中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：幾何證明的作圖

關 鍵 詞：實用性、較清晰、易接受

編　號：030412

學校名稱：

雲林縣私立正心高級中學

作者姓名：

林芷沂、林欣嵐、張婷媛

指導老師：

林浩川

壹、研究動機

在學幾何證明時，發下許多繁複的圖形包含不少有趣的元素。而且那種了解性質、尋找關鍵、層遞推論的解題方式引起了我們很大的興趣。

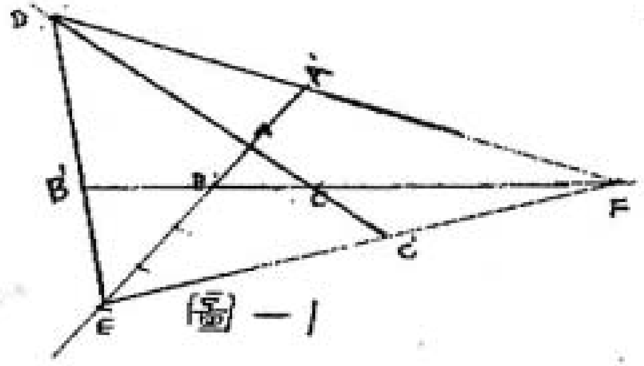
在偶然機會中，我們欣賞到第２４屆科展的作品，恰好當時正在學習多解篇，所以對它的圖形和解法激起許多新的想法。「可不可能有新的解法?」「其中是否含有規律?」

於是，我們便著手思考，以期能以更簡單的解法，更多元的應用，將我們的想法呈獻大家。

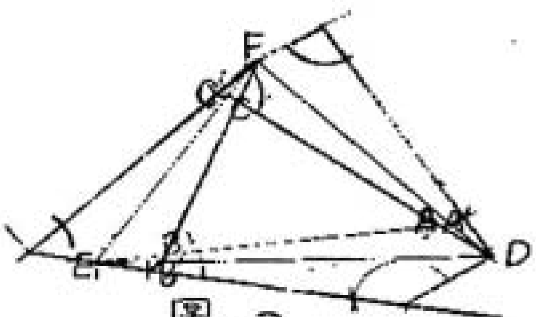
貳、研究目的

目標 A：ΔABC 延長 n 倍，得一ΔDEF(如圖-1)，再延長 $\overline{EA}$、$\overline{FB}$、$\overline{DC}$ 分別交 $\overline{DF}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$ 於 A`、B`、C`，則 $\overline{DA`}:\overline{A`F}$、$\overline{E`B}:\overline{B`D}$、$\overline{C`F}:\overline{C`E}$ 之比值是否相等且是否與 n 有關。

目標 B：反之，ΔDEF 之邊長分別取 A`、B`、C`(如圖-2)，使得 $\overline{DA`}:\overline{A`F}=\overline{B`E}:\overline{B`D}=\overline{C`F}:\overline{C`E}=1:n(n\neq1)$。連接 $\overline{EA`}$、$\overline{F`B}$、$\overline{DC`}$，兩兩線段相交一點，得一$\Delta ABC$，則$\Delta ABC/\Delta DEF$ 之比值為何，且與 n 是否有關。



圖－1



圖－2

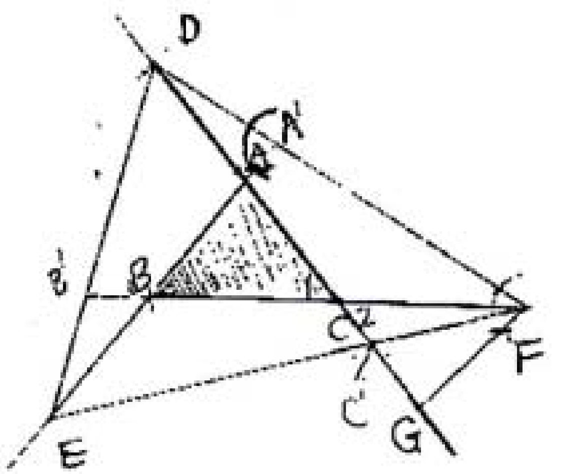
參、研究設備及器材

直尺、圓規、電腦、筆。

肆、研究過程

<目標 A>

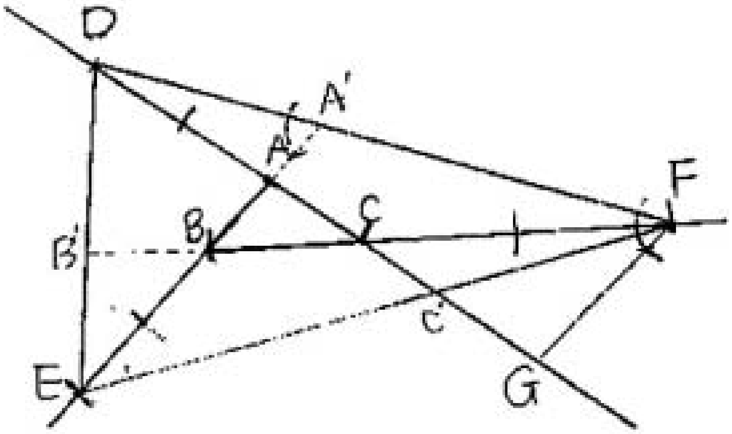
一、取一任意三角形 ABC，各延長其邊長一倍，得一新三角形 DEF，已知 $\overline{AB}=\overline{BE}$，$\overline{AC}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{CF}$



證)

1. 延長 EA 交 $\overline{DF}$ 於 A`
2. 做 $\overline{FG}$//$\overline{A`E}$，且交 $\overline{DC}$ 延長線於 G
3. ΔABC , ΔCFG 中
   ∠B=∠F($\overline{FG}$//$\overline{A`E}$)
   $\overline{BC}=\overline{CF}$(已知)
   ∠1=∠2(對頂角)
   =>ΔABC=ΔGFC(ASA)=>$\overline{AC}=\overline{GC}$
4. A`E//FG=>ΔADA`~ΔGDF(AA)
   =>$\overline{AD}$:$\overline{AG}$=$\overline{A`D}$:$\overline{A`F}$
   $\overline{AD}$:2$\overline{AD}$=$\overline{A`D}$:$\overline{A`F}$=1:2
5. 分別再延長 $\overline{DC}$ 交 $\overline{EF}$ 於 C`，延長 BF 交 DE 於 B`，同理可得
   $\overline{B`E}$:$\overline{B`D}$=1:2，$\overline{C`F}$:$\overline{CE}$=1:2

二、一任意三角形 ABC，各延長其邊長 n 倍，得一新三角形 DEF，已知 $n\overline{AB}=\overline{BE}$，$n\overline{AC}=\overline{AD}$，$n\overline{BC}=\overline{CF}$



證)

1.延長 $\overline{EA}$ 交 $\overline{DF}$ 於 A`

2.做 $\overline{FG}//\overline{A`E}$，且交 $\overline{DC}$ 延長線於 G

=>ΔABC≅ΔGFC(ASA)=>$\overline{AC}=\overline{GC}$

3.$\overline{A`B}//\overline{FG}$=>ΔABC~ΔGFC(AA)

且 $\overline{BC}:\overline{CF}$=1:n=$\overline{AC}:\overline{CG}$=>n$\overline{AC}=\overline{CG}$

4.$\overline{AA`}//\overline{CF}$=>ΔAA`D~ΔDFG(AA)

=>$\overline{AD}:\overline{AG}$ =$\overline{A`D}:\overline{A`F}$

=>n:(1+n)=$\overline{A`D}:\overline{A`F}$

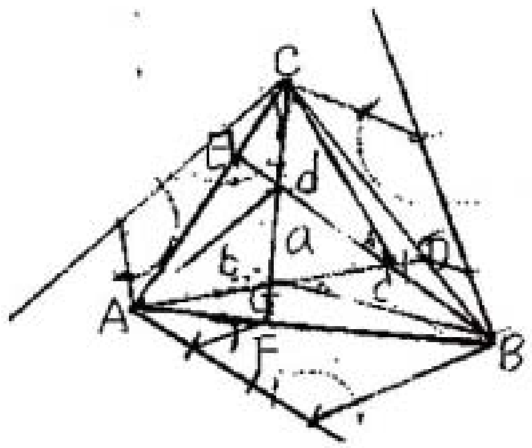
5.分別再延長 $\overline{DC}$ 交 $\overline{EF}$ 於 C`，延長 $\overline{BF}$ 交 $\overline{DE}$ 於 B`，同理可得 $\overline{B`E}:\overline{B`D}$=n:(1+n)，C`F:CE=n:(1+n)

三、<目標 B>

一ΔABC: (1) 做 $2\overline{BD}=\overline{DC}$，$2\overline{CE}=\overline{EA}$，$2\overline{AF}=\overline{BF}$

(2) 連 $\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 得一ΔGHI

(3) 連 $\overline{CH}$，$\overline{GB}$，$\overline{IA}$



證) 令ΔGHI=a，ΔAIG=b，ΔBGH=c，ΔCIH=d

$2\overline{AF}=\overline{BF}$，$2\overline{CE}=\overline{AE}$，$2\overline{BD}=\overline{CD}$

=>2ΔAGF=ΔBGH，2ΔCIE=ΔAIE，2ΔBHD=ΔCHD

且 2ΔAIF=ΔBIF，2(ΔAGF+b)=2ΔAGF+a+c

2ΔCHE=ΔAHE，2(ΔCIE+d)=2ΔCIE+a+b

2ΔBGD=ΔCGD，2(ΔBHD+c)=2ΔBHD+a+d

=> 2b=a+c 2d=a+b 2c=a+d

得 a=b=c=d ， a=b=>ΔGIH=ΔAIG，且 2Δ同高

=>AG=GH=>ΔAGB=ΔBGH(同底同高)

又 a=c，a=d，同理可得 $\overline{HI}=\overline{BH}$，$\overline{CI}=\overline{GI}$ =>ΔCIH=ΔBCH，ΔAIC=ΔAIG

ΔAIC+ΔAIG+ΔBCH+ΔCIH+ΔAGBΔBGH+ΔGHI=ΔABC

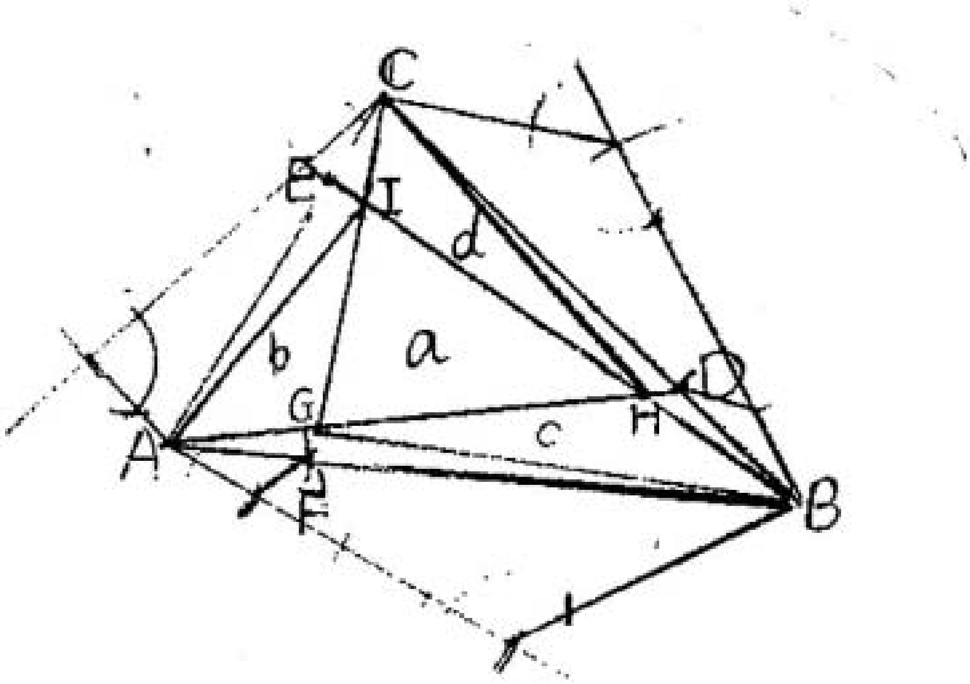
=>7ΔCIH=ΔABC=>ΔCIH=1/7ΔABC

四、　一ΔABC:

(1)做 $n\overline{BD}=\overline{DC}$，$n\overline{CE}=\overline{EA}$，$n\overline{AF}=BF(n\neq 1)$

(2)連 $\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 得一ΔGHI

(3)連 $\overline{CH}$，$\overline{GB}$，$\overline{IA}$



證)

令$\Delta GHI=a$，$\Delta AIG=b$，$\Delta BGH=c$，$\Delta CIH=d$

$n\overline{AF}=\overline{BF}$，　$n\overline{CE}=\overline{AE}$，$n\overline{BD}=\overline{CD}$

$\Rightarrow n\Delta AGF=\Delta BGH$，$n\Delta CIE=\Delta AIE$，$n\Delta BHD=\Delta CHD$

且 $n\Delta AIF=\Delta BIE$，$n(\Delta AGE+b)=n\Delta AGH+a+c$

$n\Delta CHE=\Delta AHE$，$n(\Delta CIE+d)=n\Delta CIE+a+b$

$n\Delta BGD=\Delta CGD$，$n(\Delta BHD+c)=n\Delta BHD+a+d$

$\Rightarrow nb=a+c$　　$nd=a+b$　　$nc=a+d$

得 $a=b(n-1)=c(n-1)=d(n-1)$

$a=(n-1)b\Rightarrow\Delta GIH=(n-1)\Delta AIG$，且 2$\Delta$同高

$\Rightarrow \overline{AG}=(n-1)\overline{GH} \Rightarrow \Delta AGB=(n-1)\Delta BGH$ (同高)

又 $a=(n-1)c$，$a=(n-1)d$，同理可得 $HI=(n-1)BH$，$CI=(n-1)GI$

$\Rightarrow \Delta CIH=(n-1)\Delta BCH$，$\Delta AIC=(n-1)\Delta AIG$

$\Delta AIC+\Delta AIG+\Delta BCH+\Delta CIH+\Delta AGB\Delta BGH+\Delta GHI=\Delta ABC$

$\Rightarrow 3\Delta AIG+4(n-1)\Delta=(4n-1)\Delta AIG=(4n-1)(1/n-1)\Delta GHI=4n-1/n-1\Delta GHI$

得 $\Delta GHI=4n-1/n-1\Delta ABC$

陸、研究結果

1. 根據目標 A(也就是研究過程一和二)，我們可得若依三角形邊長向外延長相同倍數 n 倍，得一新三角形，且若原三角形延長其邊長和新三角形相交，則得 2 線段。此 3 邊長上ㄉ 2 線段皆會成固定比例—n:(n+1)

2. 而據目標 B(也就是研究過程三和四)，將一三角形在 3 邊上取相同比例 1:n(n≠1)，和其對頂點相連，得一新三角形，而且此新三角形和原三角形的面積比爲(n-1):(4n-1)

柒、討論

一開始著手進行科展時，第一個遇到的難題便是題目的選擇，如何從數學廣泛的境域裡，萬中選一的找出既實際又有趣的議題？爲此，我們到圖書館翻閱歷屆科展作品以尋求靈感，終於，在慎重的討論下，決定以廿十四屆科展的題目，另外做更深入的研究與探討。

由於原本的解法過於繁複冗長，也因此降低了實用性，於是我們思索另一種方式，希望可以較爲清晰且較易被同學接受。

剛開始我們曾嘗試使用推論面積關係的方式著手，卻沒歸納出完整的規律。正好那時課程上複習到相似形，於是我們轉而利用平行線得到相似形，再以其比例線段的關係來做推論。在＜目標 A＞裡，我們先試著以延長一倍的邊長來推導，再進而推廣至多倍、n 倍，找出了相同的規律。幾經證明無誤後，再將它應用至＜目標 B＞中，反推出新三角形和原三角形面積的比例關係。也因此，推得了三角形等分面積之共同公式。

捌、結論

許多同學面對等分三角形面積的作圖時，總是面有難色。但如果應用上述規律，便可方便的作出以原三角形爲準，任意比例的多個三角形。對於一些繁複的等分作圖，實在不失爲一個快速且實用的方法。Ex:一三角形，要畫其面積 1/11 倍的三角形，即可用所求的公式，n-1/4n-1，1/11=n-1/4n-1，求得將其邊長以 1:10/7 分成 2 份，即爲所求。

我們深信，科展的意義在於創新與思考，希望我們的成果，能爲各位同學日後的學習有所裨益，那便是我們完成此次科展的最大榮幸了。

玖、參考資料及其他

第 24 屆中小學科學展覽作品之數學科之幾何作圖的證明