

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

佳作

030409

隨「波」逐「浪」—探討波浪數列的性質

學校名稱： 臺北市立蘭雅國民中學

作者： 國二 卓奕豪 國二 顏韶霆 國二 賴聲歲	指導老師： 林靖捷 王昕芸
---	-----------------------------

關鍵詞： 交替排列 (Alternating Permutation)、巴斯卡三角形 (Pascal's Triangle)、遞迴關係 (Recurrence Relation)

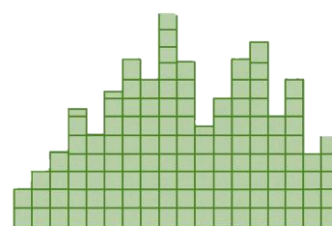
摘要

本研究探討將連續正整數 1 至 n 依大小交錯排列所形成的「波浪數列」，其定義如下：除了首項與末項外，每一項皆大於或小於其相鄰兩項。我們分析在最大數為 n 時，波浪數列的各種情形與其在數量上的對應關係，從中歸納出排列的規律，並推導當首項為 k 時的排法總數，進而求出所有波浪數列的排法總數。

壹、前言

一、研究動機

近期聽音樂時發現一種隨著音樂響度伸縮的圖形（如右圖），我們將此圖形看成一高一低的矩形併排，十分好奇會有幾種排列方式，於是這引起了我們研究的興致，想要深入瞭解與探討。本研究的波浪數列即是以此圖作為發想的起點，聚焦在討論其高低交錯排列的特殊情況。此次研究也讓我們提早接觸八年級下學期的課程，如數列、函數，和高一下學期的課程，如排列組合。



圖片來源：ChatGPT 生成

二、研究目的

- (一) 探討波浪數列之間的關係與規律。
- (二) 推導並證明長度、首項固定的波浪數列排法總數。
- (三) 推導並證明長度固定的波浪數列排法總數。

三、文獻回顧

- (一) 本文所探討的波浪數列也被稱為交替排列（Alternating Permutation），最早在 19 世紀被法國數學家 Désiré André 發現並研究，其生成函數為 $\sec x + \tan x$ ，不過相關的文獻資料並不多。因此希望藉由這次研究的機會，更加瞭解此類型數列。
- (二) 有些學者只考慮首項小於第二項的情形，其排法總數又被稱為 Zigzag Numbers。若長度為 n 且首項小於第二項的波浪數列之排法總數為 U_n ，則有以下遞迴關係：
$$2U_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U_k U_{n-k}$$
。然而我們為求排法總數的完整性，也將首項大於第二項的數列納入計算。

貳、研究設備及器材

紙、筆、USL 連接方塊、電腦、GeoGebra、Microsoft Word、Python

參、研究過程或方法

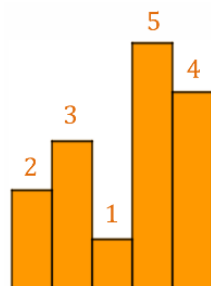
一、定義波浪數列

為了方便說明，我們先定義本次研究所探討的數列。依照數值大小交錯排列的數列，若以直方圖呈現，其形狀會如同波浪一般，因此我們稱之為「波浪數列」。以下是波浪數列的定義：

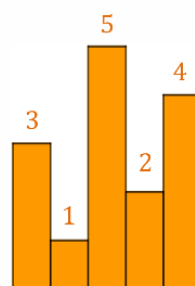
【波浪數列】

假設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為正整數 $1, 2, \dots, n$ 的一種排列。若對於所有 $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ ，皆滿足 $a_i > a_{i-1}$ 且 $a_i > a_{i+1}$ ，或 $a_i < a_{i-1}$ 且 $a_i < a_{i+1}$ ，則稱 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為「長度為 n 的波浪數列」。

例如在數列 $\langle 2, 3, 1, 5, 4 \rangle$ 中，因為 3 大於左右兩側的 2 和 1，1 小於左右兩側的 3 和 5，5 大於左右兩側的 1 和 4，所以 $\langle 2, 3, 1, 5, 4 \rangle$ 是長度為 5 的波浪數列。



向上數列



向下數列

而數列 $\langle 1, 3, 5, 2, 4 \rangle$ 中，因為 3 大於左側的 1，但是小於右側的 5，所以 $\langle 1, 3, 5, 2, 4 \rangle$ 不是波浪數列。

二、基本定義與符號說明

以下為本研究使用之符號與名詞解釋：

(一) S_n ：長度為 n 的波浪數列之排法總數。

例如長度為 4 的波浪數列共有 $\langle 1, 3, 2, 4 \rangle$ 、 $\langle 1, 4, 2, 3 \rangle$ 、 $\langle 2, 1, 4, 3 \rangle$ 、 $\langle 2, 3, 1, 4 \rangle$ 、 $\langle 2, 4, 1, 3 \rangle$ 、 $\langle 3, 1, 4, 2 \rangle$ 、 $\langle 3, 2, 4, 1 \rangle$ 、 $\langle 3, 4, 1, 2 \rangle$ 、 $\langle 4, 1, 3, 2 \rangle$ 、 $\langle 4, 2, 3, 1 \rangle$ 十種排法，故 $S_4 = 10$ 。

(二) $A_{n,k}$ ：長度為 n 、首項為 k 的波浪數列之排法總數。

例如長度為 4、首項為 2 的波浪數列共有 $\langle 2,1,4,3 \rangle$ 、 $\langle 2,3,1,4 \rangle$ 、 $\langle 2,4,1,3 \rangle$ 三種排法，故 $A_{4,2} = 3$ 。

(三) 向上數列： $a_1 < a_2$ 的波浪數列。

例如在波浪數列 $\langle 1,3,2,4 \rangle$ 中， $a_1 = 1 < 3 = a_2$ ，故 $\langle 1,3,2,4 \rangle$ 為向上數列。

(四) 向下數列： $a_1 > a_2$ 的波浪數列。

例如在波浪數列 $\langle 2,1,4,3 \rangle$ 中， $a_1 = 2 > 1 = a_2$ ，故 $\langle 2,1,4,3 \rangle$ 為向下數列。

(五) S_n^D ：長度為 n 的向下數列之排法總數。

例如長度為 4 的向下數列共有 $\langle 2,1,4,3 \rangle$ 、 $\langle 3,1,4,2 \rangle$ 、 $\langle 3,2,4,1 \rangle$ 、 $\langle 4,1,3,2 \rangle$ 、 $\langle 4,2,3,1 \rangle$ 五種排法，故 $S_4^D = 5$ 。

另外，為了方便推論，我們定義 $S_0^D := 1$ 以及 $S_1^D := 1$ 。

(六) $U_{n,k}$ ：長度為 n 、首項為 k 的向上數列之排法總數。

例如長度為 4、首項為 2 的向上數列共有 $\langle 2,3,1,4 \rangle$ 、 $\langle 2,4,1,3 \rangle$ 兩種排法，故 $U_{4,2} = 2$ 。

(七) $D_{n,k}$ ：長度為 n 、首項為 k 的向下數列之排法總數。

例如長度為 4、首項為 2 的向下數列只有 $\langle 2,1,4,3 \rangle$ 一種排法，故 $D_{4,2} = 1$ 。

三、運用程式提高研究效率

剛開始進行研究時，我們使用紙筆將所有的波浪數列逐一寫下，求得其排法總數。但是當長度 n 增加時，其排法總數快速增加，很容易漏算或是重複計算。為了提高研究效率，我們使用 Python 撰寫程式，並利用同時大於或小於相鄰兩項的條件，使其產生給定長度的波浪數列之排法總數。

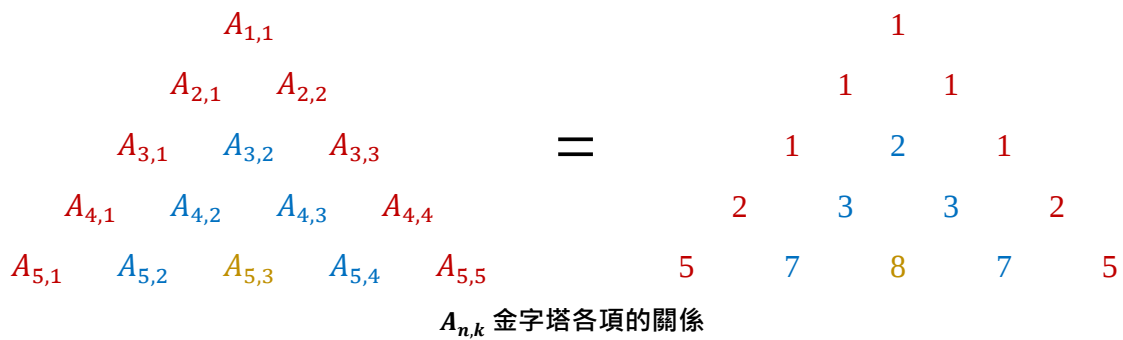
下圖為我們為了求得向下數列所使用的程式碼。其右方呈現的是長度為 5 的向下數列，共有 16 個，其中 2 1 4 3 5 表示波浪數列 $\langle 2,1,4,3,5 \rangle$ 。

```
z = 6
y = 0
for i in range(1, z):
    for j in range(1, z):
        if i == j:continue
        for k in range(1, z):
            if k == i or k == j:continue
            for l in range(1, z):
                if l == i or l == j or l == k:continue
                for m in range(1, z):
                    if m == i or m == j or m == k or m == l:continue
                    if i>j<k>l<m:
                        print(i,j,k,l,m)
                        y += 1
print(y)
```

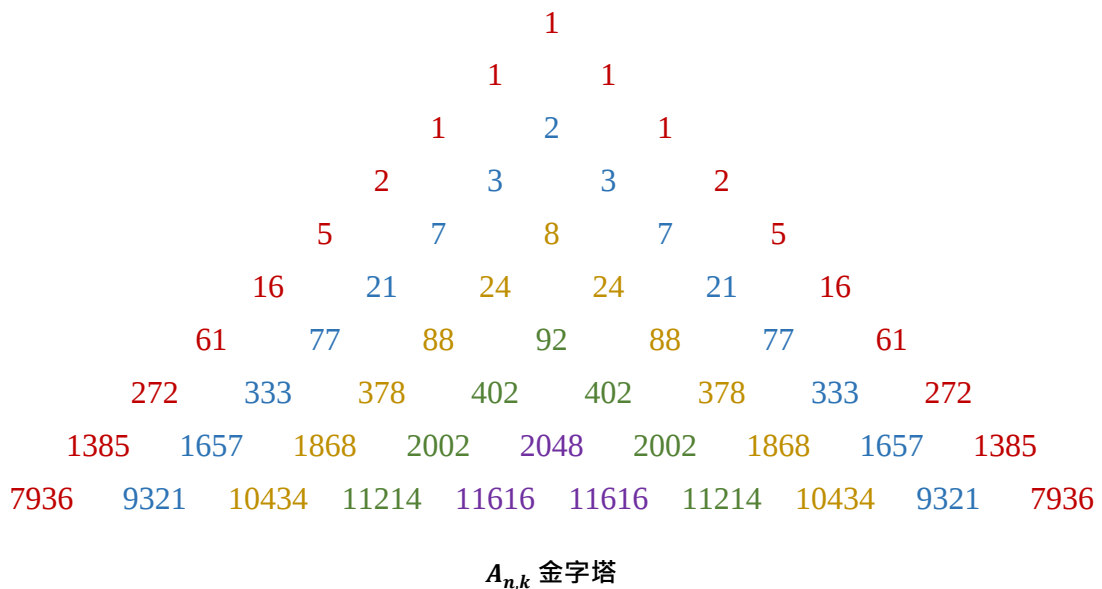
2 1 4 3 5
2 1 5 3 4
3 1 4 2 5
3 1 5 2 4
3 2 4 1 5
3 2 5 1 4
4 1 3 2 5
4 1 5 2 3
4 2 3 1 5
4 2 5 1 3
4 3 5 1 2
5 1 3 2 4
5 1 4 2 3
5 2 3 1 4
5 2 4 1 3
5 3 4 1 2
16

四、 $A_{n,k}$ 金字塔

在求出 $A_{n,k}$ 的前幾項後，我們將這些數排成類似巴斯卡三角形的陣列，稱之為「 $A_{n,k}$ 金字塔」，如下圖，其中第 n 列第 k 個數表示長度為 n 、首項為 k 的波浪數列之排法總數，例如長度為 4、首項為 2 的波浪數列共有 $\langle 2,1,4,3 \rangle$ 、 $\langle 2,3,1,4 \rangle$ 、 $\langle 2,4,1,3 \rangle$ 三種排法，故第 4 列第 2 個數為 3，即 $A_{4,2} = 3$ 。

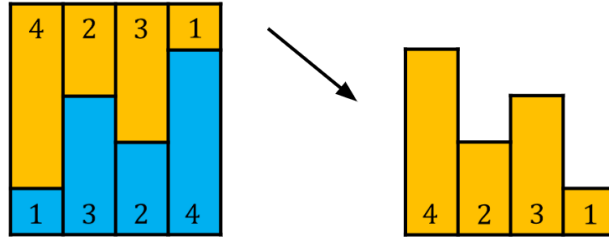


研究初期，我們將每個 $A_{n,k}$ 依其位置排成金字塔，初步發現此金字塔的排列如同巴斯卡三角形一樣左右對稱，且越靠近中間數值越大。我們透過觀察 $A_{n,k}$ 金字塔找出了許多關係與規律，它不只是美觀的視覺圖像，往後更協助我們觀察與歸納出數值之間的遞迴關係。下圖為 10 層的 $A_{n,k}$ 金字塔：



五、波浪數列的性質

為了方便說明，以下本文中所提到的 m 、 n 皆為正整數，數列 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 皆為正整數 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一種排列。當給定一數列 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ ，我們稱 $\langle n+1-a_i \rangle_{i=1}^n$ 為其「互補數列」。以下圖為例， $\langle 1, 3, 2, 4 \rangle$ 的互補數列為 $\langle 4, 2, 3, 1 \rangle$ 。



互補數列

我們觀察到一數列與其互補數列之間具有結構上的對稱性，為了進一步利用這項特性，我們先證明以下引理，作為後續推導數量關係式的基礎。

【引理一】

- (1) 若 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為波浪數列，則其互補數列 $\langle n+1-a_i \rangle_{i=1}^n$ 也是波浪數列。
- (2) 當 $n \geq 2$ 時， $U_{n,k} = D_{n,n+1-k}$

證明 (1)：

假設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為波浪數列，其互補數列為 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 。當 $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ ，不失一般性，令 $a_i > a_{i-1}$ 且 $a_i > a_{i+1}$ ，則 $b_i = n+1-a_i < n+1-a_{i-1} = b_{i-1}$ 且 $b_i = n+1-a_i < n+1-a_{i+1} = b_{i+1}$ 。由此可知， $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 也是波浪數列。 ■

證明 (2)：

設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n ($n \geq 2$)、首項為 k 的向上數列，則由引理一 (1) 可知，其互補數列 $\langle n+1-a_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 $n+1-k$ 的向下數列，故 $U_{n,k} = D_{n,n+1-k}$ 。 ■

以 $n = 4$ 為例：

如下圖，每一個波浪數列與其互補數列一一對應，因此可得 $U_{4,1} = D_{4,4+1-1} = D_{4,4}$ 、
 $U_{4,2} = D_{4,4+1-2} = D_{4,3}$ 、 $U_{4,3} = D_{4,4+1-3} = D_{4,2}$ 。



「長度為 4 的向上數列」與「長度為 4 的向下數列」一一對應

□

另外，我們也發現在波浪數列中若數值差 1 的兩數不相鄰，則將這兩數交換所得的數列仍然是波浪數列，證明如下：

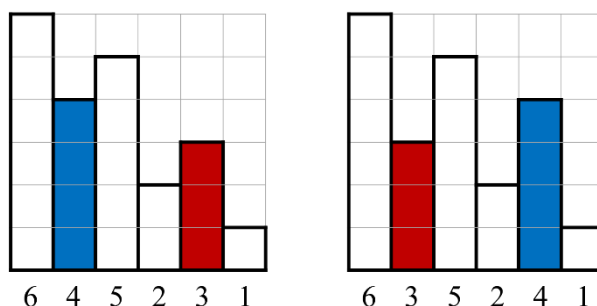
【引理二】

若波浪數列中不相鄰的兩數其數值差 1，則將這兩數交換所得的數列仍為波浪數列。

證明：

設 a 和 $a + 1$ 為一波浪數列中不相鄰的兩數，則與 a 和 $a + 1$ 相鄰的兩數必同時大於 $a + 1$ 或同時小於 a ，所以交換這兩數的前後，並不會改變各自與其相鄰兩數的大小關係，故將這兩數交換所得的數列仍為波浪數列。 ■

如下圖，以波浪數列 $\langle 6, 4, 5, 2, 3, 1 \rangle$ 為例，其中的 3 和 4 不相鄰且其數值相差 1，因此兩者交換後的數列 $\langle 6, 3, 5, 2, 4, 1 \rangle$ 仍為波浪數列。



數字交換

我們利用先前的 $A_{n,k}$ 金字塔，發現了許多隱藏在其中的關係與規律，在此將它們整理成以下性質並加以證明。

我們發現 $A_{n,k}$ 金字塔中的每一列皆左右對稱，向上數列與向下數列的數量各佔該列總數的一半，其證明如下：

【性質一】 $A_{n,k}$ 金字塔左右對稱

$$A_{n,k} = A_{n,n+1-k}$$

證明：

顯然地， $A_{1,1} = A_{1,1+1-1}$ 。根據引理一(2)，我們得知當 $n \geq 2$ 時， $U_{n,k} = D_{n,n+1-k}$ 且 $U_{n,n+1-k} = D_{n,k}$ ，所以 $A_{n,k} = U_{n,k} + D_{n,k} = D_{n,n+1-k} + U_{n,n+1-k} = A_{n,n+1-k}$ 。■

【性質二】向上數列與向下數列排法總數各半

$$\text{當 } n \geq 2 \text{ 時， } S_n^D = \frac{1}{2} S_n$$

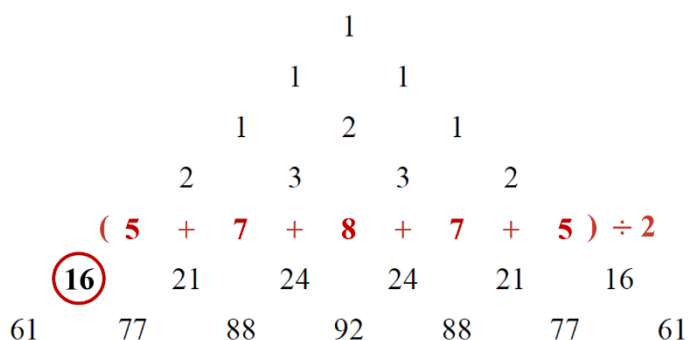
證明：

藉由引理一(2)，我們得知 $U_{n,k} = D_{n,n+1-k}$ ，因此當 $n \geq 2$ 時，

$$S_n = \sum_{k=1}^n A_{n,k} = \sum_{k=1}^n (U_{n,k} + D_{n,k}) = \sum_{k=1}^n (D_{n,n+1-k} + D_{n,k}) = 2 \sum_{k=1}^n D_{n,k} = 2S_n^D$$

故當 $n \geq 2$ ， $S_n^D = \frac{1}{2} S_n$ 。■

我們在 $A_{n,k}$ 金字塔中發現許多規律與關係，例如每列的第一個數是前一列總和的一半，如下圖：



$A_{n,k}$ 金字塔每列的第一個數是前一列總和的一半

舉例來說，

$$\begin{aligned} A_{6,1} &= (A_{5,1} + A_{5,2} + A_{5,3} + A_{5,4} + A_{5,5}) \div 2 \\ &= (5 + 7 + 8 + 7 + 5) \div 2 = 16。 \end{aligned}$$

而一般情況為

$$A_{n,1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} A_{n-1,k} = \frac{1}{2} S_{n-1} = S_{n-1}^D \quad (n \geq 2)$$

以下為我們的證明：

【性質三】 $A_{n,1}$ 的規律

$$A_{n,1} = S_{n-1}^D$$

證明：

因為波浪數列中，1 為最小的正整數，因此長度為 n 、首項為 1 的波浪數列皆為向上數列，即 $A_{n,1} = U_{n,1}$ 。

- I. 假設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 1 的向上數列，若將首項 1 刪去，會得到長度為 $n-1$ 的數列，令 $\langle b_i \rangle_{i=1}^{n-1} = \langle a_{i+1} - 1 \rangle_{i=1}^{n-1}$ ，此時 $\langle b_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 的波浪數列，又 $a_2 > a_3$ ，所以 $b_1 > b_2$ ，即 $\langle b_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 的向下數列。
- II. 假設 $\langle c_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 的向下數列，令 $d_1 = 1$ ，且令 $\langle d_i \rangle_{i=2}^n = \langle c_{i-1} + 1 \rangle_{i=2}^n$ ，因為 $d_1 = 1$ 為最小正整數，所以 $d_1 < d_2$ ，則 $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 1 的向上數列。

由 I、II 可知「長度為 n 、首項為 1 的向上數列」與「長度為 $n-1$ 的向下數列」一一對應，故 $A_{n,1} = U_{n,1} = S_{n-1}^D$ 。■

以 $n = 5$ 為例：

「長度為 5、首項為 1 的波浪數列」與「長度為 4 的向下數列」之對應方式如下：

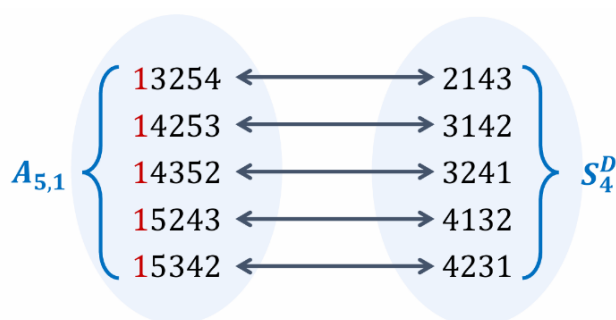
- I. 長度為 5、首項為 1 的波浪數列 → 長度為 4 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 5、首項為 1 的波浪數列	13254
Step 2	刪除首項 1	3254
Step 3	各項減 1 即形成長度為 4 的向下數列	2143

II. 長度為 4 的向下數列 → 長度為 5、首項為 1 的波浪數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 4 的向下數列	3142
Step 2	各項加 1	4253
Step 3	在最前方插入 1 即形成長度為 5、首項為 1 的波浪數列	14253

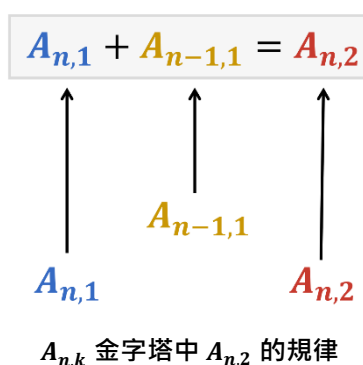
「長度為 5、首項為 1 的波浪數列」與「長度為 4 的向下數列」之對應關係如下圖：



「長度為 5、首項為 1 的波浪數列」與「長度為 4 的向下數列」一一對應

因此 $A_{5,1} = S_4^D$ 。□

我們觀察 $A_{n,k}$ 金字塔時，發現「長度為 n 、首項為 2 的波浪數列」數量等於「長度為 n 、首項為 1 的波浪數列」數量加上「長度為 $n-1$ 、首項為 1 的波浪數列」數量，這個關係式的各項在金字塔中的位置如下圖所示：



其證明如下：

【性質四】 $A_{n,2}$ 的規律

(1) 當 $n \geq 3$ 時， $A_{n,2} = A_{n,1} + A_{n-1,1}$

(2) 當 $n \geq 3$ 時， $A_{n,2} = S_{n-1}^D + S_{n-2}^D$

證明 (1)：

長度為 n 、首項為 2 的波浪數列可分成向上數列和向下數列，即 $A_{n,2} = U_{n,2} + D_{n,2}$ 。

首先我們要證明 $U_{n,2} = U_{n,1}$ ：

- I. 假設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 2 的向上數列，假設 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 1 的向上數列，因這兩種數列中，數字 1、2 必不相鄰，所以由引理二可知 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 與 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 一一對應，即 $U_{n,2} = U_{n,1}$ 。

接著我們要證明 $D_{n,2} = U_{n-1,1}$ ：

- II. 假設 $\langle c_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 2 的向下數列，因為 $c_1 = 2$ ，所以 c_2 必為 1。若將此數列首項 2 刪去，會得到長度為 $n-1$ 的數列，令 $c_2 = d_1 = 1$ ，且令 $\langle d_i \rangle_{i=2}^{n-1} = \langle c_{i+1} - 1 \rangle_{i=2}^{n-1}$ ，因為 $d_1 = 1 < d_2$ ，所以 $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 、首項為 1 的向上數列。
- III. 假設 $\langle e_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 、首項為 1 的向上數列，令 $f_1 = 2$ 、 $f_2 = e_1 = 1$ ，且令 $\langle f_i \rangle_{i=3}^n = \langle e_{i-1} + 1 \rangle_{i=3}^n$ ，因為 $f_1 = 2 > 1 = f_2$ ，所以 $\langle f_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 2 的向下數列。

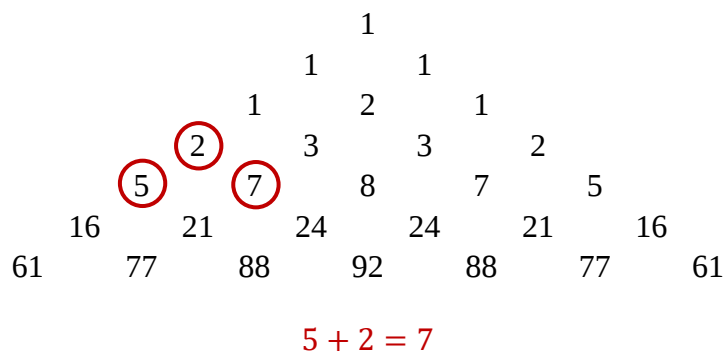
由 II、III. 可知「長度為 n 、首項為 2 的向下數列」與「長度為 $n-1$ 、首項為 1 的向上數列」一一對應，所以 $D_{n,2} = U_{n-1,1}$ 。

由 I、II、III. 可得

$$A_{n,2} = U_{n,2} + D_{n,2} = U_{n,1} + U_{n-1,1} = A_{n,1} + A_{n-1,1} \quad \blacksquare$$

以 $n = 5$ 為例：

$A_{5,2}$ 、 $A_{5,1}$ 、 $A_{4,1}$ 在 $A_{n,k}$ 金字塔中的位置如下圖：



將 $A_{5,1}$ 加上 $A_{4,1}$ ，等於 $A_{5,2}$ ，即 $A_{5,2} = A_{5,1} + A_{4,1}$ 。□

證明 (2)：

由性質三、性質四 (1) 可得 $A_{n,2} = A_{n,1} + A_{n-1,1} = S_{n-1}^D + S_{n-2}^D$ 。■

以 $n = 5$ 為例：

「長度為 5、首項為 2 的向上數列」與「長度為 4 的向下數列」之對應方式如下：

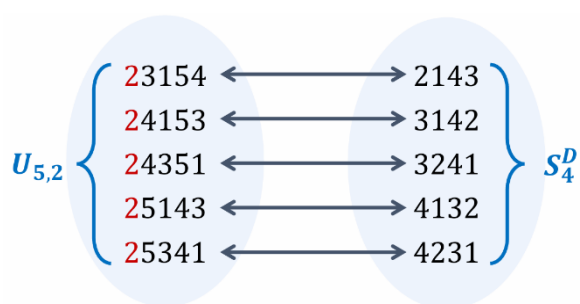
I. 長度為 5、首項為 2 的向上數列→長度為 4 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 5、首項為 2 的向上數列	24153
Step 2	刪除首項 2	4153
Step 3	大於 2 的各項減 1 即形成長度為 4 的向下數列	3142

II. 長度為 4 的向下數列→長度為 5、首項為 2 的向上數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 4 的向下數列	4231
Step 2	大於等於 2 的各項加 1	5341
Step 3	在最前方插入 2 即形成長度為 5、首項為 2 的向上數列	25341

「長度為 5、首項為 2 的向上數列」與「長度為 4 的向下數列」之對應關係如下圖：



「長度為 5、首項為 2 的向上數列」與「長度為 4 的向下數列」一一對應

「長度為 5、首項為 2 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」之對應方式如下：

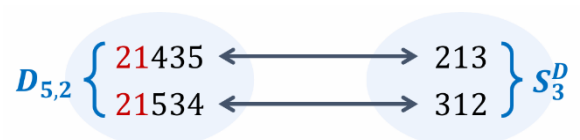
III. 長度為 5、首項為 2 的向下數列→長度為 3 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 5、首項為 2 的向下數列	21435
Step 2	刪除前兩項 2,1	435
Step 3	各項減 2 即形成長度為 3 的向下數列	213

IV. 長度為 3 的向下數列→長度為 5、首項為 2 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 3 的向下數列	312
Step 2	各項加 2	534
Step 3	在最前方插入 2,1 即形成長度為 5、首項為 2 的向下數列	21534

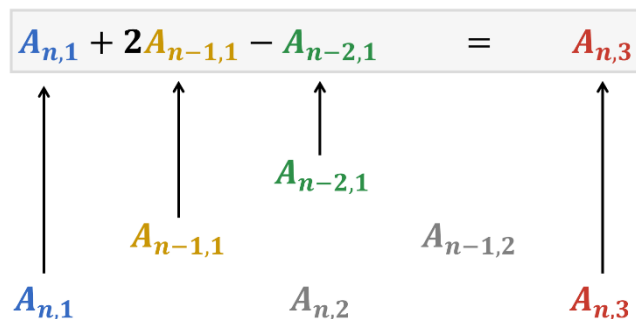
「長度為 5、首項為 2 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」之對應關係如下圖：



「長度為 5、首項為 2 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」一一對應

因此 $A_{5,2} = U_{5,2} + D_{5,2} = S_4^D + S_3^D$ 。□

觀察 $A_{n,k}$ 金字塔時，我們發現「長度為 n 、首項為 3 的波浪數列」數量等於「長度為 n 、首項為 1 的波浪數列」數量，加上「長度為 $n-1$ 、首項為 1 的波浪數列」數量的 2 倍，減去「長度為 $n-2$ 、首項為 1 的波浪數列」數量，這個關係式之各項在金字塔中的位置如下圖所示：



$A_{n,k}$ 金字塔中 $A_{n,3}$ 的規律

其證明如下：

【性質五】 $A_{n,3}$ 的規律

- (1) 當 $n \geq 4$ 時， $A_{n,3} = A_{n,1} + 2A_{n-1,1} - A_{n-2,1}$
- (2) 當 $n \geq 4$ 時， $A_{n,3} = S_{n-1}^D + 2S_{n-2}^D - S_{n-3}^D$

證明 (1)：

欲證 $A_{n,3} = A_{n,1} + 2A_{n-1,1} - A_{n-2,1}$ ，即證 $A_{n,3} - A_{n,2} = A_{n-1,1} - A_{n-2,1}$ 。

我們將「長度為 n 、首項為 2 的波浪數列」和「長度為 n 、首項為 3 的波浪數列」皆分成數字 2、3 相鄰與數字 2、3 不相鄰兩種情況，以 X_2 、 X'_2 、 X_3 、 X'_3 表示，其中

$$X_2 = \{ \langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_1 = 2, a_2 \neq 3 \} \quad X'_2 = \{ \langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_1 = 2, a_2 = 3 \}$$

$$X_3 = \{ \langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_1 = 3, a_2 \neq 2 \} \quad X'_3 = \{ \langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_1 = 3, a_2 = 2 \}$$

以下分別討論其數量之間的關係：

首先我們證明 $|X_3| = |X_2|$ ：

- I. 若數字 2、3 不相鄰，則由引理二可知，將 X_3 中所有數列的數字 2、3 交換可得到 X_2 ，因此 $|X_3| = |X_2|$ 。

接下來我們證明 $|X'_3| = A_{n-1,1}$ ：

- II. 任取 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n \in X'_3$ ，若將 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 的首項 3 刪去，會得到長度為 $n-1$ 的數列，對於所有的 $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ ，若 $a_{i+1} > 3$ ，則令 $b_i = a_{i+1} - 1$ ，若 $a_{i+1} < 3$ ，則令 $b_i = a_{i+1}$ ，可得數列 $\langle b_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 、首項為 2 的向上數列，因數列中數字 1、2 必不相鄰，所以由引理二知，數列 $\langle b_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 可對應到「長度為 $n-1$ 、首項為 1 的波浪數列」。
- III. 假設 $\langle c_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 、首項為 1 的波浪數列，因數列中數字 1、2 必不相鄰，所以由引理二知，數列 $\langle c_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 可對應到長度為 $n-1$ 、首項為 2 的向上數列 $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 。令 $e_1 = 3$ ，對於所有的 $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ ，若 $d_{i-1} \geq 3$ ，則令 $e_i = d_{i-1} + 1$ ，若 $d_{i-1} < 3$ ，則令 $e_i = d_{i-1}$ ，因 $e_1 = 3 > 2 = e_2$ ，故數列 $\langle e_i \rangle_{i=1}^n \in X'_3$ 。

再來我們證明 $|X'_2| = A_{n-2,1}$ ：

- IV. 任取 $\langle f_i \rangle_{i=1}^n \in X'_2$ ，若將 $\langle f_i \rangle_{i=1}^n$ 的前兩項 2、3 刪去，會得到長度為 $n-2$ 的數列，令 $g_1 = f_3 = 1$ ，且令 $\langle g_i \rangle_{i=2}^{n-2} = \langle f_{i+2} - 2 \rangle_{i=2}^{n-2}$ ，則數列 $\langle g_i \rangle_{i=1}^{n-2}$ 是長度為 $n-2$ 、首項為 1 的波浪數列。
- V. 假設 $\langle h_i \rangle_{i=1}^{n-2}$ 是長度為 $n-2$ 、首項為 1 的波浪數列，令 $j_1 = 2$ 、 $j_2 = 3$ 、 $j_3 = 1$ ，且令 $\langle j_i \rangle_{i=4}^n = \langle h_{i-2} + 2 \rangle_{i=4}^n$ ，因為 $j_1 = 2 < 3 = j_2$ ，故數列 $\langle j_i \rangle_{i=1}^n \in X'_2$ 。

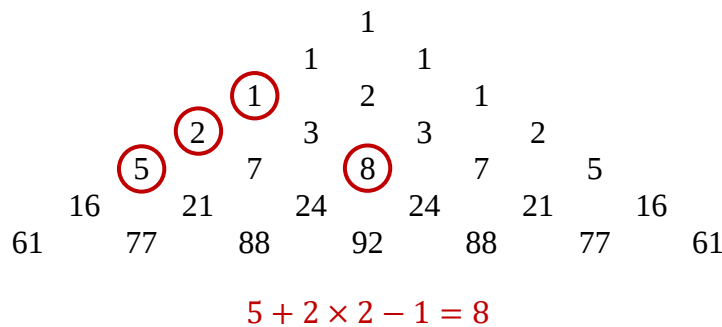
由 I、II、III、IV、V 可知 $|X_3| = |X_2|$ 、 $|X'_3| = A_{n-1,1}$ 、 $|X'_2| = A_{n-2,1}$ ，所以

$$\begin{aligned} A_{n,3} - A_{n,2} &= (|X_3| + |X'_3|) - (|X_2| + |X'_2|) \\ &= |X'_3| - |X'_2| = A_{n-1,1} - A_{n-2,1} \end{aligned}$$

故 $A_{n,3} = A_{n,2} + A_{n-1,1} - A_{n-2,1} = A_{n,1} + 2A_{n-1,1} - A_{n-2,1}$ 。■

以 $n = 5$ 為例：

$A_{5,3}$ 、 $A_{5,1}$ 、 $A_{4,1}$ 、 $A_{3,1}$ 在 $A_{n,k}$ 金字塔中的位置如下圖：



將 $A_{5,1}$ 加上 $A_{4,1}$ 的兩倍，再減掉 $A_{3,1}$ ，等於 $A_{5,3}$ ，即 $A_{5,3} = A_{5,1} + 2A_{4,1} - A_{3,1}$ 。□

證明 (2)：

由性質三、性質五 (1) 可得

$$A_{n,3} = A_{n,1} + 2A_{n-1,1} - A_{n-2,1} = S_{n-1}^D + 2S_{n-2}^D - S_{n-3}^D \circ \blacksquare$$

以 $n = 5$ 為例：

我們將長度為 5 的波浪數列分成向上數列與向下數列兩部分討論，首先，我們考慮向上數列。「長度為 5、首項為 3 的向上數列」、「長度為 4 的向下數列」以及「長度為 2 的向下數列」之對應方式如下：

I. 長度為 5、首項為 3 的向上數列→長度為 4 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 5、首項為 3 的向上數列	34152
Step 2	刪除首項 3	4152
Step 3	大於 3 的各項減 1 即形成長度為 4 的向下數列	3142

II. 長度為 4、首項大於等於 3 的向下數列→長度為 5、首項為 3 的向上數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 4、首項大於等於 3 的向下數列	4132
Step 2	大於等於 3 的各項加 1	5142
Step 3	在最前方插入 3 即形成長度為 5、首項為 3 的向上數列	35142

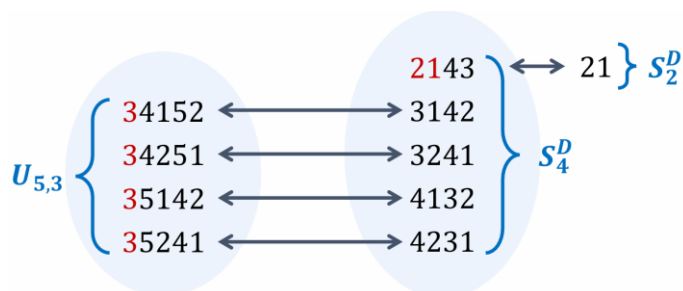
III. 長度為 4、首項小於 3 的向下數列→長度為 5 的數列→長度為 2 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 4、首項小於 3 的向下數列	2143
Step 2	大於等於 3 的各項加 1	2154
Step 3	在最前方插入 3 即形成長度為 5 的數列（非波浪數列）	32154
Step 4	刪除前三項 3,2,1	54
Step 5	各項減 3 即形成長度為 2 的向下數列	21

IV. 長度為 2 的向下數列→長度為 4、首項小於 3 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 2 的向下數列	21
Step 2	各項加 2	43
Step 3	在最前方插入 2,1 即形成長度為 4、首項小於 3 的向下數列	2143

「長度為 5、首項為 3 的向上數列」、「長度為 4 的向下數列」以及「長度為 2 的向下數列」之對應關係如下圖：



「長度為 5、首項為 3 的向上數列」、「長度為 4 的向下數列」以及「長度為 2 的向下數列」之對應關係

再來，我們將向下數列分成前兩項為 3,1 以及 3,2 兩種情況討論。「長度為 5、前兩項為 3,1 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」之對應方式如下：

V. 長度為 5、前兩項為 3,1 的向下數列→長度為 3 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 5、前兩項為 3,1 的向下數列	31425
Step 2	刪除前兩項 3,1	425
Step 3	大於 3 的各項減 2，數字 2 減 1 即形成長度為 3 的向下數列	213

VI. 長度為 3 的向下數列→長度為 5、前兩項為 3,1 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 3 的向下數列	312
Step 2	大於 1 的各項加 2，數字 1 加 1	524
Step 3	在最前方插入 3,1 即形成長度為 5、前兩項為 3,1 的向下數列	31524

「長度為 5、前兩項為 3,2 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」之對應方式如下：

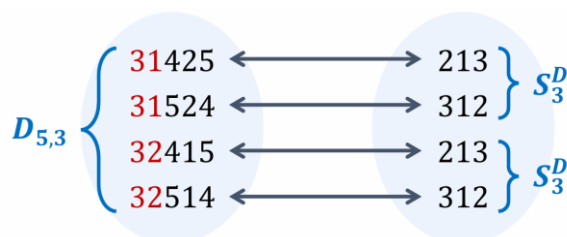
VII. 長度為 5、前兩項為 3,2 的向下數列→長度為 3 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 5、前兩項為 3,2 的向下數列	32415
Step 2	刪除前兩項 3,2	415
Step 3	大於 3 的各項減 2 即形成長度為 3 的向下數列	213

VIII. 長度為 3 的向下數列 → 長度為 5、前兩項為 3,2 的向下數列

步驟	說明	示例
Step 1	任取一個長度為 3 的向下數列	312
Step 2	大於 1 的各項加 2	514
Step 3	在最前方插入 3,2 即形成長度為 5、前兩項為 3,2 的向下數列	32514

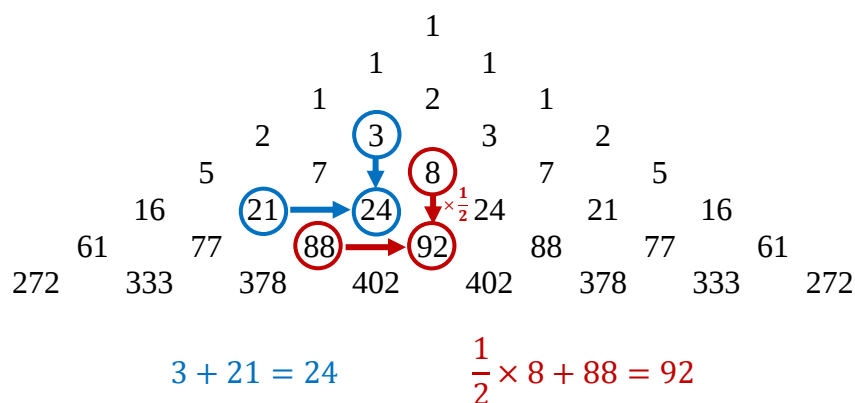
「長度為 5、首項為 3 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」之對應關係如下圖：



「長度為 5、首項為 3 的向下數列」與「長度為 3 的向下數列」之對應關係

$$\text{因此 } A_{5,3} = U_{5,3} + D_{5,3} = (S_4^D - S_2^D) + (S_3^D + S_3^D) = S_4^D + 2S_3^D - S_2^D. \quad \square$$

我們利用先前的 $A_{n,k}$ 金字塔，發現了許多關係式，例如 $A_{4,2} + A_{6,2} = A_{6,3}$ 以及 $\frac{1}{2}A_{5,3} + A_{7,3} = A_{7,4}$ ，如下圖所示：



【性質六】 $A_{n,k}$ 金字塔每列中間項的規律

(1) 若 $n = 2m$ 且 $m \geq 2$ ，則 $A_{n,m} = A_{n,m-1} + A_{n-2,m-1}$ 。

(2) 若 $n = 2m - 1$ 且 $m \geq 3$ ，則 $A_{n,m} = A_{n,m-1} + \frac{1}{2}A_{n-2,m-1}$ 。

證明 (1)：

由引理二可知， $a_1 = m$ 、 $a_2 \neq m - 1$ 的波浪數列可以透過交換 m 及 $m - 1$ 得到 $a_1 = m - 1$ 、 $a_2 \neq m$ 的波浪數列。這兩種數列的排法總數相同，計算 $A_{n,m} - A_{n,m-1}$ 時會抵消。未抵消的數列是前三項為 $m, m - 1, t$ ($t \in \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$) 的向下數列，和前三項為 $m - 1, m, s$ ($s \in \{1, 2, \dots, m - 2\}$) 的向上數列。此時若將這些數列的前兩項刪去，則會形成長度為 $n - 2$ 、最大數為 n 的數列，只要我們將數列中的各項由小到大依序改為 $1, 2, 3, \dots, n - 2$ ，即可形成長度為 $n - 2$ 的波浪數列。

這些新的數列可分為兩類：長度為 $n - 2$ 、首項為 t' ($t' \in \{m - 1, m, \dots, n - 2\}$) 的向下數列，以及長度為 $n - 2$ 、首項為 s' ($s' \in \{1, 2, \dots, m - 2\}$) 的向上數列。由引理一 (2) 可知， $U_{n-2,k} = D_{n-2,n-1-k}$ ，因此當兩類波浪數列之排法總數相減時，只會剩下長度為 $n - 2$ 、首項為 $m - 1$ 與 m 的向下數列數量。即

$$\begin{aligned} A_{n,m} - A_{n,m-1} &= \sum_{t'=m-1}^{n-2} D_{n-2,t'} - \sum_{s'=1}^{m-2} U_{n-2,s'} \\ &= D_{n-2,m-1} + D_{n-2,m} \\ &= D_{n-2,m-1} + U_{n-2,m-1} = A_{n-2,m-1} \end{aligned}$$

因此 $A_{n,m} = A_{n,m-1} + A_{n-2,m-1}$ 。■

證明 (2)：

同理可得

$$\begin{aligned} A_{n,m} - A_{n,m-1} &= \sum_{t'=m-1}^{n-2} D_{n-2,t'} - \sum_{s'=1}^{m-2} U_{n-2,s'} \\ &= D_{n-2,m-1} \\ &= \frac{1}{2}(D_{n-2,m-1} + D_{n-2,m-1}) \\ &= \frac{1}{2}(D_{n-2,m-1} + U_{n-2,m-1}) = \frac{1}{2}A_{n-2,m-1} \end{aligned}$$

因此 $A_{n,m} = A_{n,m-1} + \frac{1}{2}A_{n-2,m-1}$ 。■

完成上述性質的證明後，我們將這些性質推廣，得到 $A_{n,k} = 2A_{n,k-1} - A_{n,k-2} - A_{n-2,k-2}$ ，其中 $n \geq 4$ 且 $3 \leq k \leq n$ ，其證明如下：

【定理一】 $A_{n,k}$ 的遞迴關係

當 $n \geq 4$ 且 $3 \leq k \leq n$ ， $A_{n,k} = 2A_{n,k-1} - A_{n,k-2} - A_{n-2,k-2}$

證明：

設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 k 的波浪數列， $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、首項為 $k-1$ 的波浪數列。由引理二可推得兩集合數量相等

$$\#\{\langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_2 \neq k-1\} = \#\{\langle b_i \rangle_{i=1}^n \mid b_2 \neq k\}$$

所以

$$A_{n,k} - A_{n,k-1} = \#\{\langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_2 = k-1\} - \#\{\langle b_i \rangle_{i=1}^n \mid b_2 = k\}$$

我們將 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 及 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 的首兩項 k 、 $k-1$ 刪除，並將剩餘各項由小到大依序改為 1 、 2 、 $\dots$ 、 $n-2$ ，即可形成長度為 $n-2$ 的向下數列 $\langle a'_i \rangle_{i=1}^{n-2}$ 及向上數列 $\langle b'_i \rangle_{i=1}^{n-2}$ 。因為 $k+1 \leq a_3 \leq n$ 、 $1 \leq b_3 \leq k-2$ ，所以 $k-1 \leq a'_1 \leq n-2$ 、 $1 \leq b'_1 \leq k-2$ 。因此

$$\begin{aligned} A_{n,k} - A_{n,k-1} &= \#\{\langle a_i \rangle_{i=1}^n \mid a_2 = k-1\} - \#\{\langle b_i \rangle_{i=1}^n \mid b_2 = k\} \\ &= \#\{\langle a'_i \rangle_{i=1}^{n-2} \mid k-1 \leq a'_1 \leq n-2\} - \#\{\langle b'_i \rangle_{i=1}^{n-2} \mid 1 \leq b'_1 \leq k-2\} \\ &= \sum_{i=k-1}^{n-2} D_{n-2,i} - \sum_{i=1}^{k-2} U_{n-2,i} \end{aligned}$$

同理可得

$$A_{n,k+1} - A_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-2} D_{n-2,i} - \sum_{i=1}^{k-1} U_{n-2,i}$$

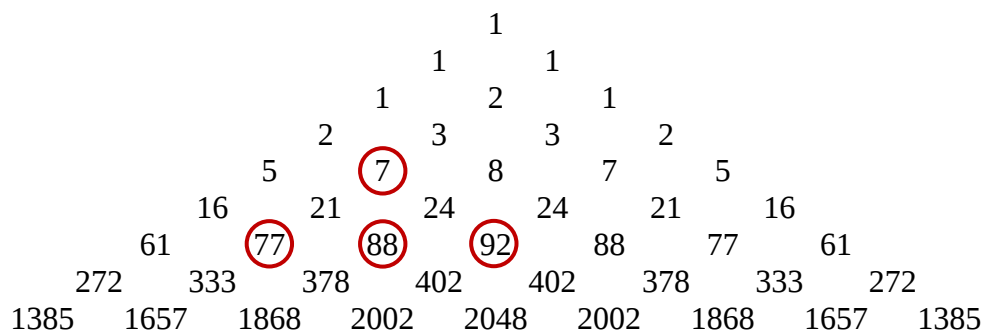
故

$$\begin{aligned} &(A_{n,k} - A_{n,k-1}) - (A_{n,k+1} - A_{n,k}) \\ &= \left(\sum_{i=k-1}^{n-2} D_{n-2,i} - \sum_{i=1}^{k-2} U_{n-2,i} \right) - \left(\sum_{i=k}^{n-2} D_{n-2,i} - \sum_{i=1}^{k-1} U_{n-2,i} \right) \\ &= D_{n-2,k-1} - (-U_{n-2,k-1}) = A_{n-2,k-1} \end{aligned}$$

即 $A_{n,k+1} = 2A_{n,k} - A_{n,k-1} - A_{n-2,k-1}$ ，平移 k 可得 $A_{n,k} = 2A_{n,k-1} - A_{n,k-2} - A_{n-2,k-2}$ 。■

以 $n = 7$ 、 $k = 4$ 為例：

$A_{7,4}$ 、 $A_{7,3}$ 、 $A_{7,2}$ 、 $A_{5,2}$ 在 $A_{n,k}$ 金字塔中的位置如下圖：



我們推導出 $A_{n,k}$ 的關係式，其證明如下：

【定理二】 $A_{n,k}$ 的關係式

(1) 當 $k < n$ 時，

$$A_{n,k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D$$

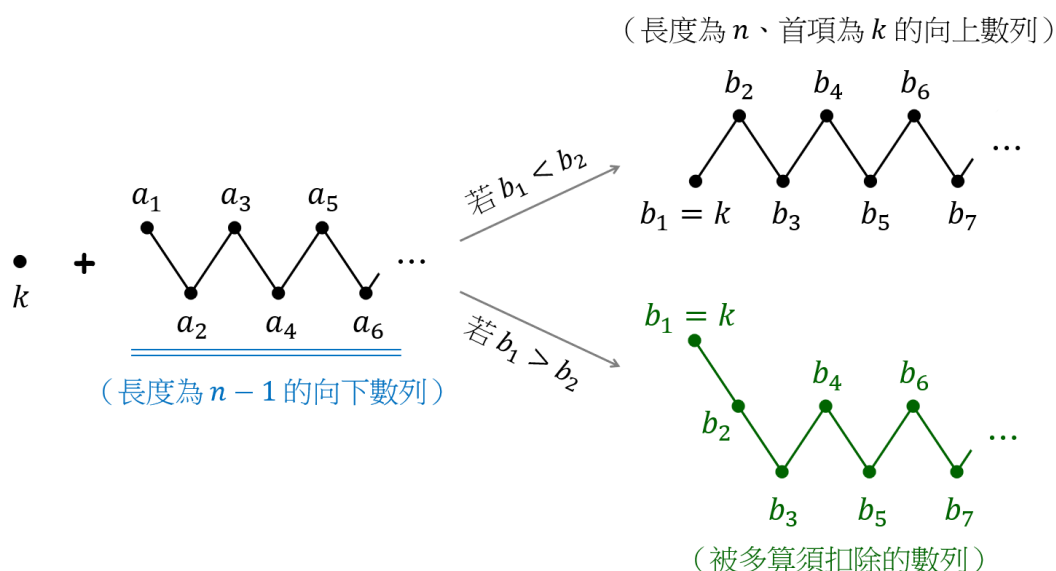
(2) 當 $k = n$ 時，

$$A_{n,n} = \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{n-1} \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

證明 (1)：

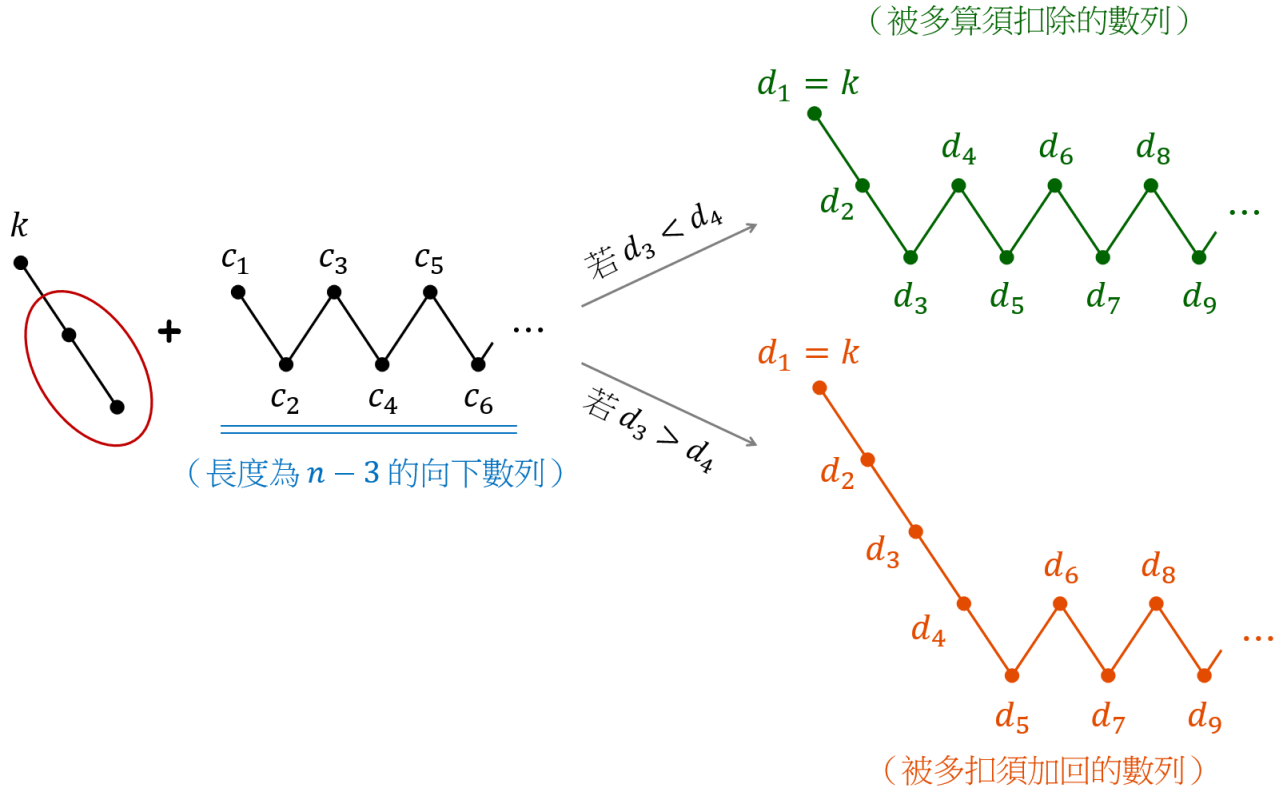
不失一般性可假設 k 為奇數，首先計算 $U_{n,k}$ 。

我們想透過在長度為 $n-1$ 的向下數列前面加一項 k ，得到長度為 n 、首項為 k 的向上數列。設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^{n-1}$ 是長度為 $n-1$ 的向下數列，令 $b_1 = k$ ，且對於 $i \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$ ，若 $a_{i-1} < k$ ，則令 $b_i = a_{i-1}$ ，若 $a_{i-1} \geq k$ ，則令 $b_i = a_{i-1} + 1$ 。因此 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 是一個長度為 n 的數列，此種數列的排法總數為 S_{n-1}^D ，如下圖：



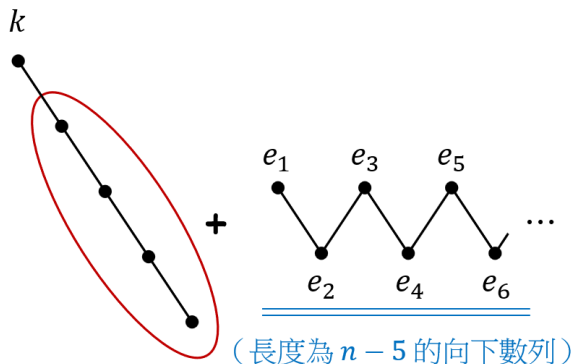
當 $b_2 > k$ 時，因為 $b_1 < b_2$ ，所以 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 即為長度為 n 、首項為 k 的向上數列。但是當 $b_2 < k$ 時，因為 $b_1 = k > b_2 > b_3$ ，此時 $\langle b_i \rangle_{i=1}^n$ 不是波浪數列，因此在計算 $U_{n,k}$ 時必須扣除這種數列的數量。我們想利用在長度為 $n-3$ 的向下數列前面加上三個連續遞減的項，計算這種數列的數量。

假設 $\langle c_i \rangle_{i=1}^{n-3}$ 是長度為 $n-3$ 的向下數列，我們在前面加上三個數，令 $d_1 = k > d_2 > d_3$ ，對於 $i \in \{4, 5, \dots, n\}$ ，若 $c_{i-3} < d_3$ ，則令 $d_i = c_{i-3}$ ，若 $d_3 \leq c_{i-3} < d_2 - 1$ ，則令 $d_i = c_{i-3} + 1$ ，若 $d_2 - 1 \leq c_{i-3} < d_1 - 2$ ，則令 $d_i = c_{i-3} + 2$ ，若 $c_{i-3} \geq d_1 - 2$ ，則令 $d_i = c_{i-3} + 3$ 。我們可以得到一個長度為 n 的數列 $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ ，因為 $d_3 < d_2 \leq k-1$ ，所以 d_2, d_3 有 C_2^{k-1} 種選法，又長度為 $n-3$ 的向下數列有 S_{n-3}^D 個，故此種數列共有 $C_2^{k-1} S_{n-3}^D$ 個。如下圖：



當 $d_3 < d_4$ 時， $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ 是長度為 n 、 $d_1 = k > d_2 > d_3 < d_4$ 的數列，其排法總數即為前面在計算 $U_{n,k}$ 時必須扣除的數量。但是當 $d_3 > d_4$ 時，因為 $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ ，此時 $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ 不是長度為 n 、 $d_1 = k > d_2 > d_3 < d_4$ 的數列，因此須將這種數列的排法總數加回。我們想利用在長度為 $n-5$ 的向下數列前面加上五個連續遞減的項，計算這種數列的數量。

假設 $\langle e_i \rangle_{i=1}^{n-5}$ 是長度為 $n-5$ 的向下數列，我們在前面加上五個數，令 $f_1 = k > f_2 > f_3 > f_4 > f_5$ ，對於 $i \in \{6, 7, \dots, n\}$ ，若 $e_{i-5} < f_5$ ，則令 $f_i = e_{i-5}$ ，若 $f_5 \leq e_{i-5} < f_4 - 1$ ，則令 $f_i = e_{i-5} + 1$ ，若 $f_4 - 1 \leq e_{i-5} < f_3 - 2$ ，則令 $f_i = e_{i-5} + 2$ ，若 $f_3 - 2 \leq e_{i-5} < f_2 - 3$ ，則令 $f_i = e_{i-5} + 3$ ，若 $f_2 - 3 \leq e_{i-5} < f_1 - 4$ ，則令 $f_i = e_{i-5} + 4$ ，若 $e_{i-5} \geq f_1 - 4$ ，則令 $f_i = e_{i-5} + 5$ 。我們可以得到一個長度為 n 的數列 $\langle f_i \rangle_{i=1}^n$ ，因為 $f_5 < f_4 < f_3 < f_2 \leq k-1$ ，所以 f_2, f_3, f_4, f_5 有 C_4^{k-1} 種選法，又長度為 $n-5$ 的向下數列有 S_{n-5}^D 個，故此種數列共有 $C_4^{k-1} S_{n-5}^D$ 個。如下圖：



因此我們得到

$$\begin{aligned} U_{n,k} &= C_0^{k-1} S_{n-1}^D - C_2^{k-1} S_{n-3}^D + C_4^{k-1} S_{n-5}^D - \cdots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} C_{k-1}^{k-1} S_{n-k}^D \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} (-1)^{i-1} \times C_{2i-2}^{k-1} \times S_{n+1-2i}^D \end{aligned}$$

同樣地，我們可推得

$$D_{n,k} = \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{i-1} \times C_{2i-1}^{k-1} \times S_{n-2i}^D$$

而當 k 為偶數時，我們用同樣的方法可得到

$$U_{n,k} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (-1)^{i-1} \times C_{2i-2}^{k-1} \times S_{n+1-2i}^D$$

$$D_{n,k} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} (-1)^{i-1} \times C_{2i-1}^{k-1} \times S_{n-2i}^D$$

因此合併 $U_{n,k}$ 和 $D_{n,k}$ 可得

$$A_{n,k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D$$

■

以 $n = 4$ 、 $k = 2$ 為例：

$$\begin{aligned} A_{4,2} &= (-1)^{\frac{1^2+1+2}{2}} \times C_{1-1}^{2-1} \times S_{4-1}^D + (-1)^{\frac{2^2+2+2}{2}} \times C_{2-1}^{2-1} \times S_{4-2}^D \\ &= (-1)^2 \times C_0^1 \times S_3^D + (-1)^4 \times C_1^1 \times S_2^D \\ &= S_3^D + S_2^D \\ &= 2 + 1 = 3 \quad \square \end{aligned}$$

證明 (2)：

當波浪數列的首項 k 為 n 時，我們用同樣的方法計算 $U_{n,n}$ 及 $D_{n,n}$ ，發現兩者都會算到 $C_{n-1}^{n-1}S_{n-n}^D$ 這項，運算符號則是取決於 n 除以 4 的餘數，因此 $A_{n,n}$ 的關係式會有 $n+1$ 項，與 $A_{n,k}$ ($k < n$) 時不盡相同，如下所示：

$$\begin{aligned} A_{n,n} &= C_0^{n-1}S_{n-1}^D + C_1^{n-1}S_{n-2}^D - C_2^{n-1}S_{n-3}^D - C_3^{n-1}S_{n-4}^D + C_4^{n-1}S_{n-5}^D + \cdots \\ &\quad + (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} C_{n-1}^{n-1}S_{n-n}^D + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} C_{n-1}^{n-1}S_{n-n}^D \end{aligned}$$

注意到當 n 為奇數時，最後兩項的運算符號為同號，相當於計算 $2 \cdot (-1)^{\frac{n^2+n+2}{2}} S_0$ ；當 n 為偶數時，最後兩項的運算符號為異號，計算時會抵消。我們將式子整理成下式：

$$A_{n,n} = \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{n-1} \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

■

以 $n = 3$ 、 $k = 3$ 為例：

$$\begin{aligned}
 A_{3,3} &= (-1)^{\frac{1^2+1+2}{2}} C_{1-1}^{3-1} S_{3-1}^D + (-1)^{\frac{2^2+2+2}{2}} C_{2-1}^{3-1} S_{3-2}^D + (-1)^{\frac{3^2+3+2}{2}} C_{3-1}^{3-1} S_{3-3}^D + (-1)^{\frac{3^2-3}{2}} \\
 &= (-1)^2 \times C_0^2 \times S_2^D + (-1)^4 \times C_1^2 \times S_1^D + (-1)^7 \times C_2^2 \times S_0^D + (-1)^3 \\
 &= S_2^D + 2S_1^D - S_0^D - 1 \\
 &= 1 + 2 - 1 - 1 = 1 \quad \square
 \end{aligned}$$

在推導定理二的過程中，我們發現當 k 為 n 時， $A_{n,n}$ 的關係式會多一項，雖然 $A_{n,n} = A_{n,1}$ ，但為了保持在 $k = 1$ 到 $k = n$ 中， $A_{n,k}$ 關係式的一致性，同時也方便推導定理三的 S_n ，我們決定保留 $A_{n,n}$ ，並將它從 $A_{n,k}$ 的關係式中獨立出來。

完成定理二的證明後，我們便繼續推導 S_n 的遞迴關係式，其證明如下：

【定理三】 S_n 的遞迴關係式

當 $n \geq 2$ 時，

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_i^n \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

證明：

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n A_{n,k} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D \right) + \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{n-1} \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \quad \leftarrow \text{變換求和順序} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times \left(\sum_{k=i}^n C_{i-1}^{k-1} \right) \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \quad \leftarrow \text{根據聖誕襪定理 } \sum_{k=i}^n C_{i-1}^{k-1} = C_i^n \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_i^n \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}
 \end{aligned}$$



以 $n = 6$ 為例：

$$\begin{aligned} S_2 &= C_1^2 \times S_1^D + C_2^2 \times S_0^D - S_0^D \\ &= 2 + 1 - 1 = 2 \quad \Rightarrow S_2^D = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= C_1^3 \times S_2^D + C_2^3 \times S_1^D - C_3^3 \times S_0^D - S_0^D \\ &= 3 + 3 - 1 - 1 = 4 \quad \Rightarrow S_3^D = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= C_1^4 \times S_3^D + C_2^4 \times S_2^D - C_3^4 \times S_1^D - C_4^4 \times S_0^D + S_0^D \\ &= 8 + 6 - 4 - 1 + 1 = 10 \quad \Rightarrow S_4^D = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_5 &= C_1^5 \times S_4^D + C_2^5 \times S_3^D - C_3^5 \times S_2^D - C_4^5 \times S_1^D + C_5^5 \times S_0^D + S_0^D \\ &= 25 + 20 - 10 - 5 + 1 + 1 = 32 \quad \Rightarrow S_5^D = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= C_1^6 \times S_5^D + C_2^6 \times S_4^D - C_3^6 \times S_3^D - C_4^6 \times S_2^D + C_5^6 \times S_1^D + C_6^6 \times S_0^D - S_0^D \\ &= 96 + 75 - 40 - 15 + 6 + 1 - 1 = 122 \quad \square \end{aligned}$$

在決定以波浪數列為本研究主題後，我們的首要目標之一，便是推導出長度為 n 的波浪數列之排法總數。定理三正是針對此問題所給出的完整解答，它提供了一組明確的遞迴關係式，能有效計算出排法總數 S_n 。由前述例子可知，只要給定初始條件 $S_0^D = S_1^D = 1$ ，便能依照定理三的遞迴關係式逐步計算出 S_2^D 、 S_3^D 、 S_4^D 、 $\dots$ 、 S_{n-1}^D ，最終求得長度為 n 的波浪數列之排法總數 S_n 。

這樣的作法讓我們無需先逐一計算 $A_{n,1}$ 、 $A_{n,2}$ 、 $\dots$ 、 $A_{n,n}$ 並加總求得 S_n ，大幅簡化了推算程序。定理三的遞迴關係式不僅簡潔有條理，其各項係數也與巴斯卡三角形中的數值相對應，展現出排列結構中隱含的對稱性與數學美感。當波浪數列的長度 n 越來越大時，我們便可利用此遞迴關係撰寫程式設計中的迴圈，自動且精確地算出所有排法，避免人工計算中可能出現的遺漏與錯誤，提升效率與確保正確性。

肆、研究結果

雖然此數列的總數計算已有文獻上的結果，但是我們利用中學的數學方法處理此問題，先觀察性質三、四、五之間的關係，發現並證明 $A_{n,k}$ 的關係式，再利用此關係式，推導出 S_n 的遞迴關係式，自此便可脫離 $A_{n,k}$ 的計算，直接以 S_n 的遞迴關係式求得長度為 n 的波浪數列排法總數，也就是說，為了推得長度為 n 的波浪數列排法總數，我們先探討並推得長度為 n 、首項為 k 的波浪數列排法總數，而透過它求得長度為 n 的波浪數列排法總數後，它的階段性任務就完成了。以下分別是 $A_{n,k}$ 的關係式與 S_n 的遞迴關係式：

一、長度為 n 、首項為 k 的波浪數列排法總數

(一) 當 $k < n$ 時：

$$A_{n,k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D$$

(二) 當 $k = n$ 時：

$$A_{n,n} = \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{n-1} \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

二、長度為 n 的波浪數列排法總數

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left[(-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_i^n \times S_{n-i}^D \right] + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

伍、討論

一、嘗試變形

我們想探討在長度為 n 的波浪數列中，任意一個數重複一次的排法總數；例如長度為 5、最大數為 4、重複數為 1 的波浪數列，共有以下 14 種排法：〈1,2,1,4,3〉、〈1,3,1,4,2〉、〈1,3,2,4,1〉、〈1,4,1,3,2〉、〈1,4,2,3,1〉、〈2,1,3,1,4〉、〈2,1,4,1,3〉、〈2,3,1,4,1〉、〈2,4,1,3,1〉、〈3,1,2,1,4〉、〈3,1,4,1,2〉、〈3,4,1,2,1〉、〈4,1,2,1,3〉、〈4,1,3,1,2〉。

令 $S_n^{(m)}$ 是長度為 n 、重複數為 m 的波浪數列排法總數，這種數列是從原本的波浪數列改變規則得到的，所以我們將它與原本的波浪數列對應，得到一些初步的結論，以下是長度為 n 、重複數分別為 1、2 的波浪數列排法總數之關係式：

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2}(S_n - S_{n-2}) \quad (n \geq 4)$$

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{2}(S_n - 3S_{n-2}) \quad (n \geq 4)$$

下表是長度為 n 的原波浪數列、重複數為 1 的波浪數列以及重複數為 2 的波浪數列排法總數：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_n	1	2	4	10	32	122	544	2770	15872
$S_n^{(1)}$	-	-	1	4	14	56	256	1324	7664
$S_n^{(2)}$	-	-	1	2	10	46	224	1202	7120

二、未來展望

(一)探討重複一數的波浪數列

目前我們只能推出長度為 n 、重複數分別為 1、2 的波浪數列排法總數之關係式，未來我們希望推得重複數為 m 的波浪數列排法總數 $S_n^{(m)}$ 與原波浪數列排法總數 S_n 之關係式。

(二)分析相鄰差值總和的極值

任取一個波浪數列，計算每兩個相鄰數之差的總和；例如波浪數列 $\langle 2, 4, 1, 3 \rangle$ 相鄰兩數之差的總和為 $|2 - 4| + |4 - 1| + |1 - 3| = 2 + 3 + 2 = 7$ 。我們想找出長度為 n 時的總和之最大值；例如長度為 4 時，每兩個相鄰數之差的總和之最大值為 7。

(三)探討雙倍波浪數列

我們考慮每個數字均出現兩次的波浪數列，例如長度為 4、最大數為 2 時，有 $\langle 1, 2, 1, 2 \rangle$ 以及 $\langle 2, 1, 2, 1 \rangle$ 兩種排法；當長度為 6、最大數為 3 時，排法總數為 106。下表是長度 2、4、6、8、10 的雙倍波浪數列排法總數。

長度	最大數	排法總數
2	1	0
4	2	2
6	3	106
8	4	1872
10	5	50650

(四)探討二維波浪陣列

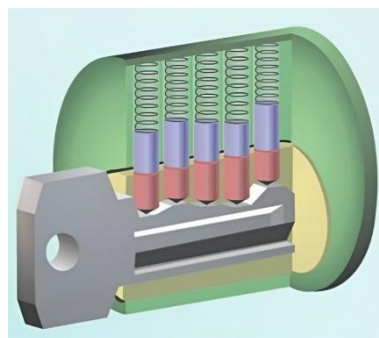
下方左圖類似魔方陣，每個數僅能填入一格，直行、橫列以及對角線皆須為波浪數列。下方右圖則是蛇行波浪數列，除了使直行與橫列須為波浪數列以外，按照特殊蛇行規則串接各數所成的數列也須為波浪數列，例如以蛇行規則串接的〈3,4,2,5,1,8,6,7〉或〈4,2,8,6,7,1,5,3〉均為波浪數列。

4	1	3
7	9	8
2	6	5

4	2	8	6
3	5	1	7

三、應用

在觀察波浪數列對應圖形的過程中，我們發現這些排列所構成的形狀，與日常生活中常見的鑰匙輪廓相似，如下圖。因此，透過本研究的波浪數列規則，我們可以用來規劃鋸齒形鑰匙的排列方式，不僅讓鑰匙製作更具結構性及規律性，也能兼顧變化性與安全性。此外，在建材中也能運用波浪數列的圖像；例如木質地板以類似互補數列的方式拼接，或是在鑲嵌、卡榫的設計中採用波浪數列的造型等。



圖片來源：https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pin_tumbler_lock-all.JPG

陸、結論

研究初期，我們首先定義長度為 n 、首項為 k 的波浪數列排法總數 $A_{n,k}$ ，將其排成類似巴斯卡三角形的 $A_{n,k}$ 金字塔，接著探討其各項之間的關係，透過對應與總數的加減，歸納並證明出其中隱含的性質，於是便可利用 $A_{n,k}$ 金字塔的前 n 層得到下一層，最後再由前述性質推導出 $A_{n,k}$ 的一般式，進而求出長度為 n 的波浪數列排法總數 S_n ，以下是我們研究所得的結論：

- 一、推得長度為 n 、首項為 k 的波浪數列排法總數 ($A_{n,k}$)。
- 二、推得長度為 n 的波浪數列排法總數 (S_n)。

雖然在我們搜尋的文獻中已看到過去數學家使用生成函數和高等數學處理本研究的問題，但是我們的研究只用到中學數學，並且得到簡潔的關係式，當輸入波浪數列的長度 n ，便能利用其遞迴關係求得波浪數列排法總數，有別於文獻中以三角函數表現的生成函數。

柒、參考文獻資料

- 一、André, D. (1879). Développements de secx et tanx. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 88, 965–979.
- 二、André, D. (1881). Sur les permutations alternées. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7, 167–184.
- 三、The OEIS Foundation Inc. (n.d.). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.
<https://oeis.org/>
- 四、游森棚、林延輯、柯建彰、洪士熏、洪育祥、張宮明 (主編) (2024)。普通型高級中等學校數學 2。翰林。

註：本作品說明書中，除了有註明圖片來源的兩張圖，其餘圖片皆由作者親自利用 Geogebra 及 Microsoft PowerPoint 繪製。

【評語】 030409

對於波浪數性質的探討，作者們觀察到數列與其互補數列結構的對稱性，為後續推導奠定基石，也推導出排列總數的一般規律式，展現不錯的數學歸納及問題解決能力。因先決條件可有很多變化，未來可再考慮這些變化下求出問題的解的規律性。

作品海報



隨「波」逐「浪」

——探討波浪數列的性質



摘要

本研究探討將連續正整數 1 至 n 依大小交錯排列所形成的「波浪數列」，其定義如下：除了首項與末項外，每一項皆大於或小於其相鄰兩項。我們分析在最大數為 n 時，波浪數列的各種情形與其在數量上的對應關係，從中歸納出排列的規律，並推導當首項為 k 時的排法總數，進而求出所有波浪數列的排法總數。

壹、前言

一、研究動機與文獻回顧

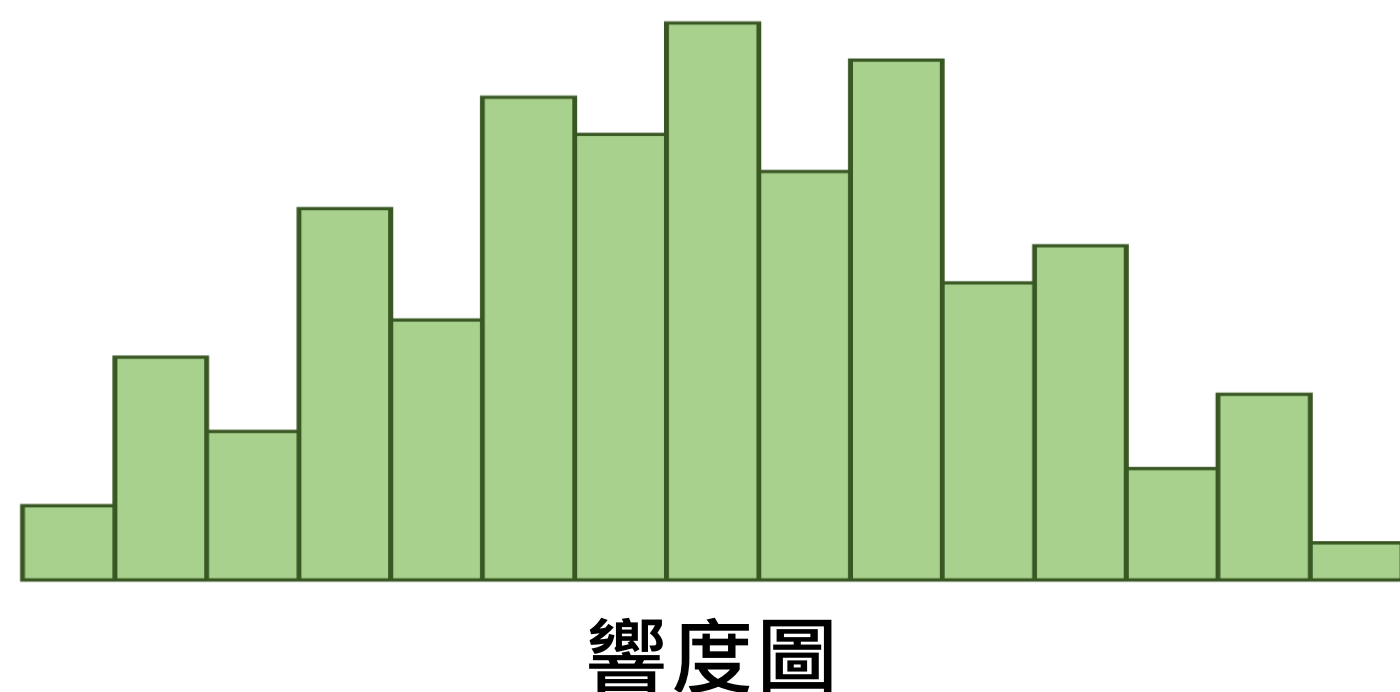
近期聽音樂時發現一種隨著音樂響度伸縮的圖形（如下圖），我們將此圖形看成一高一低的矩形併排，十分好奇會有幾種排列方式，於是這引起了我們研究的興致，想要深入瞭解與探討。本研究的波浪數列即是以此圖作為發想的起點，聚焦在討論其高低交錯排列的特殊情況。

本文所探討的波浪數列也被稱為交替排列（Alternating Permutation），最早在 19 世紀被法國數學家 Désiré André 發現並研究，其生成函數為 $\sec x + \tan x$ ，不過相關的文獻資料並不多，因此希望藉由這次研究的機會，更加瞭解此類型數列。

有些學者只考慮首項小於第二項的情形，其排法總數又被稱為 Zigzag Numbers。若長度為 n 且首項小於第二項的波浪數列之排法總數為 U_n ，則有以下遞迴關係： $2U_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U_n U_{n-k}$ 。然而我們為求排法總數的完整性，也將首項大於第二項的數列納入計算。

二、研究目的

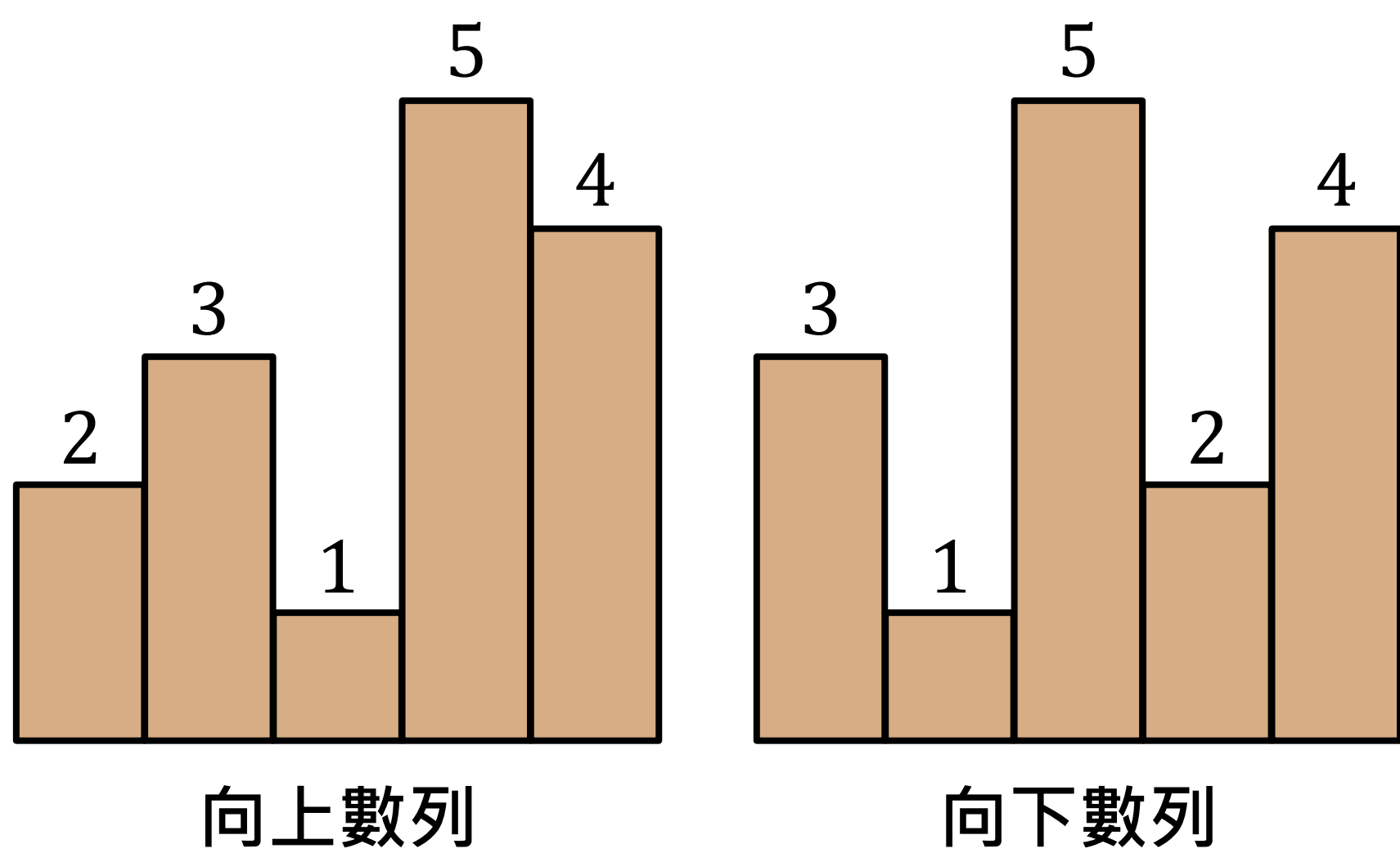
- （一）探討波浪數列之間的關係與規律。
- （二）推導並證明長度、首項固定的波浪數列之組合性質。
- （三）推導並證明長度固定的波浪數列之組合性質。



貳、研究過程

一、波浪數列的定義

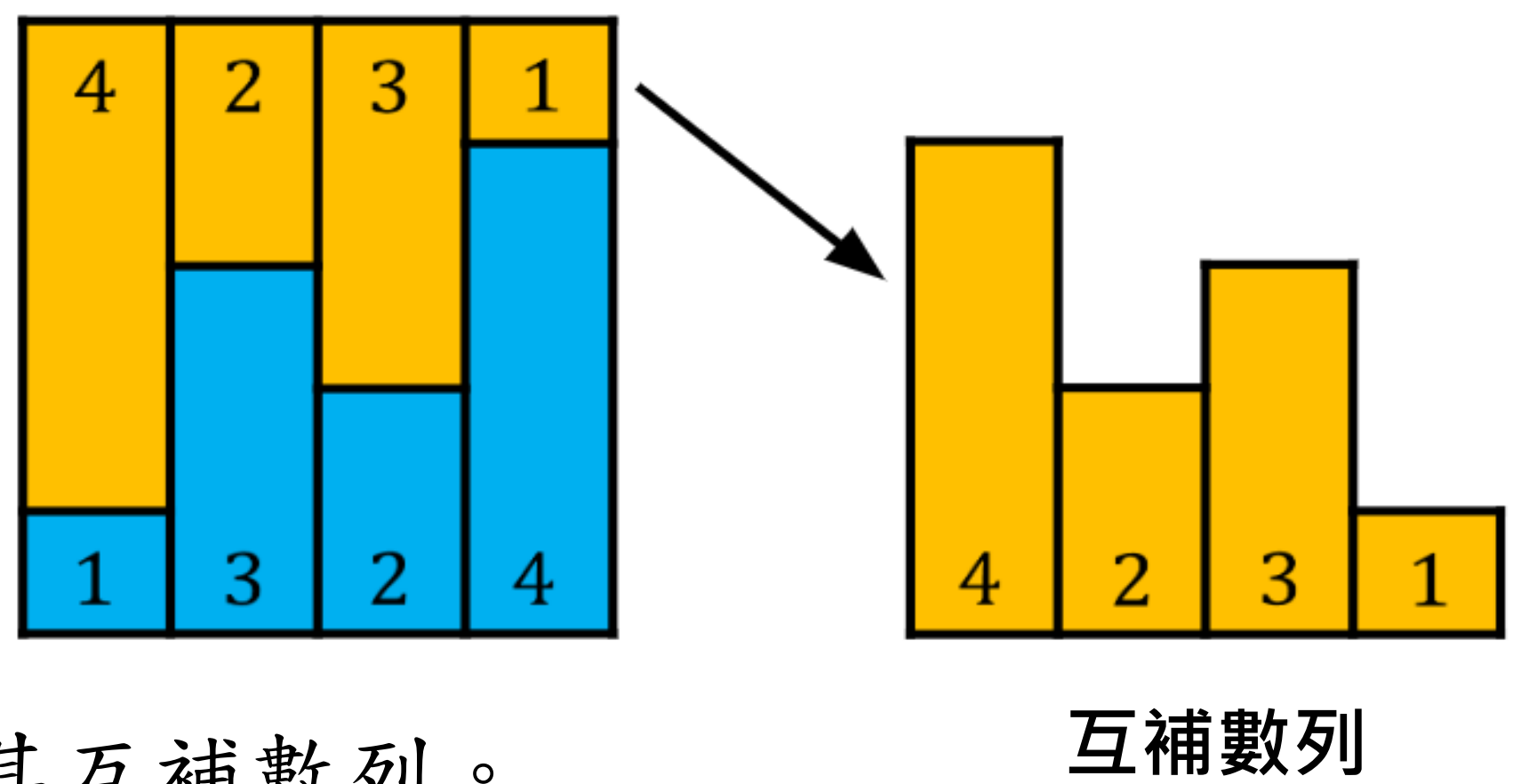
假設 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為正整數 $1, 2, \dots, n$ 的一種排列。若對於所有 $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ ，皆滿足 $a_i > a_{i-1}$ 且 $a_i > a_{i+1}$ ，或 $a_i < a_{i-1}$ 且 $a_i < a_{i+1}$ ，則稱 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為「長度為 n 的波浪數列」。例如 $\langle 2, 3, 1, 5, 4 \rangle$ 及 $\langle 3, 1, 5, 2, 4 \rangle$ 皆為波浪數列。



二、基本定義與符號說明

- （一） S_n ：長度為 n 的波浪數列之排法總數。
- （二） $A_{n,k}$ ：長度為 n 、首項為 k 的波浪數列之排法總數。
- （三）向上數列： $a_1 < a_2$ 的波浪數列。
- （四） $U_{n,k}$ ：長度為 n 、首項為 k 的向上數列之排法總數。
- （五）向下數列： $a_1 > a_2$ 的波浪數列。
- （六） $D_{n,k}$ ：長度為 n 、首項為 k 的向下數列之排法總數。
- （七） S_n^D ：長度為 n 的向下數列之排法總數。
- （八）互補數列：當給定波浪數列 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ ，則 $\langle n+1-a_i \rangle_{i=1}^n$ 為其互補數列。

例如長度為 4、首項為 2 的波浪數列有 $\langle 2, 1, 4, 3 \rangle$ 、 $\langle 2, 3, 1, 4 \rangle$ 、 $\langle 2, 4, 1, 3 \rangle$ 三種，因此 $A_{4,2} = 3$ 。



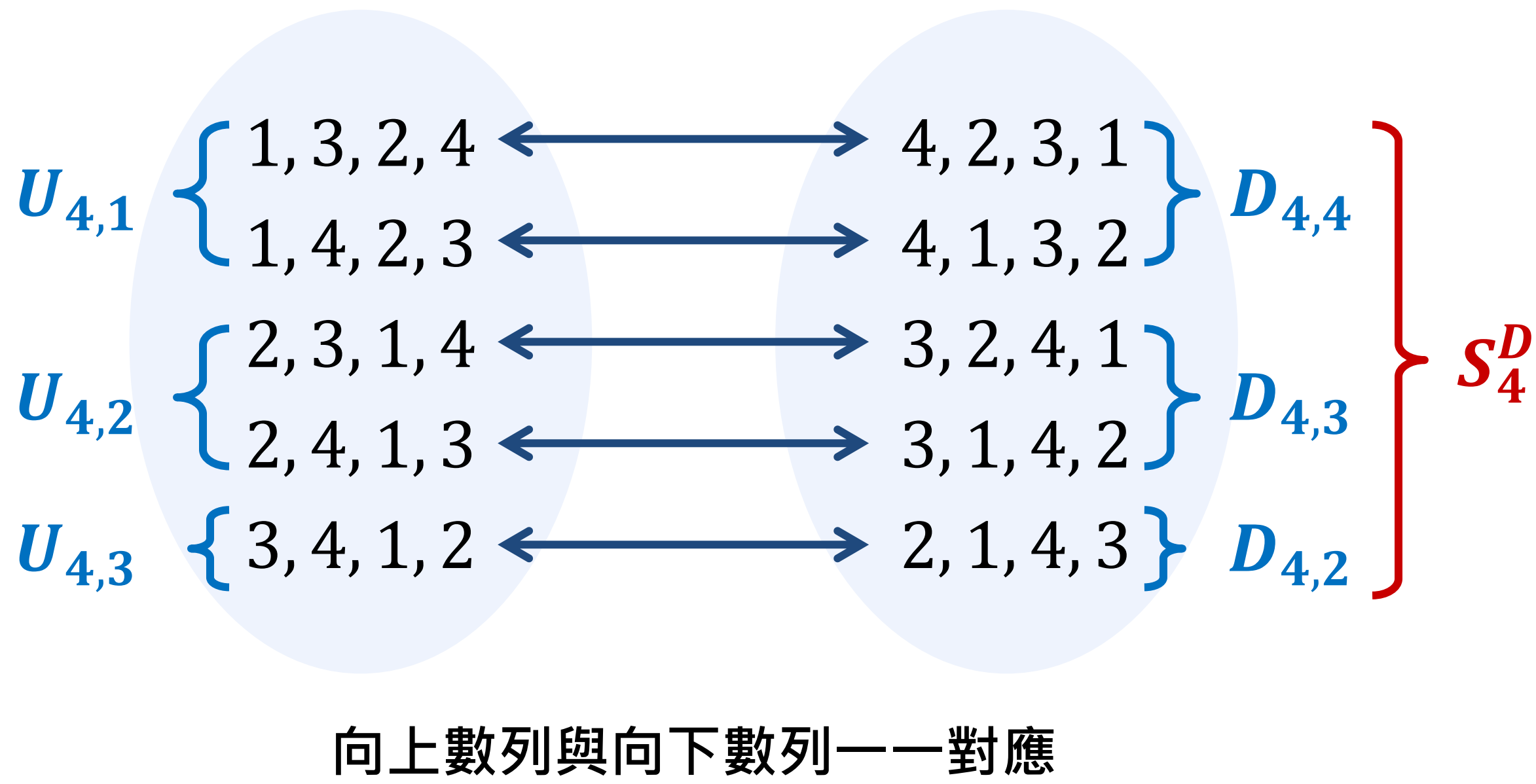
三、波浪數列的性質

【引理一】

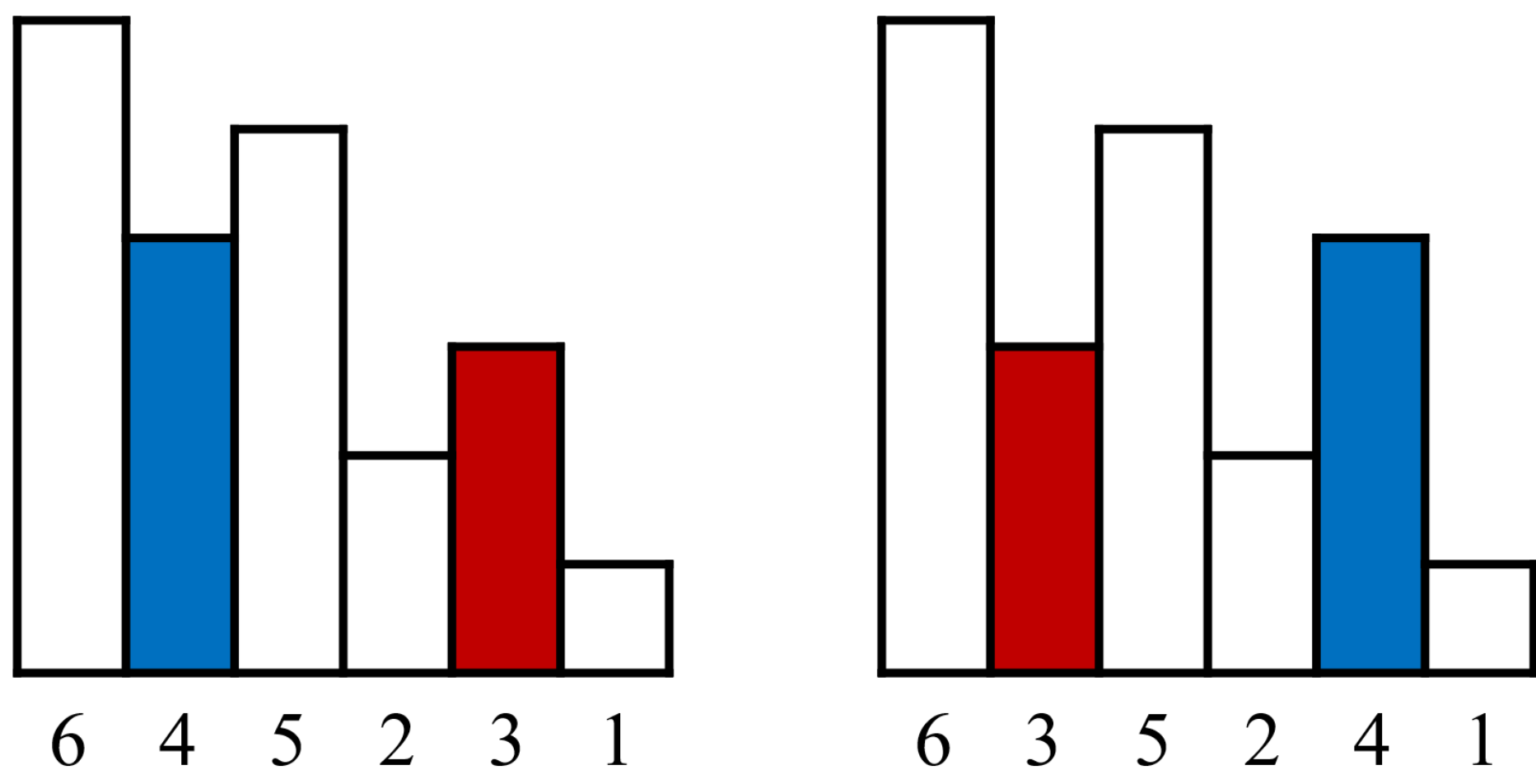
- ① 若 $\langle a_i \rangle_{i=1}^n$ 為波浪數列，則其互補數列也是波浪數列。
- ② 當 $n \geq 2$ ， $U_{n,k} = D_{n,n+1-k}$

【引理二】

若波浪數列中不相鄰的兩數其數值差 1，則將這兩數交換所得的數列仍為波浪數列。



向上數列與向下數列一一對應



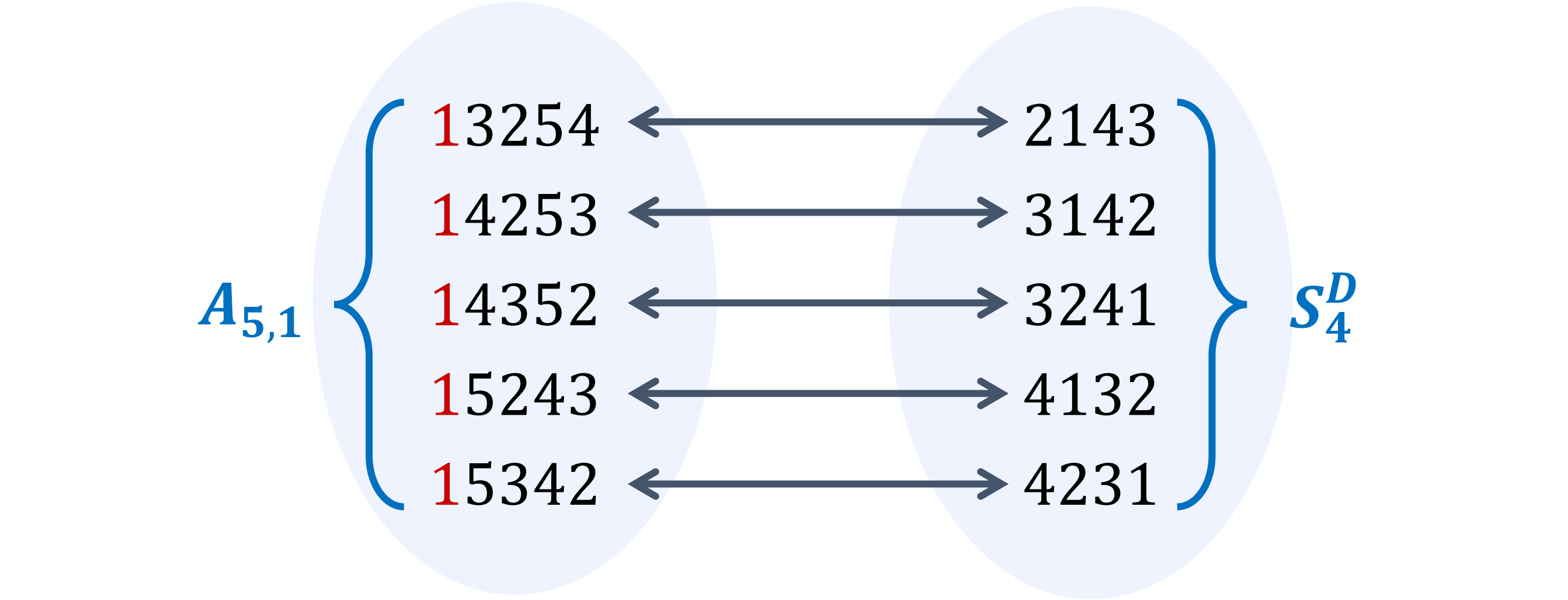
兩數交換

【性質一】 $A_{n,k} = A_{n,n+1-k}$

【性質二】當 $n \geq 2$ ， $S_n^D = \frac{1}{2} S_n$

【性質三】 $A_{n,1} = S_{n-1}^D$

以長度為 5、首項為 1 的波浪數列為例，如下圖：



將長度為 5、首項為 1 的波浪數列刪除首項 1，並將其餘數字減 1，即可對應到長度為 4 的向下數列。如：

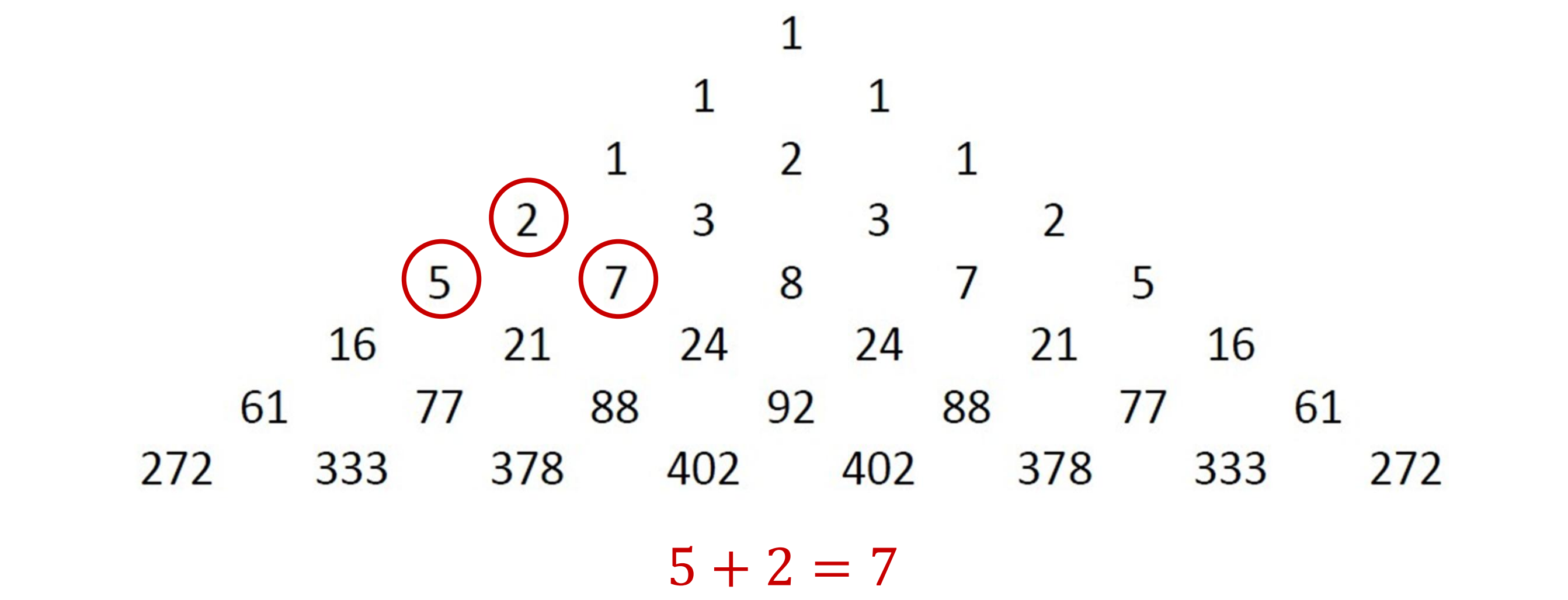
$$13254 \rightarrow \underline{3254} \rightarrow 2143$$

反之，將長度為 4 向下數列的每項加 1，再於最前方加上 1，即可還原成長度為 5、首項為 1 的波浪數列。如：

$$\underline{3142} \rightarrow 4253 \rightarrow \underline{14253}$$

因此， $A_{5,1} = S_4^D$ 。

【性質四 ①】當 $n \geq 3$ ， $A_{n,2} = A_{n,1} + A_{n-1,1}$



【性質四 ②】當 $n \geq 3$ ， $A_{n,2} = S_{n-1}^D + S_{n-2}^D$

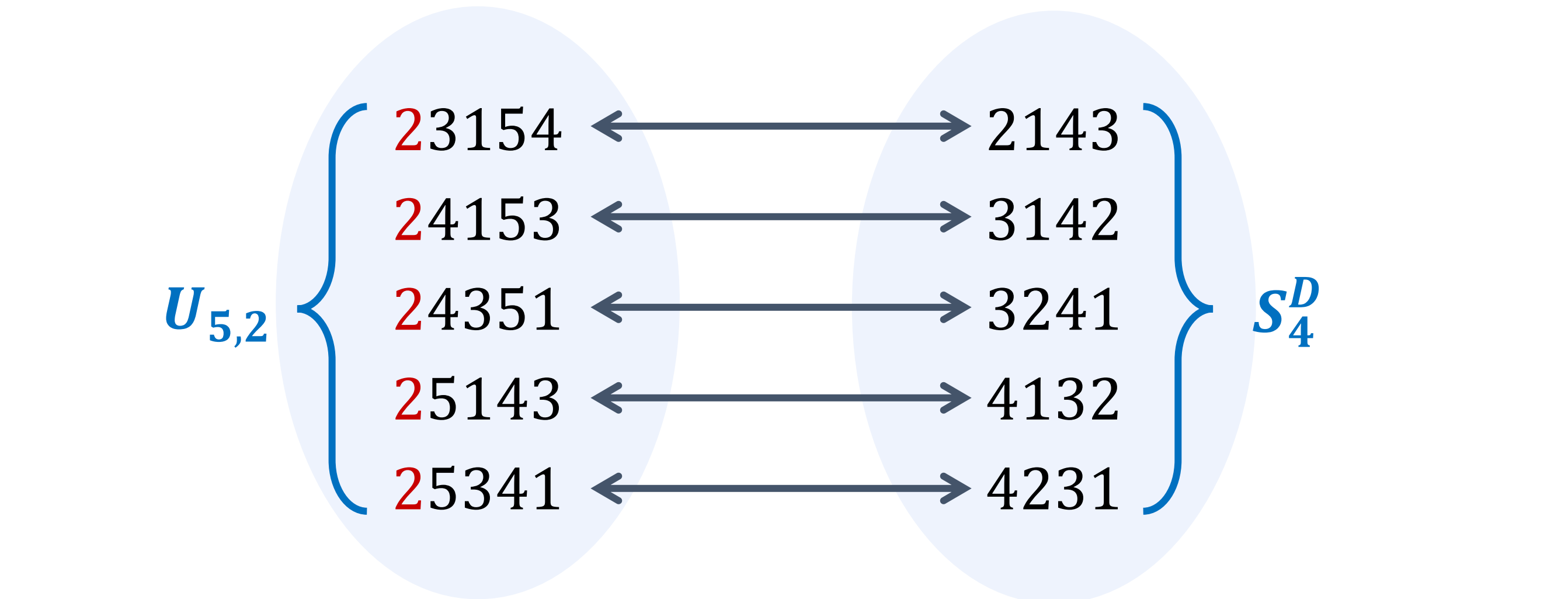
以長度為 5、首項為 2 的波浪數列為例：

將長度為 5、首項為 2 的向上數列刪除首項，並將大於 2 的數字減 1，即可對應到長為 4 的向下數列。如：

$$24153 \rightarrow \underline{4153} \rightarrow 3142$$

反之，將長度為 4 向下數列中大於 1 的項加 1，再於最前方加上 2，即可還原成長為 5、首項為 2 的向上數列。如：

$$\underline{4231} \rightarrow 5341 \rightarrow \underline{25341}$$



將長度為 5、首項為 2 的向下數列刪除前兩項，並將剩餘數字減 2，可對應到長度為 3 的向下數列。如：

$$21435 \rightarrow \underline{435} \rightarrow 213$$

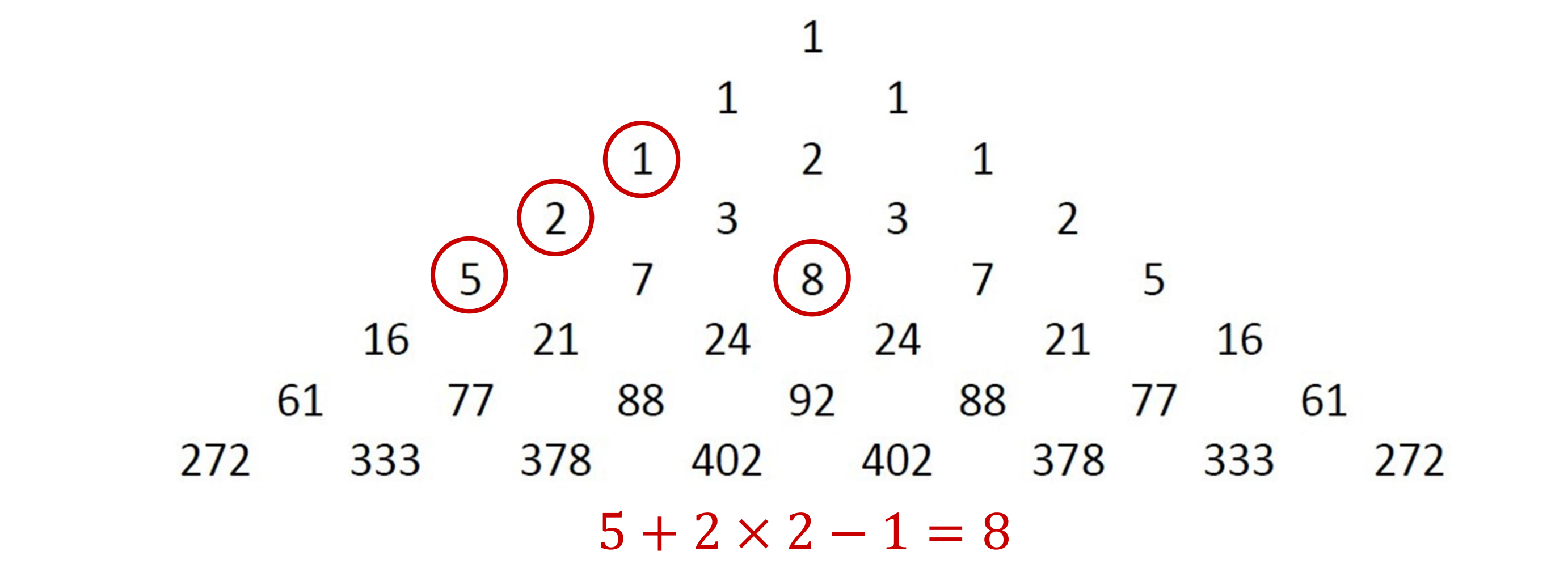
反之，將長度為 3 向下數列的每項加 2，再於最前方加上 21，即可還原成長為 5、首項為 2 的向下數列。如：

$$\underline{312} \rightarrow 534 \rightarrow \underline{21534}$$



因此 $A_{5,2} = U_{5,2} + D_{5,2} = S_4^D + S_3^D$ 。

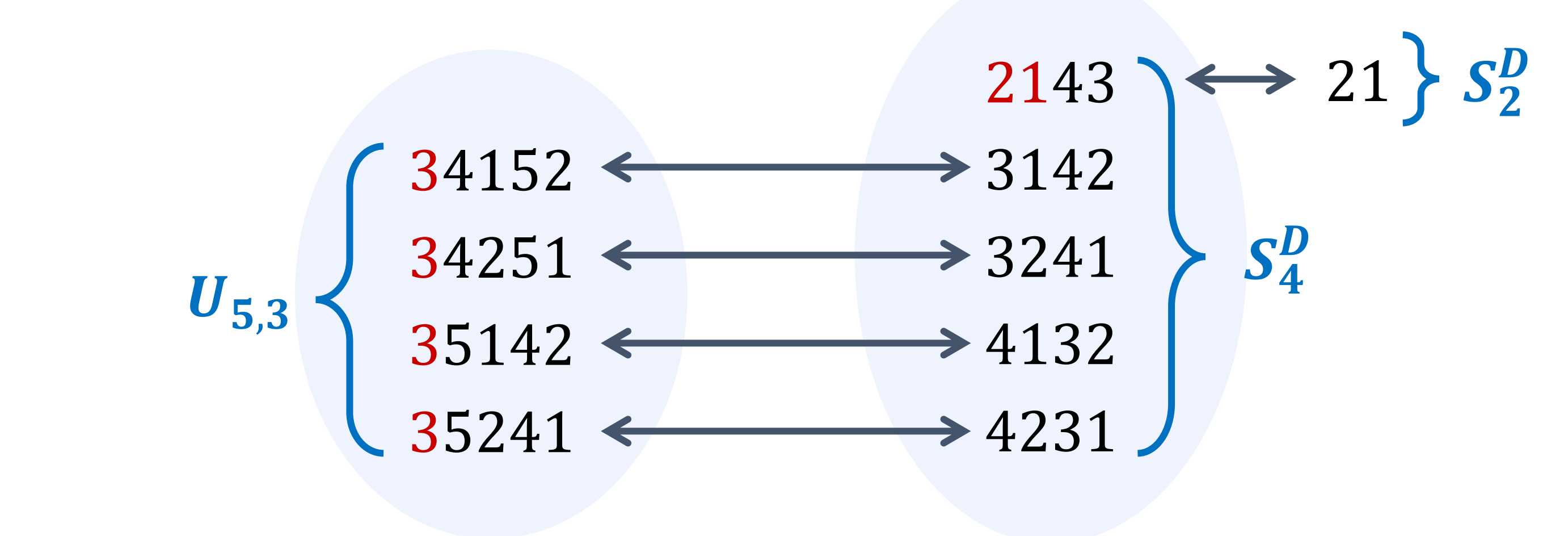
【性質五 ①】當 $n \geq 4$ ， $A_{n,3} = A_{n,1} + 2A_{n-1,1} - A_{n-2,1}$



【性質五 ②】當 $n \geq 4$ ， $A_{n,3} = S_{n-1}^D + 2S_{n-2}^D - S_{n-3}^D$

以長度為 5、首項為 3 的波浪數列為例：

長度為 5、首項為 3 的向上數列與長度為 4 的向下數列之對應關係如下：



例如：

$$34152 \rightarrow \underline{4152} \rightarrow 3142$$

$$\underline{4231} \rightarrow 5241 \rightarrow \underline{35241}$$

但是長度為 4 的向下數列中，並不是所有數列都可還原成長度為 5、首項為 3 的向上數列，例如：

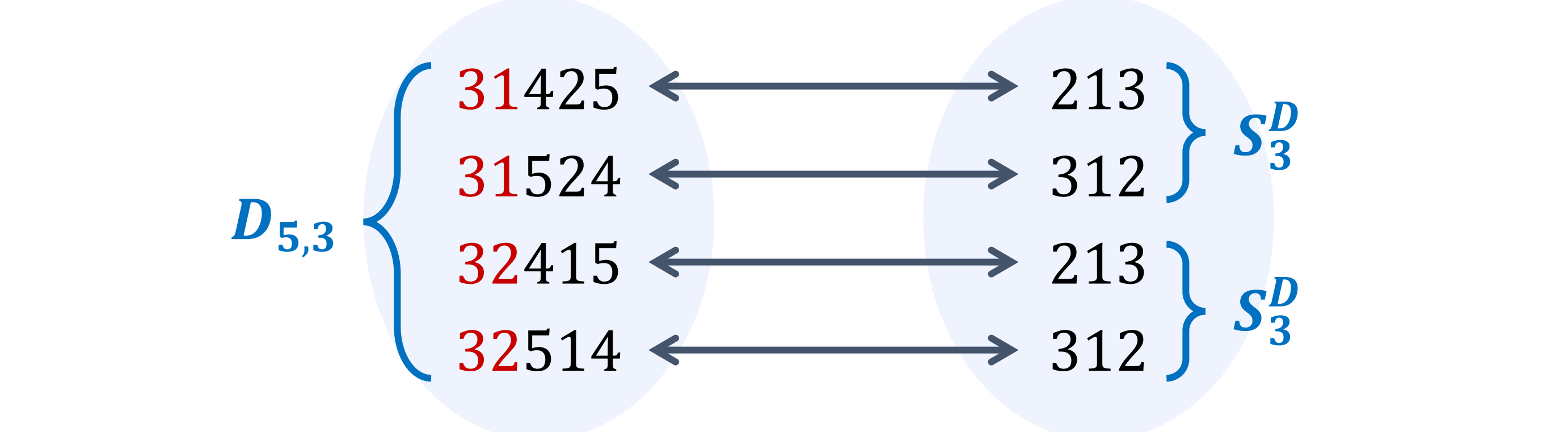
$$2143 \rightarrow 2154 \rightarrow \underline{32154}$$

而這類的數列與長度為 2 的向下數列之對應關係如下：

$$\underline{2143} \rightarrow \underline{43} \rightarrow 21$$

所以 $U_{5,3} = S_4^D - S_2^D$ 。

長度為 5、首項為 3 的向下數列與長度為 3 的向下數列之對應關係如下：



例如：

$$31425 \rightarrow \underline{425} \rightarrow 213$$

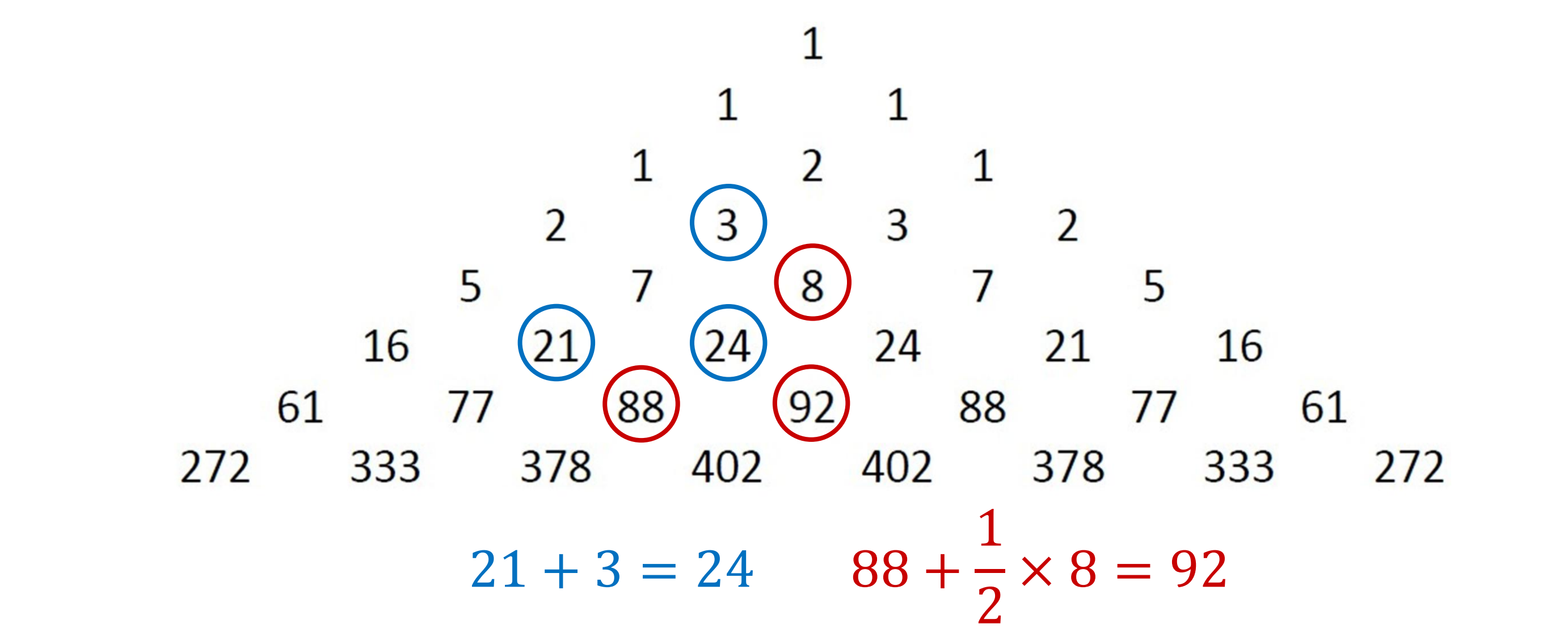
$$\underline{213} \rightarrow 425 \rightarrow \underline{31425}$$

$$\underline{213} \rightarrow 415 \rightarrow \underline{32415}$$

所以 $D_{5,3} = 2S_3^D$ 。

因此 $A_{5,3} = U_{5,3} + D_{5,3} = S_4^D + 2S_3^D - S_2^D$ 。

【性質六】
 ① 若 $n = 2m$ 且 $m \geq 2$ ，則 $A_{n,m} = A_{n,m-1} + A_{n-2,m-1}$
 ② 若 $n = 2m - 1$ 且 $m \geq 3$ ，則 $A_{n,m} = A_{n,m-1} + \frac{1}{2}A_{n-2,m-1}$

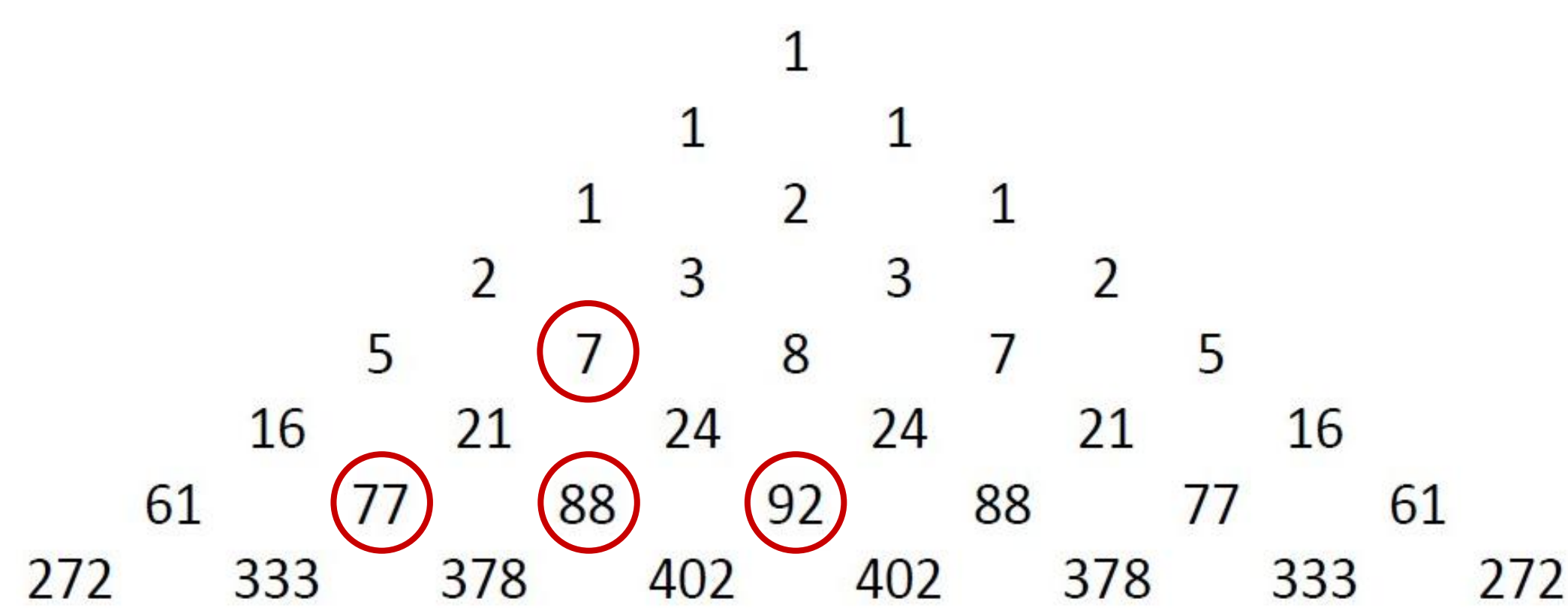


四、研究結果

【定理一】 $A_{n,k}$ 的遞迴關係式

當 $n \geq 4$ 且 $3 \leq k \leq n$ ，

$$A_{n,k} = 2A_{n,k-1} - A_{n,k-2} - A_{n-2,k-2}$$



$$2 \times 88 - 77 - 7 = 92$$

【定理三】 S_n 的遞迴關係式

當 $n \geq 2$ 時，

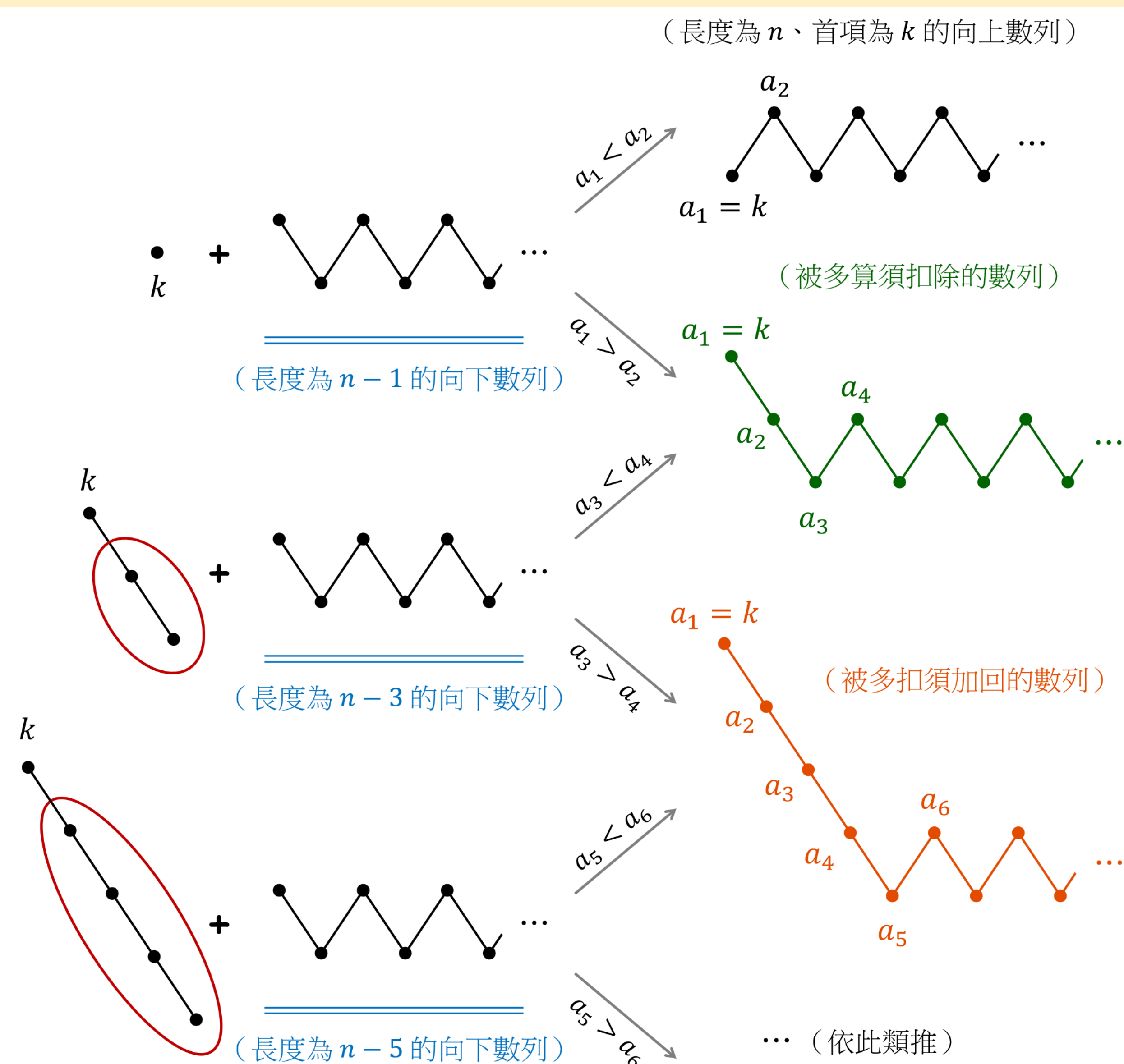
$$S_n = \sum_{i=1}^n \left((-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_i^n \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n A_{n,k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times \left(\sum_{k=i}^n C_{i-1}^{k-1} \right) \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left((-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_i^n \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}
\end{aligned}$$

【定理二】 $A_{n,k}$ 的關係式

$$A_{n,k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{k-1} \times S_{n-i}^D \quad (k < n)$$

$$A_{n,n} = \sum_{i=1}^n \left((-1)^{\frac{i^2+i+2}{2}} \times C_{i-1}^{n-1} \times S_{n-i}^D \right) + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}$$



不失一般性假設 k 為奇數，則

$$U_{n,k} = C_0^{k-1} S_{n-1}^D - C_2^{k-1} S_{n-3}^D + C_4^{k-1} S_{n-5}^D - \cdots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} C_{k-1}^{k-1} S_{n-k}^D$$

$$D_{n,k} = C_1^{k-1} S_{n-2}^D - C_3^{k-1} S_{n-4}^D + C_5^{k-1} S_{n-6}^D - \cdots + (-1)^{\frac{k-3}{2}} C_{k-2}^{k-1} S_{n-k+1}^D$$

$$\text{因此 } A_{n,k} = C_0^{k-1} S_{n-1}^D + C_1^{k-1} S_{n-2}^D - C_2^{k-1} S_{n-3}^D - C_3^{k-1} S_{n-4}^D + \dots \\ + (-1)^{\frac{k^2+k+2}{2}} C_{k-1}^{k-1} S_{n-k}^D$$

参、討論

一、探討重複一數的波浪數列

令 $S_n^{(m)}$ 是長度為 n 、重複數為 m 的波浪數列排法總數；以長度為 4、重複數 1 為例，共有 $\langle 1,2,1,3 \rangle$ 、 $\langle 1,3,1,2 \rangle$ 、 $\langle 2,1,3,1 \rangle$ 、 $\langle 3,1,2,1 \rangle$ 四種排法，故 $S_4^{(1)} = 4$ 。這種數列是從原本的波浪數列改變規則得到的，所以我們將它與原本的波浪數列對應，得到一些初步的結論，以下是長度為 n 、重複數分別為 1 和 2 的波浪數列排法總數之關係式：

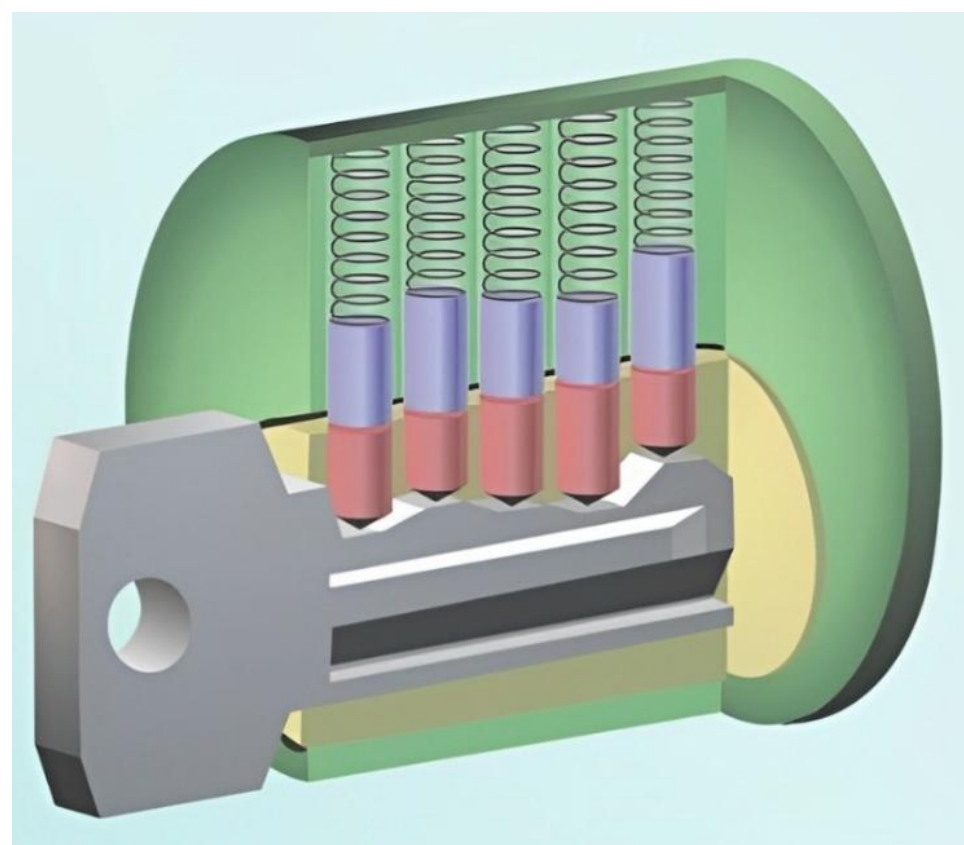
$$S_n^{(1)} = \frac{1}{2}(S_n - S_{n-2}) \quad (n \geq 4) \qquad S_n^{(2)} = \frac{1}{2}(S_n - 3S_{n-2}) \quad (n \geq 4)$$

二、未來展望

目前我們只能推出長度為 n 、重複數分別為 1、2 的波浪數列排法總數之關係式，未來我們希望推得重複數為 m 的波浪數列排法總數 $S_n^{(m)}$ 與原波浪數列排法總數 S_n 之關係式。

三、應用

在觀察波浪數列對應圖形的過程中，我們發現這些排列所構成的形狀，與日常生活中常見的鑰匙輪廓相似，如右圖。因此，透過本研究的波浪數列規則，我們可以用來規劃鋸齒形鑰匙的排列方式，不僅讓鑰匙製作更具結構性及規律性，也能兼顧變化性與安全性。此外，在建材中也能運用波浪數列的圖像；例如木質地板以類似互補數列的方式拼接，或是在鑲嵌、卡榫的設計中採用波浪數列的造型等。



圖片來源：
WIKIMEDIA COMMONS(File:Pin tumbler lock-all.JPG)

肆、結論

一、推得長度為 n 、首項為 k 的波浪數列排法總數 $(A_{n,k})$ 之關係式。

二、推得長度為 n 的波浪數列排法總數 (S_n) 之遞迴關係式。

伍、參考資料

André, D. (1879). Développements de secx et tanx. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 88, 965–979.

André, D. (1881). Sur les permutations alternées. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 7, 167–184.