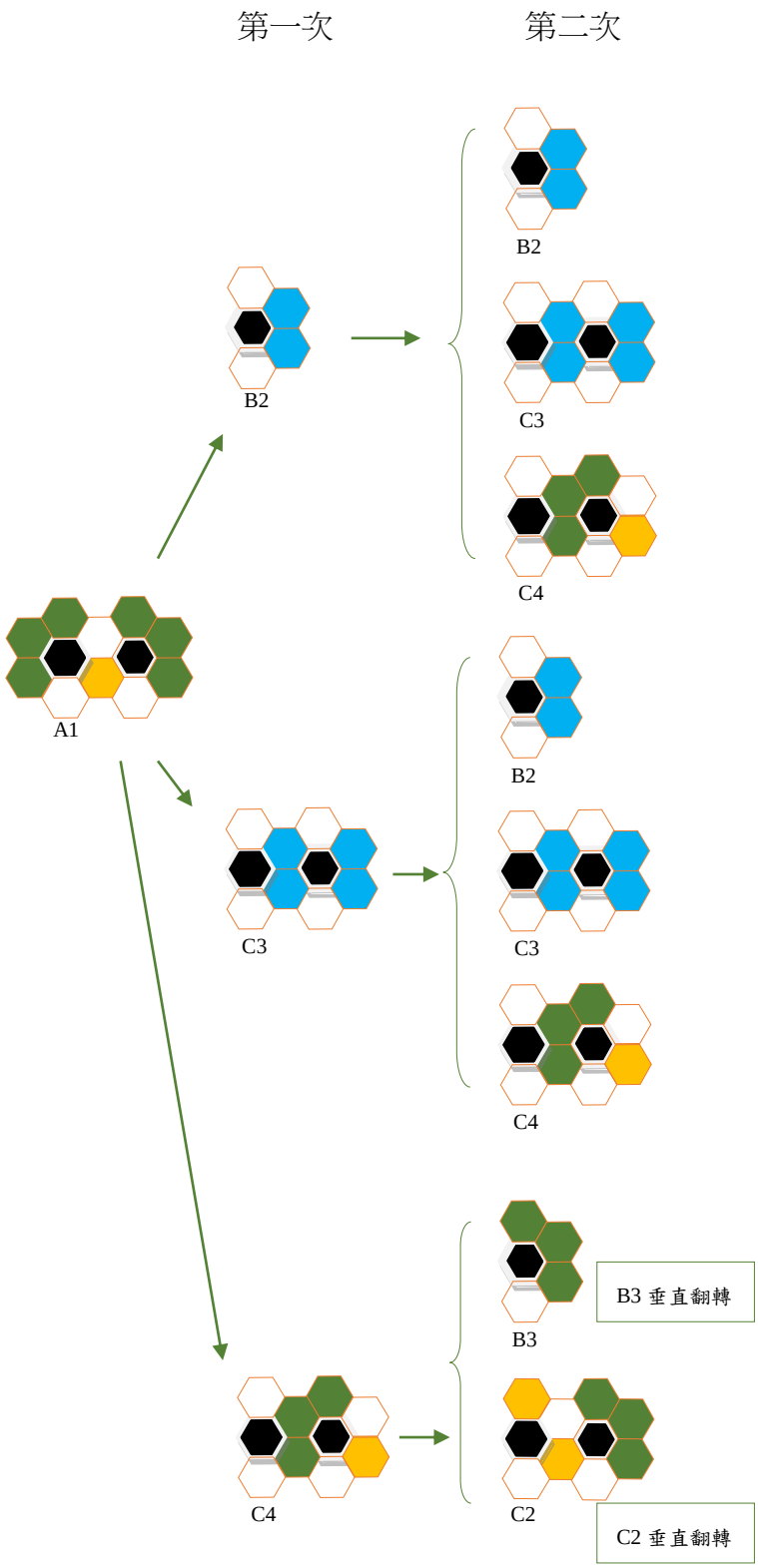
以下我以實際的成果做操作，可能形成的鏈形模組擺放模式列於表 4-1，討論及說明則列表 4-2：

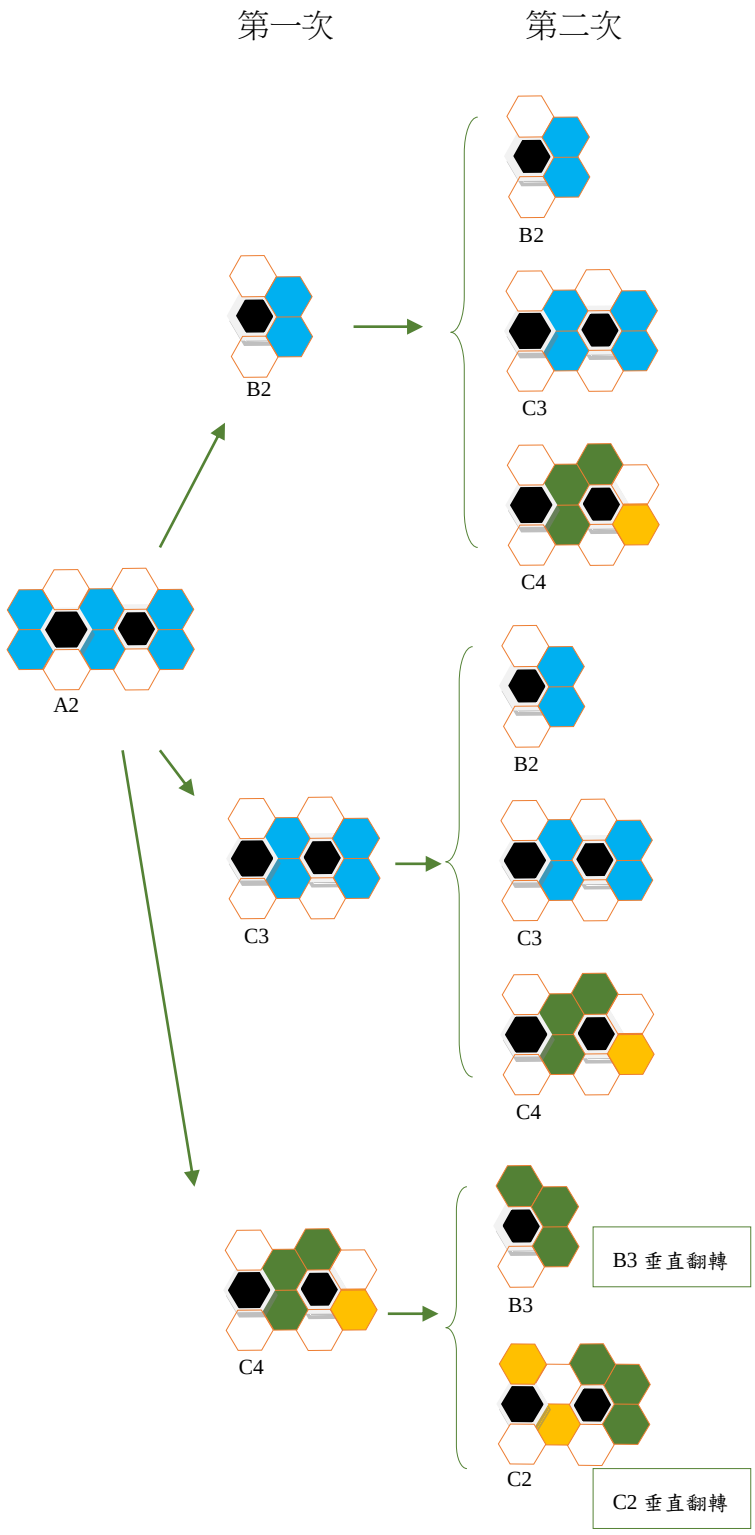
表 4-1

| 1×2 長鏈形初始的堆砌模式 | 單一鏈形 | 固定鏈形(2 條單一鏈形為主) |
|---|---|---|
| 最右邊兩格滿填的狀況<br>A1 <br>A2  <br>最右邊只填了一格的狀況<br>A3 <br>A4 | B1 B2 B3<br> | C1 C2<br> <br>C3 C4<br> |

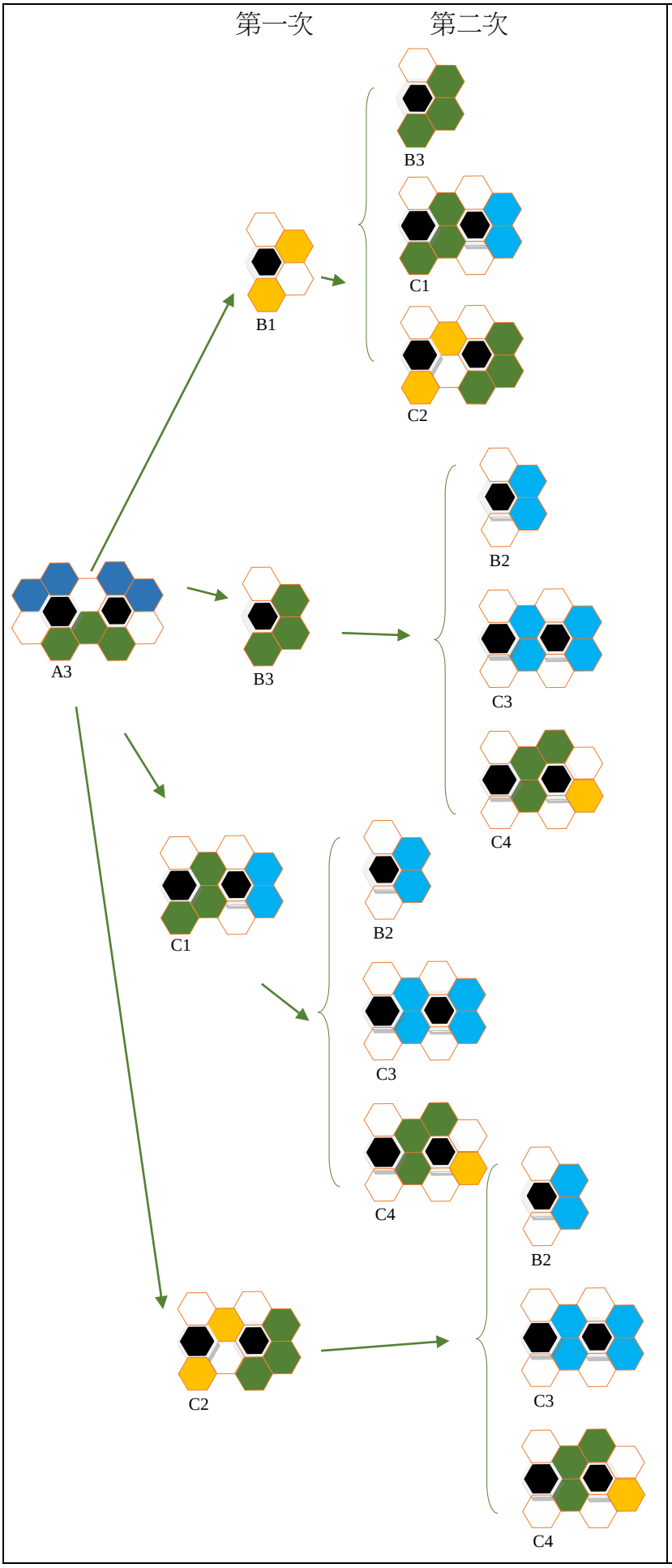
《註：本表圖形由作者親自製作》

表 4-2

| 1×2 長 鏈 形 初 始 的 堆 砌 模 式、圖 形 演 變 及 操 作 說 明 | |
|---|---|
|  | 1. 若第一次以單一鏈形 B2 增加，基於有色六邊形不能相鄰的原則，因此第二次的圖形只能是鏈形左邊兩格皆是空白格的 B2、C3、C4 模組。<br>2. 若第一次增加的是固定鏈形，觀察其最右邊：<br>(1) 若是滿格，第二次的鏈形模組可以是單一鏈形左邊兩格皆是空白格的 B2，也可以是同樣左邊兩格皆是空白格的固定鏈形 C3、C4 模組。<br>(2) 若只填一格，第二次的鏈形模組也只能左邊空白格僅一格的單一鏈形或固定鏈形，但這些鏈形都須垂直翻轉才行。<br><br>◎第三次之後：<br>1. 決定增加的是單一鏈形，還是固定鏈形？<br>2. 根據上述第 1 點的鏈形，觀察其最右邊的是滿格或是只填一格，再決定下一次的鏈形模組。 |




因為初始配對的鏈形 A2 其最右邊兩格都是滿填的狀況，因此和初始配對的鏈形 A1 的操作過程相同。




1. 若第一次以單一鍊形增加：

(1) 若為 B1：基於有色六邊形不能相鄰的原則，因此第二次的圖形只能左邊空白格僅一格的單一鏈形或固定鏈形，為 B3、C1、C2 模組。

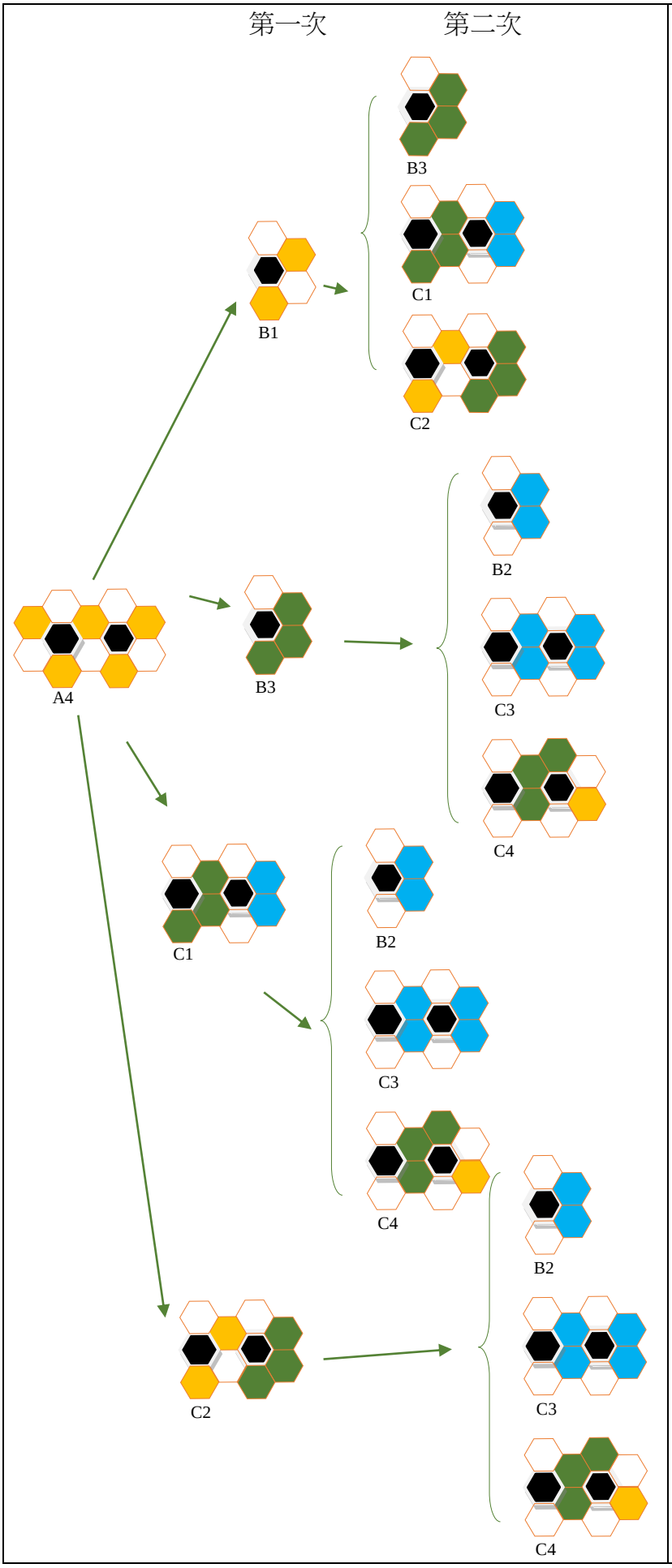
(2) 若為 B2，第二次的圖形只能是鏈形左邊兩格皆是空白格的 B2、C3、C4 模組。

2. 若第一次增加的是固定鏈形，觀察其最右邊均為滿填的格子：

(1) 不管是 C1 或 C2，第二次的鏈形模組只能是單一鍊形左邊兩格皆是空白格的 B2，也可以是同樣左邊兩格皆是空白格的固定鏈形 C3、C4 模組。

◎第三次之後：

1. 決定增加的是單一鏈形，還是固定鏈形？
2. 根據以上第 1 點的鏈形，觀察其最右邊的是滿格或是只填一格，再決定下一次的鏈形模組。

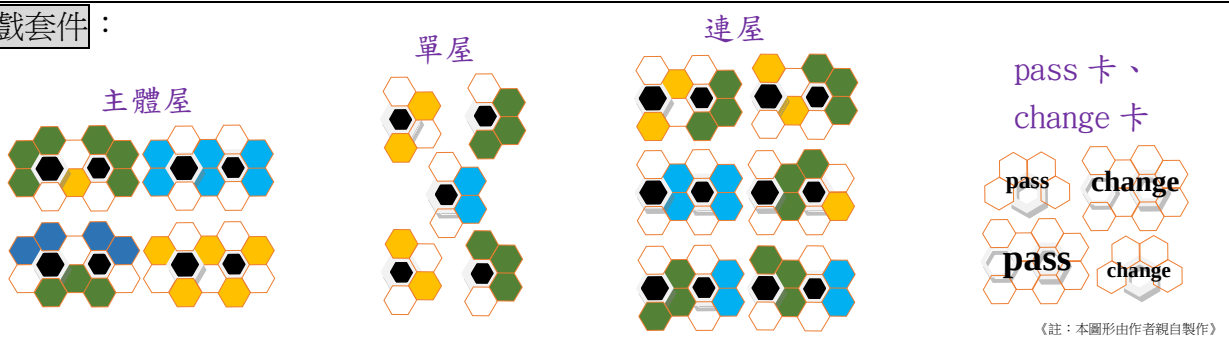



因為初始配對的鏈形 A4 其最右邊只有一格是空白的狀況，在選擇上只能左邊空白格僅一格的單一鏈形或固定鏈形，因此和初始配對的鏈形 A3 的操作過程相同。

《註：本表圖形由作者親自製作》

(二)長鏈形六邊形延伸遊戲—Bee 的豪宅夢

遊戲套件：




《註：本圖形由作者親自製作》

☆ 套件組非立體圖形，且為單面設計，無法進行垂直翻轉，因此針對一些單格填滿的套件，已先行垂直翻轉，成為套件組。

☆ 除了主題屋 4 件、pass 牌 4 件和 change 牌 8 件，其餘套件皆有 16 組，可根據遊戲人數設定套組。

遊戲說明：

遊戲過程

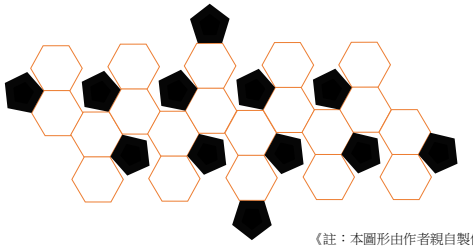
本圖片由指導教師拍攝

1. 人數：2- 4 人。
2. 比分方式：有色格總數多者為勝，若有兩人相同數量，則以扣除初始配對後所得有色格總數多者為勝。
3. 規則：
   (1) 猜拳決定初始的主體屋。
   (2) 參加者共同決定單屋或連屋的翻牌順序。
   (3) 參加者一律將主體屋攤開在面前，翻牌後看能否接續屋體；若不行，則蓋牌放置一旁，若抽中的是左方有兩格空白的牌，由翻牌自行決定是否接續屋體(可自行決定由左或由右接續)，或放置一旁等待適合的接續方式。
   ☆ 已接續完成的屋型，不得更動接續順序。
   (4) 翻到 pass 牌者可於下一輪使用，通常用於已抽到太多不適用的牌時。
   (5) 若抽到 change 牌時，可立即使用，或之後使用皆可。但使用時，需先將要置換的牌先放於中間(不須翻開，採大換大、小換小)，指定更換對象後，請對方將其牌列出(不須翻開)，再由其中抽走一張，並將自己的牌交予對方，即完成交換手續。
   ☆ 交換後看能否接續屋體，若不行，則蓋牌放置一旁，若抽中的是左方有兩格空白的牌，由翻牌自行決定是否接續屋體，或放置一旁等待適合的接續方式。

發現：

1. 請低年級的學弟妹實際操作遊戲，發現挑選的主體屋會影響後面接續的屋體，因為有兩個主題屋若上下顛倒，右邊一格填滿的位置也會隨之更動，所以一開始參賽者要謹慎選擇主體屋。
2. 單屋和連屋都有左邊均為空格的部分，當然這兩種套件彈性利用空間大，但參賽者須考量到是否留到〝遇右邊滿格時的接續選擇〞，因為學弟妹覺得左邊均為空格的套件超級無敵好用，導致後續一直蓋牌；另外這兩種套件的有色格子數較少，所以在比分時較為吃虧。

(三) 立體的足球

| 立體足球 | 足球圖形展開圖 |
| --- | --- |
| 本圖片由指導教師拍攝 |  《註：本圖形由作者親自製作》 |

觀察點：

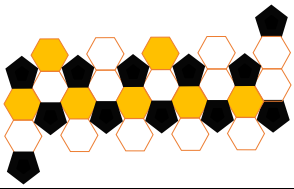
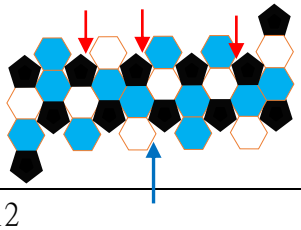
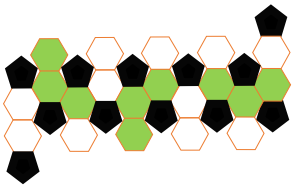
由上向下俯瞰，上方五邊形連接五個六邊形，若要有效利用，且符合題目要求的有色六邊形不相鄰的狀況只有兩種情況：是連兩格加一格的情形，或者取兩格至少相隔一邊；而中心處的黑色五邊形一樣設定為共用格，也就是不能擺放模組！

思考點：

根據活動一及活動二得知，若須 $N_3$ 模組，以 3A 模組 最適合。

首先，我以單一種的 $N_3$ 模組、$N_2$ 模組及 $N_1$ 模組分別來填格，如下表 4-3 所列：

表 4-3

| 單一模組 | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 圖示 |  |  |  |
| 最多有色六邊形總數 | 7 | 12 | 9 |

《註：本表圖形由作者親自製作》

由表可知：若單以 $N_1$ 或 $N_3$ 來填，空白格無法有效利用，因此有色六邊形的總數偏少；單以 $N_2$ 來填，雖然可得出有色六邊形總數 12，若要避開跨格的狀況，可能區分的橫格為 3232(紅線分隔處)及 55(藍線分隔處)，但兩種方式變數多，橫格範圍大，不易操作。

我以上層空白格部分為考量點(如圖 4-3 中綠線所指，英文字母的格子部分)，分成連兩格加一格的情形和任意兩格不相鄰的狀況探討。同樣的，若圖形擺放經由移動或翻轉，其相對位置不變，視為同一種；堆砌時仍舊以能最大限度填滿格子為準。我將立體的足球平面化，同一個編碼代表相連的邊。

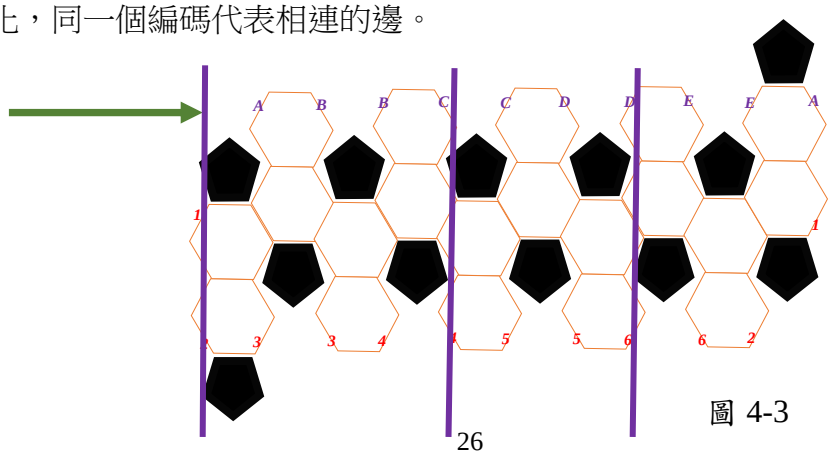
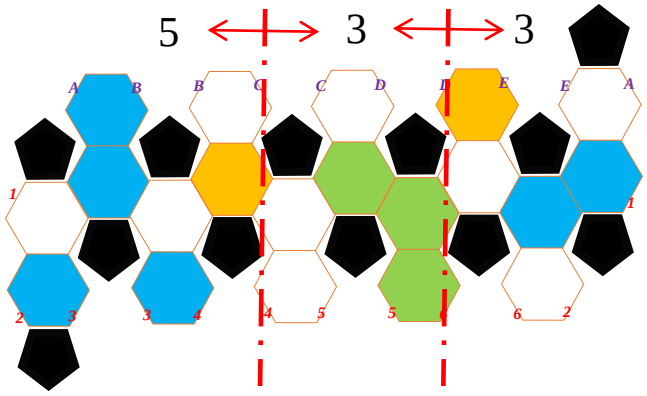
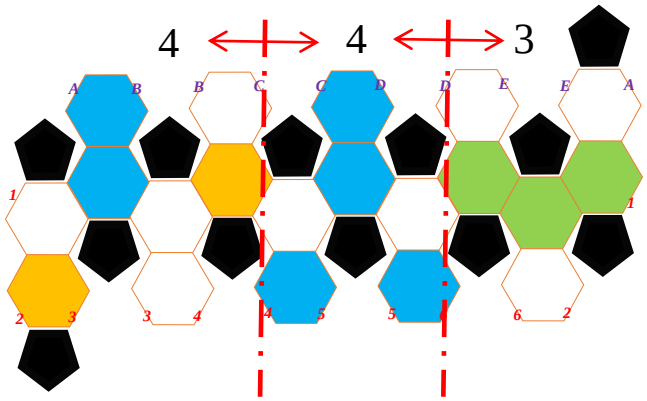
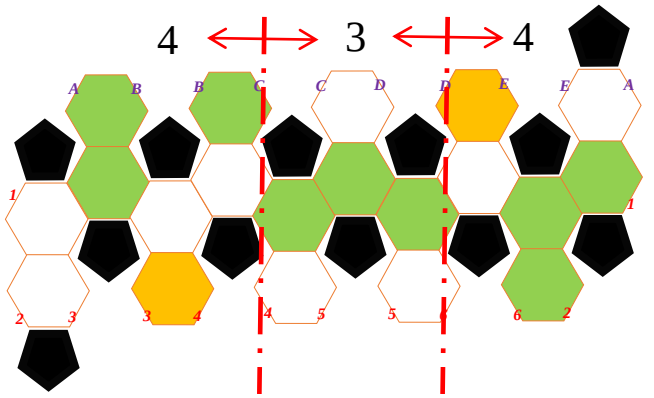



圖 4-3 《註：本圖形由作者親自製作》

若以上方連兩格加一格的情況做發想，那麼最初始的配對模式應該是四個橫格範圍，也就是上圖兩條紫線的範圍，所以我將整個足球範圍分為三區，整個六邊形共有 20 個，所能最大範圍的有色六邊形為 11 個，而四個橫格範圍能容納最多有色六邊形的個數為 5，因此由 5 往下探討，有 533 及 434 這兩種類型。足球為立體圖形，翻轉、順逆時針轉，若其相對位置不變，均視為同一種圖形。

延續上一子活動的方式，以下我以實際的成果做操作，討論及說明列表 4-4：

表 4-4

| 第一區的堆砌模式、後兩區的圖形演變及操作說明 | |
|---|---|
|  <br>  <br>  | 發現與討論<br>1. 因為無法做跨區填模組，在操作時，我儘量將第一區的最右邊填上格子。<br>2. 球的形體為立體圖形，若上方英文數字部分填滿的是 3 格，則下方數字格部分只能是 2 格。<br>3. 延續長鏈形六邊形的模式，雖然可透過翻轉堆砌，但受限足球為立體的，且最大模組為 $N_3$ 的前提，後兩區無法在所能最大範圍的有色六邊形為 11 個的情況下交替使用。 |

《註：本表圖形由作者親自製作》

## 二、活動的心得

雖然蜂巢堆砌的活動進行了很多次，學姐之前用了三次不同方法研究過，但每次和老師討論後還是會有新的方式或相關可用的題材；這次研究立體的足球形體，我對六

邊形的研究又往前一步了！

# 陸、 結論

一、 利用初始配對組合做堆砌組合時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

(一)、針對研究目的，針對角對角數量，以單一模組要和另外單一模組配對時影響較大，若以本研究先設定初始配對組合的情況下，共用格的數量比角相對的數量來得重要！

(二)、在初始配對組合外圍做堆砌時，兩個單一模組擺放順序對 K 值無顯著影響。

(三)、固定模組在初始模組形狀也是固定的情況下，在凹角或轉折點的擺放方式易受限，調整性小，較不利 K 值。

(四)、雖然 3B 模組和其他模組配對時最多能產生 4 個共用格，但因六邊形有較多轉折，若要強化這份優勢，以單一模組依序堆砌的方式，或 2 個 3B 模組以初始模組配對形式出現較適宜。

(五)、在活動一的組合研究中，最佳的組合模式，請參閱表 2-1~2-4。

(六)、以 $I_{3C*3C}$-1-3C 組合的類型， K 值 23 最佳。另外扣除其中因擺放限制得出 K 值 27 的狀況，其他組合類型的 K 值皆介於 24~26。

二、 模組間應該怎麼配對組合，才能達到外圍最少白色六邊形？利用初始配對組合做堆砌的策略解原問題，外圍白色六邊形總數最佳解(公式)？

(一)、在活動二最佳堆砌組合探討中，若有初始配對組合，模組間容易集中，可簡化計算。

(二)、若以本研究的結果而言，初始配對組合擺放後，一開始便設定擺放的共用格，不管哪種組合，K 值的數值會比較小。

(三)、就本研究結果而言，初始配對模組的大小對 K 值無顯著的影響。

(四)、K 值計算方式：

$$K = \boxed{W_{N*N} + (W_N + W_N) \text{或} W_{N*N}} - \Sigma S_P - 1$$

〈 □： 初始配對組合的 W 值+2 個單一模組(或固定配對組合)總和；

$\Sigma S_P$：所有模組與初始配對組合間的共用格總數；
1： 若 $\Sigma S - \Sigma A=1$ ，則需減多共用的一格，否則為 0〉

(五)、依本研究發現，共用格是影響 K 值的最主要因素，而共用格的多少取決於擺放的位置，因此即便 $\Sigma S - \Sigma A \neq 1$ ，K 值也不會因此有明顯的變化。

(六)、此次研究的特色及優勢，請參閱表 3-2 及其說明。

三、 利用解原問題的策略，延伸探討長鏈形六邊形及立體足球的堆砌方式。

(一)、針對長鏈形六邊形的堆砌，我沿用活動一及活動二所得，以 3A 模組 搭配 $N_3$ 模組、$N_2$ 模組及 $N_1$ 模組分別做探討，獲得堆砌規則。其初始的堆砌模式、圖形演變及操作說明，請參閱表 4-2。

(二)、我以長鏈形六邊形獲得的規律設計一套〝Bee 的豪宅夢〞遊戲，讓研究更為活化，其設計方式及遊戲規則，請參閱活動三(長鏈形六邊形延伸遊戲—Bee 的豪宅夢)。

(三)、將立體的足球平面化，並沿用長鏈形六邊形獲得的規律，進行活動，共有三種堆砌方式。其初始的堆砌模式、圖形演變及操作說明，請參閱表 4-3。

# 柒、 參考資料及其他


中華民國第 64 屆中小學科學展覽會作品（民 113）。**凹凸有竅門，完美再呈現！~六邊形蜂巢堆砌策略之探討**。科學教育館。

嘉義縣第 63 屆中小學科學展覽會作品(民 112)。數學科國小組。**多邊形蜂巢堆砌策略之探討**。嘉義縣政府。

嘉義縣第 62 屆中小學科學展覽會作品(民 111)。數學科國小組。**環狀堆砌蜂巢策略再探討**。嘉義縣政府。

嘉義縣第 53 屆中小學科學展覽會作品(民 102)。數學科國小組。**邊角相對、環環圍繞～堆砌蜂巢最佳策略探討之研究**。嘉義縣政府。

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品（民 101）。**層層相鄰、邊邊相護**。科學教育館。

翰林企業股份有限公司（民 113）。**國小 4 下數學**。**第 3 單元 垂直、平行與四邊形（38-53 頁）**。台南：翰林企業股份有限公司。

# 【評語】080408

本研究採用初始配對方式，針對共有格數量、角對角數量及各類模組間最佳的組合，研究「在六邊形蜂巢中如何擺放有色六邊形，可求得外圍白色六形總數最少？」並且依模組間的相互關係值，求得包圍的白色六邊形總數(K 值)的計算公式、並將研究結果進行延伸。利用前人的研究結果，擴充研究範圍、展現新的研究視角、同時探尋不同的研究問題、或是提出更佳、更簡化的解法，也不失是一種尋找科展題材的方式；整體觀之，本研究改良相關六邊形蜂巢配對組合堆砌問題，提出新方法進一步探討外圍白色六邊形總數最佳解，並延伸至長鏈形六邊形及立體足球堆砌的探究，將結果設計成有趣的可操作遊戲，是一份值得嘉許的作品。

# 作品海報

# 依〝形〞組隊，優勢再現！

## ~六邊形蜂巢堆砌策略再探討

## 摘要

我運用學姐前三年研究的結論，採用初始配對方式，針對共有格數量、角對角數量及各類模組間最佳的組合研究：「在六邊形蜂巢中如何擺放有色六邊形，可求得外圍白色六形總數最少？」且依據模組間的相互關係值，求得 K 值(包圍的白色六邊形總數)計算公式。

在延伸活動中，我沿用初始配對模式，找出平面長鏈形六邊形的蜂巢堆砌模式，也求得足球這種立體六邊形組合的蜂巢堆砌模式。

## 壹、研究動機

去年我跟在學姐身邊開始科展研究，我們的研究一直是繞著這個主題：「若有灰色及白色的六邊形多個，利用這些六邊形堆砌成一個蜂巢，最外圍的六邊形一定要白色，若現在要利用 10 個灰色六邊形堆砌一個蜂巢，能相鄰的最多只能有 3 個灰色六邊形時，最少需要幾個白色六邊形包圍？」

學姐三年來利用不同的方式做研究，有些過程圖形繁多，計算繁複；這次在學姐前導研究的基礎上，我將研究範圍擴增，但方式簡化，希望用簡化的圖形數量找出較佳的堆砌策略，另外，我也將研究觸角擴增至立體的足球，讓研究的深度加廣。

## 貳、研究目的

本研究我想要探討下列問題：

一、利用初始配對組合做堆砌組合時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

二、模組間應該怎麼配對組合，才能達到外圍最少白色六邊形？ 利用初始配對組合做堆砌的策略解原問題，外圍白色六邊形總數最佳解(公式)？

三、利用解原問題的策略，延伸探討長鏈形六邊形及立體足球的堆砌方式。

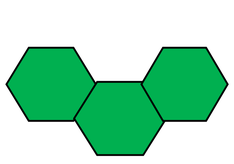
## 參、研究設備及器材

紙、色筆。

## 肆、研究方法

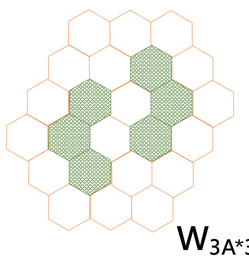
### 一、關於蜂巢的排列組合各項定義

(一)六邊形相鄰的基模類型定義及名詞說明



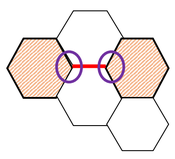
$C_3$

圖 1-1



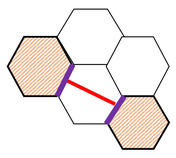
$W_{3A*3A\ =\ 16}$

圖 1-2



角對角

圖 1-3



邊對邊

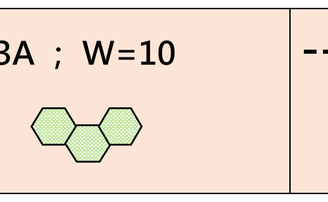
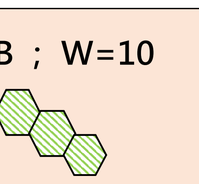
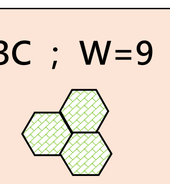
圖 1-4

(二)計算所需的白色六邊形總數的方法

採 3,3,3,1 及 3,3,2,2 兩種模組來探討。而 $N_3$ 的組合模式有以下三種，為方便辨識，設為 3A、3B 及 3C ：

| --C 3A ； W=10 | -- C 3B ； W=10 | --C 3C ； W=9 |
|---|---|---|
|  | |  |

### 二、之前學姐解原問題的方式

| 年度 | 111 年 | 112 年 | 113 年 |
|---|---|---|---|
| 方法 | 以白色六邊形為主角，標直角坐標，以環狀方式堆砌。 | 以灰色六邊形為主角，固定蜂巢形狀。 | 以灰色六邊形為主角，以凹或凸六邊形蜂巢為形狀，採用單一模組為中心，依序在外圍順時針堆砌模組。 |
| 研究結果 | 只要是凹槽形的，或中間白色數量大於 6 時，都可透過轉換成類似〝結繩〞方式的排列(右圖)，進而取得最佳的 K 值。 | 若是固定圖形的狀況下，正六邊形的蜂巢，有不錯的 K 值。 | 以外圍三個凸角組合的類型，間隔數為 12 時的模組組合，可得最小 K 值 23。 |
| 圖形與數量 |  3,3,3,1(P=10, K=23) |  3,3,3,1 ( P=10,K=25) |  3,3,3,1 ( P=10, K=23) |

註：本表圖形出自嘉義縣第 62 屆、63 屆、64 屆中小學科學展覽會作品「環狀堆砌蜂巢策略再探討」、「多邊形蜂巢堆砌策略之探討」及「凹凸有竅門，完美再呈現！~六邊形蜂巢堆砌策略之探討」(作者：楊婷婷)

根據學姐前三年的研究中，我引用以下幾個重點：

(一)、最大範圍的模組使用越多，相對的角或共用格多，外圍所需的白色六邊形總數也越省。

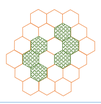
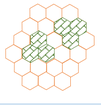
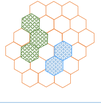
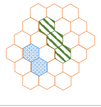
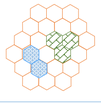
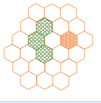
(二)、在 P 值相同的條件下，組合模式以越少基模組合越能達到經濟效益。

(三)、而若在相同的灰色模組 $N_{MAX}$ 條件下，W 值越少，也就越有利。

### 三、我運用的方法

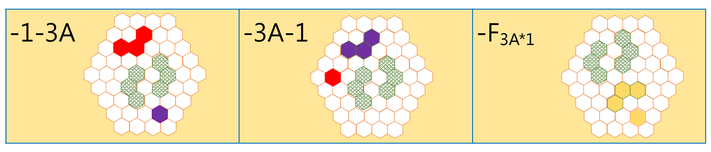
我以倆倆模組配對為初始組合，探討外圍應該如何堆砌會更有利？

(一) 確認六邊形蜂巢配對組合

| 初始配對組合 | 圖形 | 共用格數量 | W 值 | 初始配對組合 | 圖形 | 共用格數量 | W 值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3A*3A |  | 4 | 16 | 3B*3B | | 4 | 16 |
| 3A*3B | | 3 | 17 | 3B*3C | | 3 | 16 |
| 3A*3C | | 3 | 16 | 3C*3C |  | 3 | 15 |
| 3A*2 |  | 3 | 15 | 3B*2 |  | 3 | 15 |
| 3C*2 |  | 3 | 14 | 3A*1 |  | 3 | 13 |
| 3B*1 | | 2 | 14 | 3C*1 | | 2 | 13 |
| 2*2 | | 3 | 13 | ※ 配對模式以能產出較小 W 值的方式為主。 | | | |

(二) 六邊形蜂巢配對組合堆砌方式說明

一開始以倆倆模組配對，再分別採取單一模組依序擺放和固定配對模組組合(如下表三種配對方式)，比較哪種方式較有利？



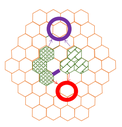



圖 1-4

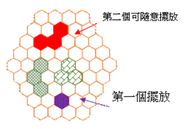



圖 1-5

我是以能產生較多共用格的方式配對組合，我以兩個單一模組能產生第一條角對角的線(圖 1-4 中的紫色線)當成對齊的格子，如此兩個模組間確定能產生較多的共用格，且與後來堆砌的模組間也確保和初始配對有共用格。

(三) 六邊形蜂巢配對組合中，角相對數量(線條)和共用格數量(星號)計算方式說明

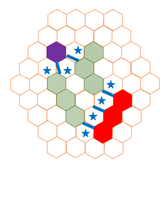


圖 1-11

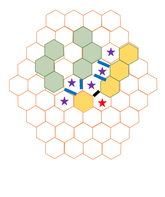


圖 1-12

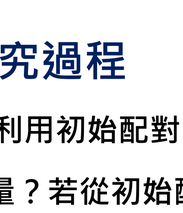
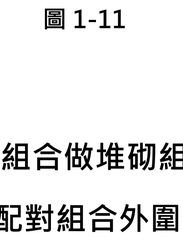
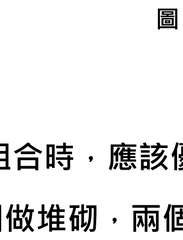
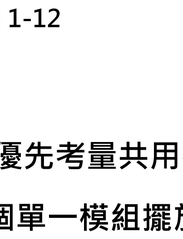
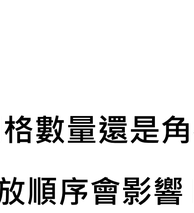
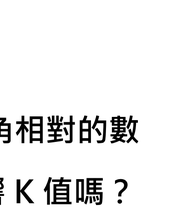
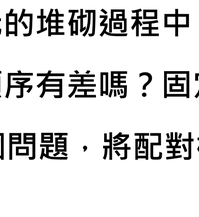
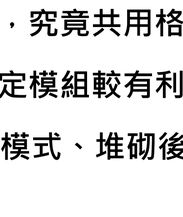
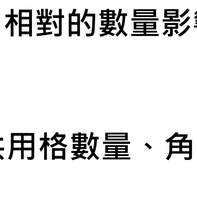
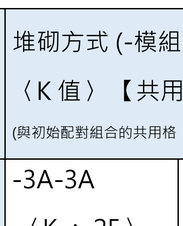
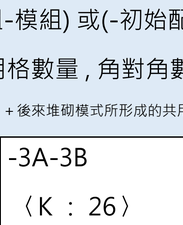
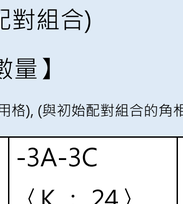
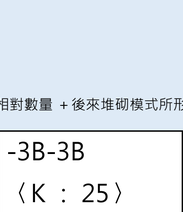
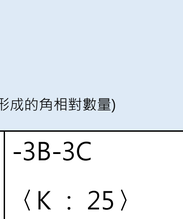
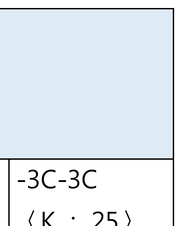
## 伍、研究過程

活動一、利用初始配對組合做堆砌組合時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

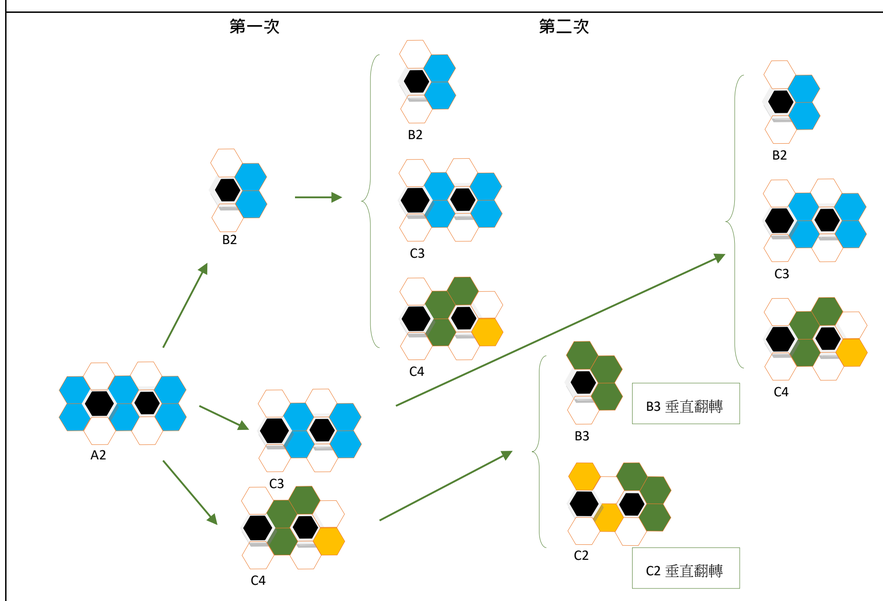
問題： 在尋求最佳化的堆砌過程中，究竟共用格數量還是角相對的數量影響較為重要呢？而擺放順序有差嗎？固定模組較有利嗎？

我針對這幾個問題，將配對模式、堆砌後的圖形、共用格數量、角相對數量及 K 值列於下。

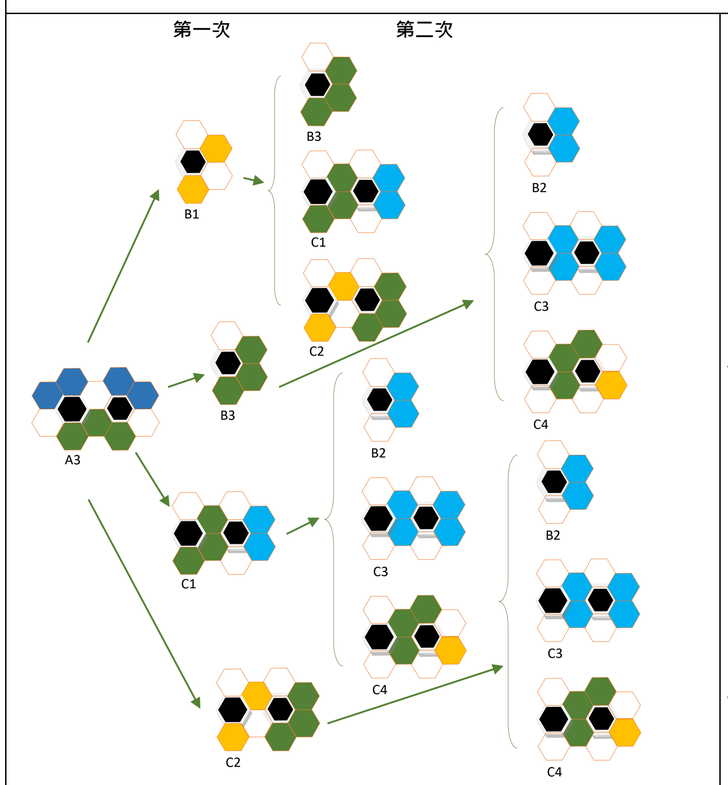
### 一、初始配對為 2*2 類型的堆砌圖形

| 初始配對組合 (初始 W 值) | 堆砌方式 (-模組-模組) 或(-初始配對組合) 〈K 值〉【共用格數量 , 角對角數量】 (與初始配對組合的共用格 + 後來堆砌模式所形成的共用格), (與初始配對組合的角相對數量 + 後來堆砌模式所形成的角相對數量) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I 2*2 (13) | -3A-3A 〈K ： 25〉 【7,6】  | -3A-3B 〈K ： 26〉 【7,5】  | -3A-3C 〈K ： 24〉 【7,6】  | -3B-3B 〈K ： 25〉 【8,5】  | -3B-3C 〈K ： 25〉 【7,4】  | -3C-3C 〈K ： 25〉 【6,3】  |
| | | -3B-3A 〈K ： 26〉 【6,5】  | -3C-3A 〈K ： 25〉 【6,5】  | | -3C-3B 〈K ： 25〉 【7,4】  | |
| | -3A*3A 〈K ： 25〉 【7,6】  | -3A*3B 〈K ： 26〉 【6,5】  | -3A*3C 〈K ： 25〉 【6,5】  | -3B*3B 〈K ： 25〉 【7,6】  | -3B*3C 〈K ： 25〉 【6,5】  | -3C*3C 〈K ： 24〉 【6,5】  |

### 1×2 長鏈形初始的堆砌模式、圖形演變及操作說明




因為初始配對的鏈形 A2 其最右邊兩格都是滿填的狀況，因此和初始配對的鏈形 A1 的操作過程相同。




1.若第一次以單一鍊形增加：

(1)若為 B1 ：基於有色六邊形不能相鄰的原則，因此第二次的圖形只能左邊空白格僅一格的單一鏈形或固定鏈形，為 B3、C1、C2 模組。

(2)若為 B2，第二次的圖形只能是鏈形左邊兩格皆是空白格的 B2、C3、C4 模組。

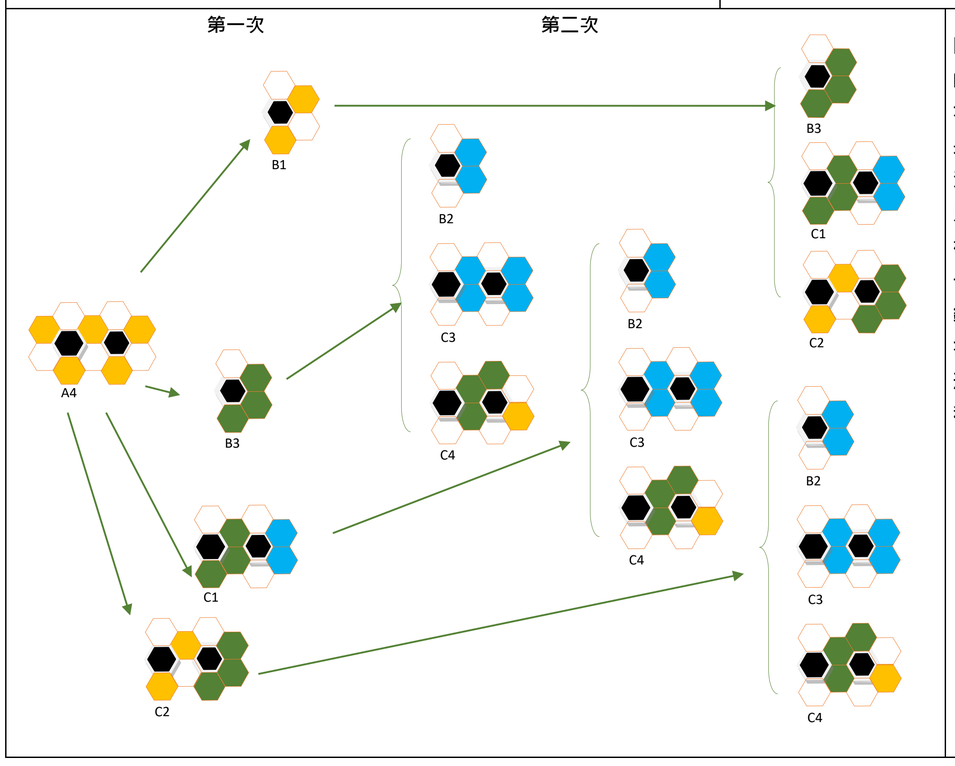
2.若第一次增加的是固定鏈形，觀察其最右邊均為滿填的格子：

(1)不管是 C1 或 C2，第二次的鏈形模組只能是單一鍊形左邊兩格皆是空白格的 B2，也可以是同樣左邊兩格皆是空白格的固定鏈形 C3、C4 模組。

◎第三次之後：

1.決定增加的是單一鏈形，還是固定鏈形？

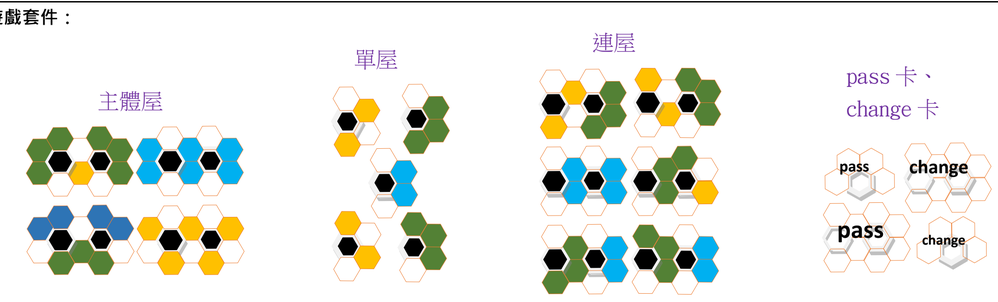
2.根據以上第 1 點的 鏈形，觀察其最右邊的是滿格或是只填一格，再決定下一次的鏈形模組。




因為初始配對的鏈形 A4 其最右邊只有一格是空白的狀況，在選擇上只能左邊空白格僅一格的單一鏈形或固定鏈形，因此和初始配對的鏈形 A3 的操作過程相同。

### (二)長鏈形六邊形延伸遊戲—Bee 的豪宅夢

遊戲套件：




☆ 套件組非立體圖形，且為單面設計，無法進行垂直翻轉，因此針對一些單格填滿的套件，已先行垂直翻轉，成為套件組。

☆ 除了主題屋 4 件、pass 牌 4 件和 change 牌 8 件，其餘套件皆有 16 組，可根據遊戲人數設定套組。

遊戲說明：

1.人數： 2- 4 人。

2.比分方式：有色格總數多者為勝，若有兩人相同數量，
則以扣除初始配對後所得有色格總數多者為勝。

遊戲過程

本圖片由指導教師拍攝

3.規則：

(1)猜拳決定初始的主體屋。

(2)參加者共同決定單屋或連屋的翻牌順序。

(3)參加者一律將主體屋攤開在面前，翻牌後看能否接續屋體；若不行，則蓋牌放置一旁，若抽中的是左方有兩格空白的牌，由翻牌自行決定是否接續屋體(可自行決定由左或由右接續)，或放置一旁等待適合的接續方式。

☆ 已接續完成的屋型，不得更動接續順序。

(4)翻到 pass 牌者可於下一輪使用，通常用於已抽到太多不適用的牌時。

(5)若抽到 change 牌時，可立即使用，或之後使用皆可。但使用時，需先將要置換的牌先放於中間(不須翻開，採大換 大、小換小)，指定更換對象後，請對方將其牌列出(不須翻開)，再由其中抽走一張，並將自己的牌交予對方，即完成交換手續。

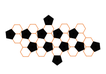
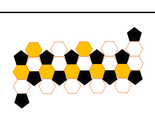
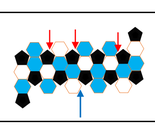
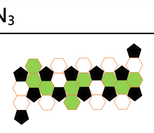
☆ 交換後看能否接續屋體，若不行，則蓋牌放置一旁，若抽中的是左方有兩格空白的牌，由翻牌自行決定是否接續屋體，或放置一旁等待適合的接續方式。

### (三) 立體的足球

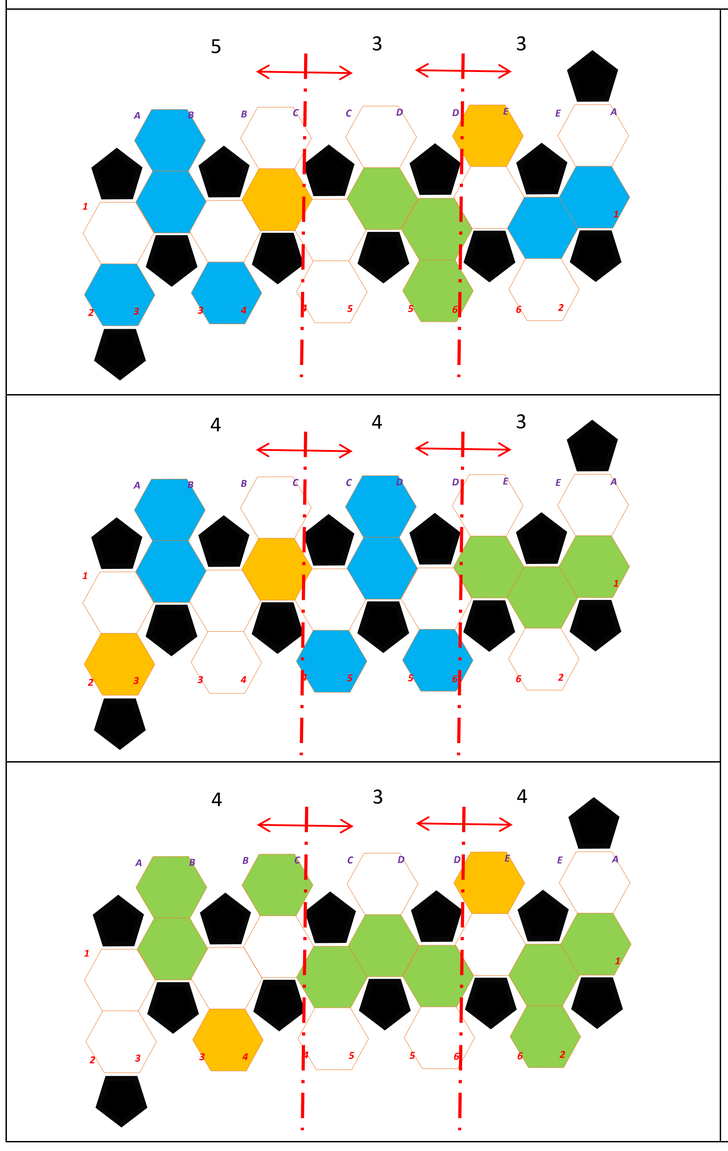
觀察點：

由上向下俯瞰，上方五邊形連接五個六邊形，若要有效利用，且符合題目要求的有色六邊形不相鄰的狀況只有兩種情況：是連兩格加一格的情形，或者取兩格至少相隔一邊； 而中心處的黑色五邊形一樣設定為共用格，也就是不能擺放模組！

思考點：

| 立體足球 | 單一模組 | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ |
|---|---|---|---|---|
| | 足球展開圖  |  |  |  |
| 本圖片由指導教師拍攝 | 最多有色六邊形總數 | 7 | 12 | 9 |

### 第一區的堆砌模式、後兩區的圖形演變及操作說明




發現與討論：

1.因為無法做跨區填模組，在操作時，我儘量將第一區的最右邊填上格子。

2.球的形體為立體圖形，若上方英文數字部分填滿的是 3 格，則下方數字格部分只能是 2 格。

3.延續長鏈形六邊形的模式，雖然可透過翻轉堆砌，但受限足球為立體的，且最大模組為 $N_3$ 的前提，後兩區無法在所能最大範圍的有色六邊形為 11 個的情況下交替使用。

## 陸、結論

一、利用初始配對組合做堆砌組合時，應該優先考量共用格數量還是角相對的數量？若從初始配對組合外圍做堆砌，兩個單一模組擺放順序會影響 K 值嗎？固定模組較有利嗎？

(一)、針對研究目的，針對角對角數量，以單一模組要和另外單一模組配對時影響較大，若以本研究先設定初始配對組合的情況下，共用格的數量比角相對的數量來得重要！

(二)、在初始配對組合外圍做堆砌時，兩個單一模組擺放順序對 K 值無顯著影響。

(三)、固定模組在初始模組形狀也是固定的情況下，在凹角或轉折點的擺放方式易受限，調整性小，較不利 K 值。

(四)、雖然 3B 模組和其他模組配對時最多能產生 4 個共用格，但因六邊形有較多轉折，若要強化這份優勢，以單一模組依序堆砌的方式，或 2 個 3B 模組以初始模組配對形式出現較適宜。

(五)、在活動一的組合研究中，最佳的組合模式，請參閱表 2-1~2-4。

(六)、以 $I_{3C*3C}$-1-3C 組合的類型， K 值 23 最佳。另外扣除其中因擺放限制得出 K 值 27 的狀況，其他組合類型的 K 值皆介於 24~26。

二、模組間應該怎麼配對組合，才能達到外圍最少白色六邊形？利用初始配對組合做堆砌的策略解原問題，外圍白色六邊形總數最佳解(公式)？

(一)、在活動二最佳堆砌組合探討中，若有初始配對組合，模組間容易集中，可簡化計算。

(二)、若以本研究的結果而言，初始配對組合擺放後，一開始便設定擺放的共用格，不管哪種組合，K 值的數值會比較小。

(三)、就本研究結果而言，初始配對模組的大小對 K 值無顯著的影響。

(四)、K 值計算方式：

$K = W_{N*N} + (W_N + W_N)$ 或 $W_{N*N} - \Sigma S_P - 1$

〈 □： 初始配對組合的 W 值+2 個單一模組(或固定配對組合)總和；

$\Sigma S_P$ ：所有模組與初始配對組合間的共用格總數；

1 ： 若$\Sigma S - \Sigma A=1$ ，則需減多共用的一格，否則為 0〉

(五)、依本研究發現，共用格是影響 K 值的最主要因素，而共用格的多少取決於擺放的位置，因此即便$\Sigma S - \Sigma A\neq 1$ ，K 值也不會因此有明顯的變化。

(六)、此次研究的特色及優勢，請參閱表 3-2 及其說明。

三、利用解原問題的策略，延伸探討長鏈形六邊形及立體足球的堆砌方式。

(一)、針對長鏈形六邊形的堆砌，我沿用活動一及活動二所得，以 3A 模組 搭配 $N_3$ 模組、$N_2$ 模組及 $N_1$ 模組分別做探討，獲得堆砌規則。其初始的堆砌模式、圖形演變及操作說明，請參閱表 4-2。

(二)、我以長鏈形六邊形獲得的規律設計一套〝Bee 的豪宅夢〞遊戲，讓研究更為活化，其設計方式及遊戲規則，請參閱活動三(長鏈形六邊形延伸遊戲—Bee 的豪宅夢)。

(三)、將立體的足球平面化，並沿用長鏈形六邊形獲得的規律，進行活動，共有三種堆砌方式。其初始的堆砌模式、圖形演變及操作說明，請參閱表 4-3。

## 柒、參考資料及其他


中華民國第 64 屆中小學科學展覽會作品（民 113）。**凹凸有竅門，完美再呈現！~六邊形蜂巢堆砌策略之探討**。科學教育館。

翰林企業股份有限公司( 民 113 )。**國小 4 下數學。第 3 單元 垂直、平行與四邊形( 38 -53 頁 )** 。台南：翰林企業股份有限公司。