

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 生活與應用科學(一)科

佳作

082802

彈珠檯—彈彈入洞，百發百中

學校名稱：嘉義市東區嘉北國民小學

作者： 小六 羅家科 小六 吳馨儀 小六 郭宥芸	指導老師： 王雅穗 楊晴萍
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：彈珠檯、鐘形分配圖

摘要

彈珠撞擊釘子的運動方向與四年級力與運動的課程相關結合五年級的資訊課Scratch的程式，將實體的運動方式，以虛擬的程式呈現。我們發展多元釘板的彈珠檯，以便於觀察與討論彈珠在受力後運動的情形。實驗中藉由牛頓運動定律改變檔板弧度、彈珠彈射力道等變因來操控彈珠的方向，設計五種不同弧形檔板；利用彈力公式，彈簧在不同伸長量會產生不同的力，找出最佳的中間型鐘形分配圖。

以我們現今最方便的手機彈珠檯遊戲切入，再進行實體的探究。我們先以文獻的討論，了解彈珠的落孔情形，進而分析、比較彈珠的進洞機率，以研究中間型鐘形分配為主，改變釘子排列與檔板的弧度配合不同的力量找出作符合實驗期望模式，再以Scrath依探究結果設計出彈珠檯遊戲。

壹、研究動機

每次去逛夜市或是園遊會擺攤，就一定看到彈珠檯的攤位，彈珠檯是不論任何年齡都會喜歡玩的機台，也是我們的父母親小時候的童年。在玩彈珠台時，發現球幾乎每次都掉到中間，然而中間又是最少分數的，因此吸引了我的好奇心，讓我們開始了這次的研究。

到底要如何獲得更多的彈珠，是否跟上面的釘子有關呢？還是有其他影響彈珠掉落的因素，吸引我們想要更深入地去探究。我們在手機APP找到彈珠檯遊戲，由虛擬實驗到實體操作，自己DIY組裝一個完整的彈珠台，並利用自己裝的彈珠台運用四年級所學彈力的知識延伸學習，依序完成所有實驗並且紀錄實驗過程，分析數據並整理成實驗報告，利用組裝的彈珠檯找到不同彈珠落孔情形，結合我們五年級資訊課程Scratch積木程式，編程出我們的彈珠台遊戲，讓所有喜歡彈珠台遊戲的同學一起用我們設計的彈珠台來玩遊戲。

貳、研究目的

- 一、觀察手機App與實體彈珠檯遊戲，以不同的力彈射彈珠，落入各孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。
- 二、由高爾頓模擬鐘形分配與實體的情形，再以Scratch編程。
- 三、探討自製不同釘子排列之彈珠檯，彈珠落入各球洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。
- 四、探討彈珠檯檔板弧度與不同力道搭配，彈珠落入各孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。
- 五、由實體彈珠台結果，以Scratch編成虛擬彈珠台。

參、研究設備及器材

- 實驗器材：DIY彈珠檯、釘板、小銅釘、瞬間接著劑、白膠、厚地墊 (2cm)。

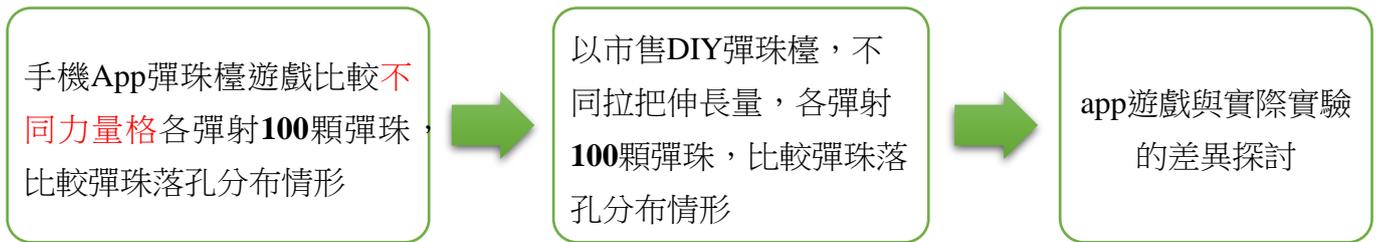
實驗器材				
名稱	市售DIY彈珠檯	釘板	小銅釘	彈珠
實驗器材				
名稱	彈珠檯App的手機	厚地墊 (2cm)	白膠	瞬間接著劑

肆、研究過程及方法

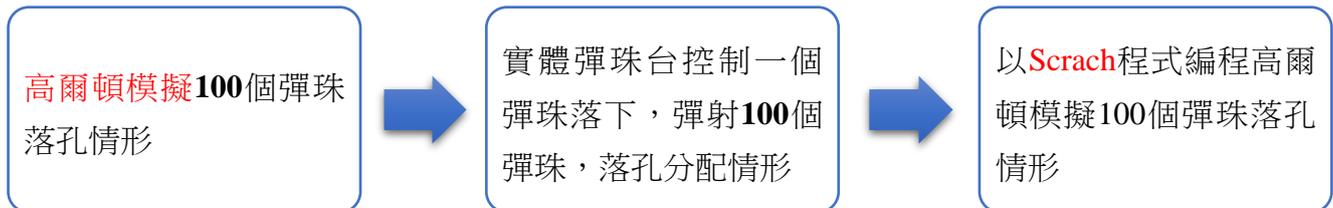
一、實驗設計說明

為了讓遊戲程式編寫出的彈珠檯符合實際情況的彈珠檯，我們研究實體彈珠檯收集數據，找到最符合中間型鐘型分配情況。我們請木材行幫我們切割與市售DIY的彈珠檯相同的底板，自行設計釘子釘的位置。由實驗結果討論出，由彈珠落入球洞位置分配，找出最符合中間型的鐘型分配進而用Scratch設計彈珠檯遊戲。

●**探究一**：手機App彈珠檯遊戲與市售DIY彈珠檯的比較



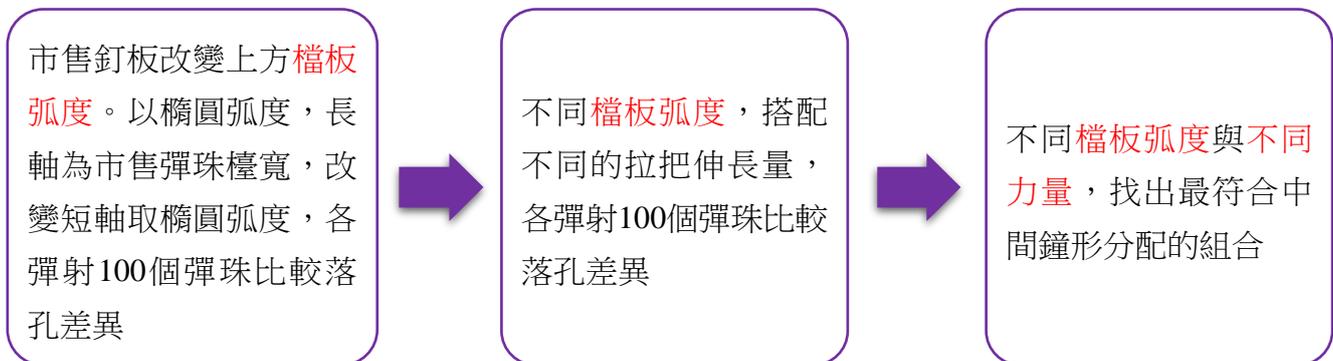
●**探究二**：高爾頓釘板的鐘形分配



●**探究三**：釘子排列不同的比較



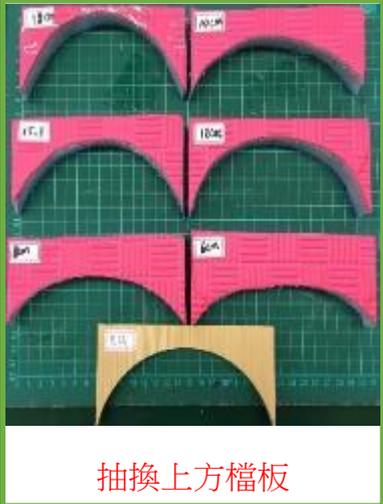
●**探究四**：市售釘板改變檔板弧度與力量比較



●**探究五**：以scratch依探究結果編程出遊戲彈珠台。

二、測定方法

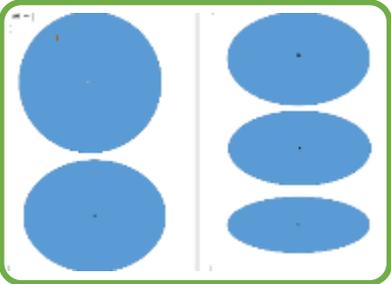
(一) 手機app彈珠檯遊戲與DIY彈珠檯

項目	手機app彈珠檯遊戲	DIY彈珠檯	
<p>流程</p>	 <p style="text-align: center;">↓</p>  <p style="text-align: center;">不同力量格</p>	 <p style="text-align: center;">↓</p>  <p style="text-align: center;">抽換釘板</p>	 <p style="text-align: center;">↓</p>  <p style="text-align: center;">抽換上方檔板</p>
<p>方式</p>	<p>各彈射 100 顆彈珠</p>	<p>各彈射100顆彈珠</p>	

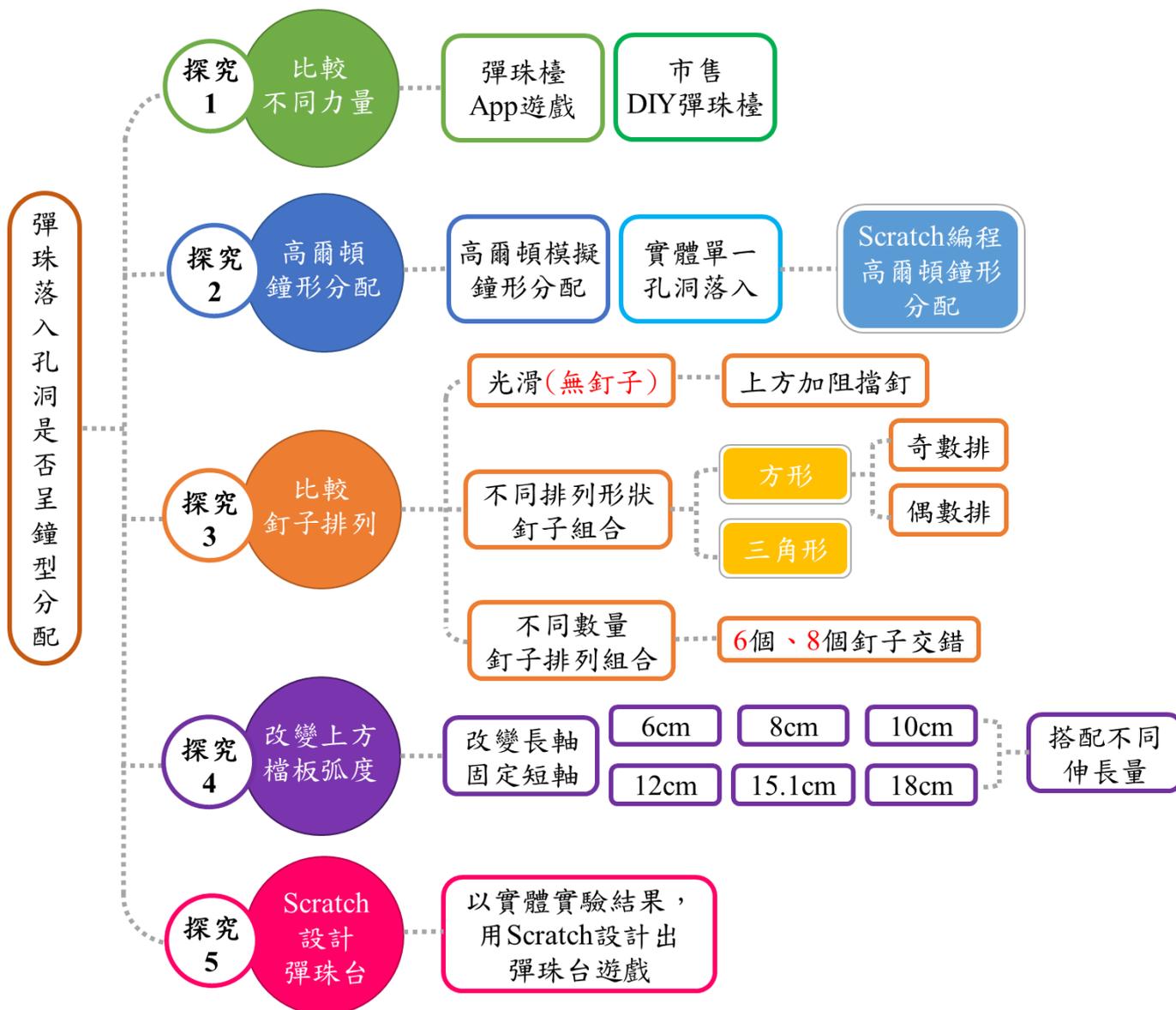
(二) 釘板釘子排列



(三) 檔板製作

製作檔板圖形	製作檔板	完成的檔板
		
<p data-bbox="145 931 504 1055">將弧形檔板用 word 畫好後印出</p>	<p data-bbox="651 909 1007 1088">墊子先裁切成與原檔板一樣的寬度，將圖形對在墊子上</p>	
		<p data-bbox="1137 1223 1465 1357">完成 6 種不同弧度的檔板</p>
		
<p data-bbox="145 1648 504 1727">剪下畫好的圖形</p>	<p data-bbox="651 1648 1007 1727">用美工刀割下</p>	

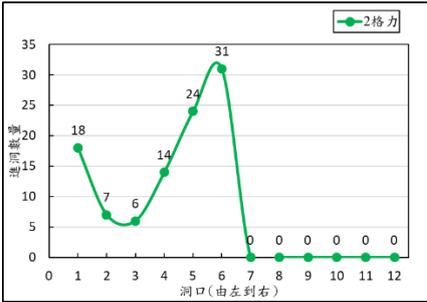
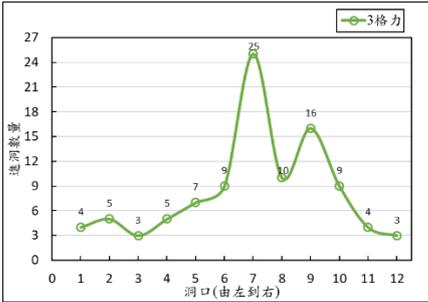
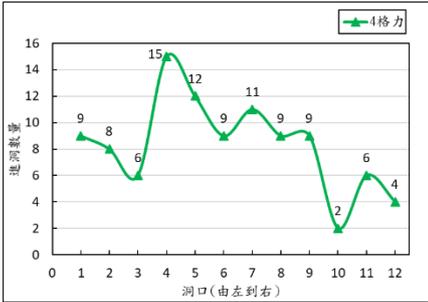
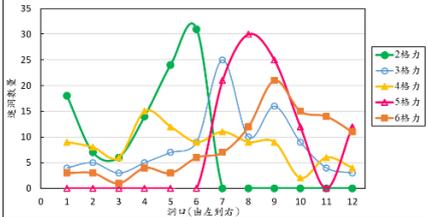
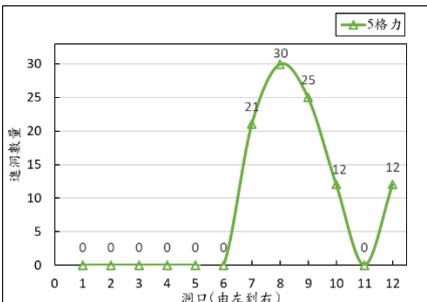
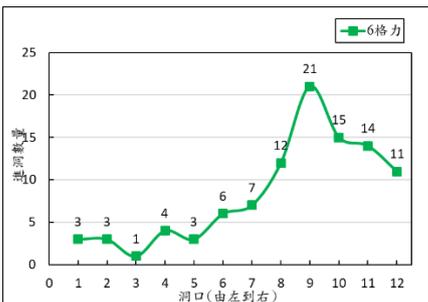
三、實驗流程



伍、研究結果

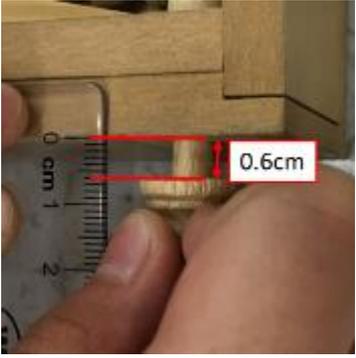
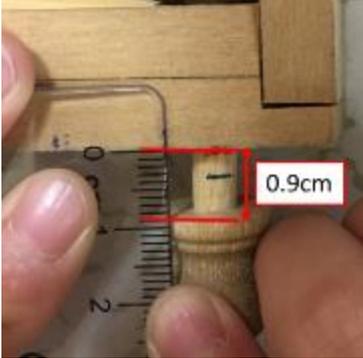
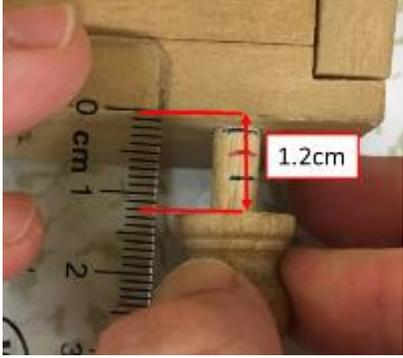
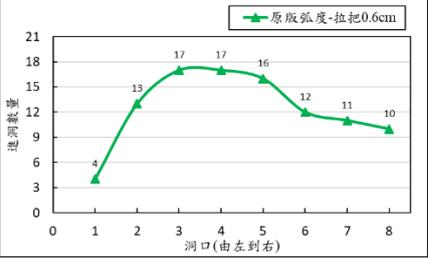
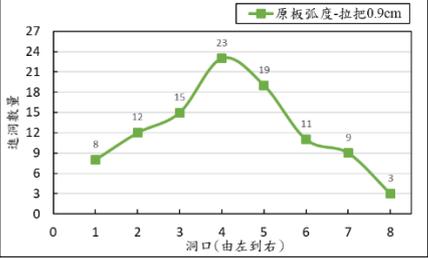
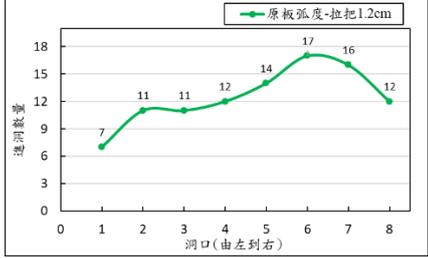
一、**探究一**：觀察手機App與實體彈珠檯遊戲，以不同的力彈射彈珠，落入各孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。

(一)手機App不同力量格，彈珠落入各個孔洞的分布情形

力量格	2格	3格	4格																																																																														
實際情況																																																																																	
彈珠落孔分佈圖	 <table border="1"> <caption>2格力量彈珠落孔分佈</caption> <thead> <tr><th>洞口</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>進洞數量</td><td>18</td><td>7</td><td>6</td><td>14</td><td>24</td><td>31</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	進洞數量	18	7	6	14	24	31	0	0	0	0	0	0	 <table border="1"> <caption>3格力量彈珠落孔分佈</caption> <thead> <tr><th>洞口</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>進洞數量</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>25</td><td>10</td><td>16</td><td>9</td><td>4</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	進洞數量	4	5	3	5	7	9	25	10	16	9	4	3	 <table border="1"> <caption>4格力量彈珠落孔分佈</caption> <thead> <tr><th>洞口</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>進洞數量</td><td>9</td><td>8</td><td>6</td><td>15</td><td>12</td><td>9</td><td>11</td><td>9</td><td>9</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	進洞數量	9	8	6	15	12	9	11	9	9	2	6	4
洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																					
進洞數量	18	7	6	14	24	31	0	0	0	0	0	0																																																																					
洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																					
進洞數量	4	5	3	5	7	9	25	10	16	9	4	3																																																																					
洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																					
進洞數量	9	8	6	15	12	9	11	9	9	2	6	4																																																																					
力量格	5格	6格	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">發現 1.1 :</div> 																																																																														
實際情況																																																																																	
彈珠落孔分佈圖	 <table border="1"> <caption>5格力量彈珠落孔分佈</caption> <thead> <tr><th>洞口</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>進洞數量</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>21</td><td>30</td><td>25</td><td>12</td><td>0</td><td>12</td></tr> </tbody> </table>	洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	進洞數量	0	0	0	0	0	0	21	30	25	12	0	12	 <table border="1"> <caption>6格力量彈珠落孔分佈</caption> <thead> <tr><th>洞口</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>進洞數量</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>12</td><td>21</td><td>15</td><td>14</td><td>11</td></tr> </tbody> </table>	洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	進洞數量	3	3	1	4	3	6	7	12	21	15	14	11																											
洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																					
進洞數量	0	0	0	0	0	0	21	30	25	12	0	12																																																																					
洞口	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12																																																																					
進洞數量	3	3	1	4	3	6	7	12	21	15	14	11																																																																					

(1) 用手機APP模擬彈珠台，發現力量格越少偏向左偏的鐘形分配；而力量格越多，偏向右偏的鐘形分配；中間格數的力會呈現中間的鐘形分配，符合我們討論的鐘形分配。

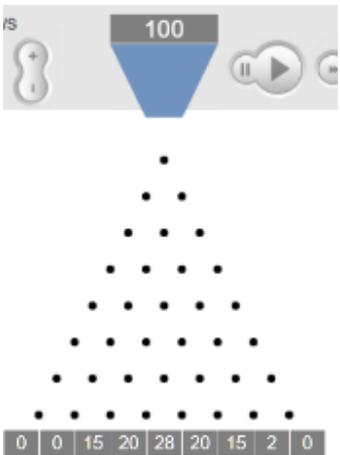
(二)市售DIY彈珠台不同伸長量，彈珠落入各個孔洞的分布情形

伸長量	0.6cm	0.9cm	1.2cm(拉到底)																																																						
實際情況																																																									
彈珠落孔分佈圖	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (0.6cm)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>進洞數量</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>13</td></tr> <tr><td>3</td><td>17</td></tr> <tr><td>4</td><td>17</td></tr> <tr><td>5</td><td>16</td></tr> <tr><td>6</td><td>12</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	進洞數量	1	4	2	13	3	17	4	17	5	16	6	12	7	11	8	10	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (0.9cm)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>進洞數量</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>12</td></tr> <tr><td>3</td><td>15</td></tr> <tr><td>4</td><td>23</td></tr> <tr><td>5</td><td>19</td></tr> <tr><td>6</td><td>11</td></tr> <tr><td>7</td><td>9</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	進洞數量	1	8	2	12	3	15	4	23	5	19	6	11	7	9	8	3	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (1.2cm)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>進洞數量</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>11</td></tr> <tr><td>3</td><td>11</td></tr> <tr><td>4</td><td>12</td></tr> <tr><td>5</td><td>14</td></tr> <tr><td>6</td><td>17</td></tr> <tr><td>7</td><td>16</td></tr> <tr><td>8</td><td>12</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	進洞數量	1	7	2	11	3	11	4	12	5	14	6	17	7	16	8	12
洞口 (由左到右)	進洞數量																																																								
1	4																																																								
2	13																																																								
3	17																																																								
4	17																																																								
5	16																																																								
6	12																																																								
7	11																																																								
8	10																																																								
洞口 (由左到右)	進洞數量																																																								
1	8																																																								
2	12																																																								
3	15																																																								
4	23																																																								
5	19																																																								
6	11																																																								
7	9																																																								
8	3																																																								
洞口 (由左到右)	進洞數量																																																								
1	7																																																								
2	11																																																								
3	11																																																								
4	12																																																								
5	14																																																								
6	17																																																								
7	16																																																								
8	12																																																								

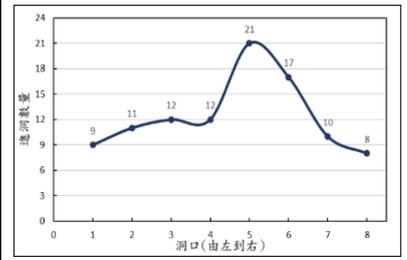
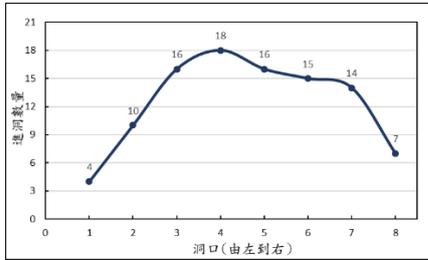
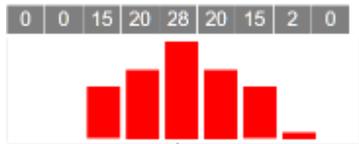
發現 1.2 :

- 由彈力公式 $F=k(\Delta X)$ ，其中彈力 F 與伸長量 ΔX 成正比。故我們可以由改變拉把的伸長量長度來定義彈力大小，當伸長量比較長時，彈力比較大；而伸長量比較短時，彈力比較小。
- 發現力量越小會偏左邊，力量大會偏右邊 → 依據結果推論力量能夠控制彈珠落下孔洞的位置。

二、探究二：由高爾頓模擬鐘形分配與實體的情形，再以Scratch編程。

釘板	高爾頓模擬	8釘6釘交錯排列	三角形
釘板			

彈珠落孔分佈圖



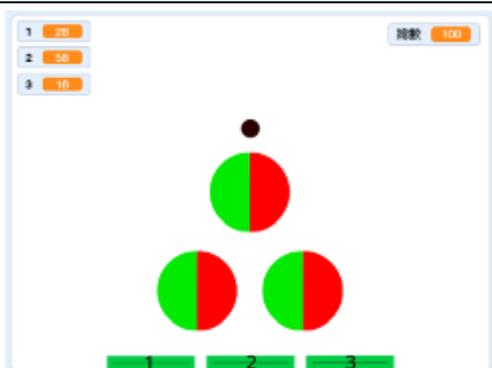
發現 2 :

- (1) 根據文獻的探討已知高爾頓釘板的設計會使彈珠集中，容易呈現中間高起的鐘形分配。
- (2) 我們驗證Galton Board(高爾頓釘版)的模擬軟體模擬100顆球落下時，其分布的鐘型分配圖來與實際DIY的彈珠台做比較。
- (3) 將彈珠固定中點彈珠落下在8釘6釘交錯的釘板中，彈珠集中落下在第4、第7彈道中，彈珠落下的分布圖接近中間的鐘型分配；而將彈珠固定中點彈珠落下在三角形的釘板中，彈珠落下彈道與我們預測的一樣；彈珠由三角形正上方的彈孔落下，碰到最上面的釘子之後，彈珠就各有一半得機會彈落到第二排的那兩個釘子之一，隨後又各有一半的機會彈落到第三排。彈珠落下的分部曲線圖更接近中間的鐘形分配。
- (4) 故我們驗證，彈珠越靠近中間落下，越容易形成中間型鐘型分配。
- (5) 由這樣的結果，我們利用Scratch編程出此現象的程式設計，為設計實體實驗結果相近的遊戲做準備。

Scratch程式編程

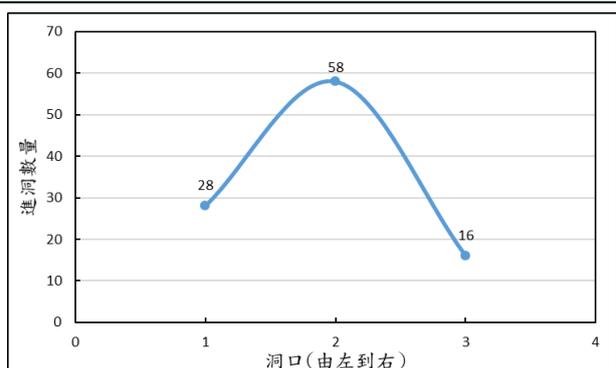
彈珠落下

程式畫面



彈珠撞擊釘子

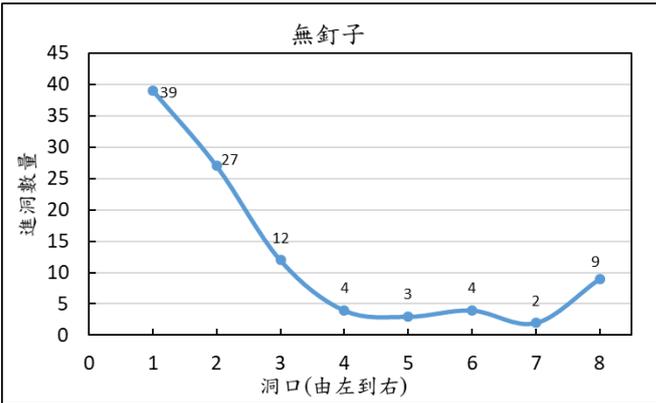
彈珠落孔分佈圖



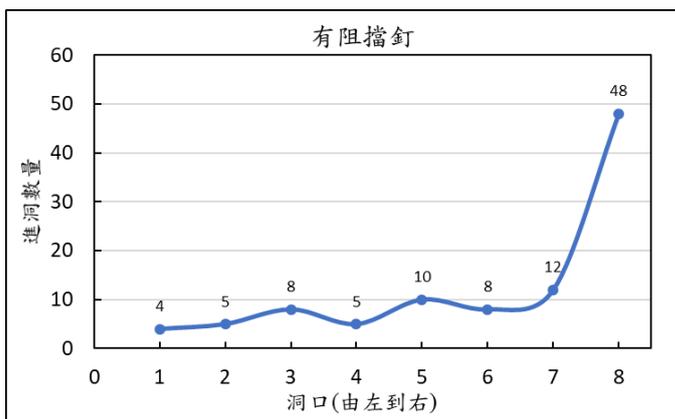
高爾頓鐘形分配

三、**探究三**：探討自製不同釘子排列之彈珠檯，彈珠落入各個孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。

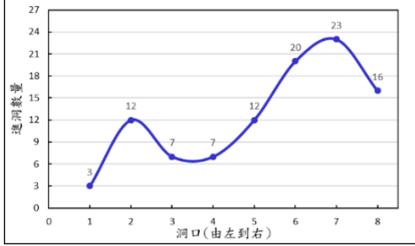
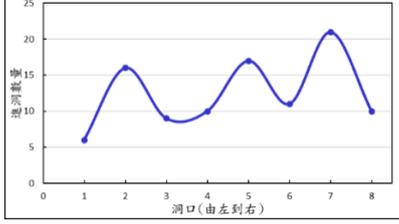
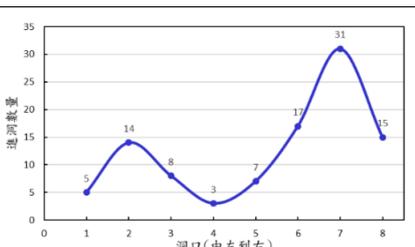
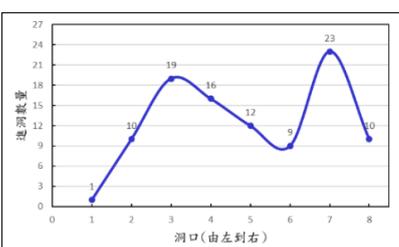
(一) **無釘釘子**下，彈珠落入孔洞分布情形

實際情況	彈珠落孔分佈圖	發現 3.1：																		
	<p style="text-align: center;">無釘子</p>  <table border="1" style="display: none;"> <caption>無釘子數據表</caption> <thead> <tr> <th>洞口(由左到右)</th> <th>進洞數量</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>39</td></tr> <tr><td>2</td><td>27</td></tr> <tr><td>3</td><td>12</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td></tr> </tbody> </table>	洞口(由左到右)	進洞數量	1	39	2	27	3	12	4	4	5	3	6	4	7	2	8	9	<p>發現 3.1：</p> <p>(1)在閱讀文獻探討後，彈珠會因為板面有釘子而影響彈珠落下的位置，所以我們先討論無釘子的狀況下，彈珠落下的情況。</p> <p>(2)實驗後發現，彈珠會沿著檔版的弧度滑落，所以幾乎落在左邊1道的位置。</p>
洞口(由左到右)	進洞數量																			
1	39																			
2	27																			
3	12																			
4	4																			
5	3																			
6	4																			
7	2																			
8	9																			

(二) **上方加阻擋釘**下，彈珠落入孔洞分布情形

實際情況	彈珠落孔分佈圖	發現 3.2：																		
	<p style="text-align: center;">有阻擋釘</p>  <table border="1" style="display: none;"> <caption>有阻擋釘數據表</caption> <thead> <tr> <th>洞口(由左到右)</th> <th>進洞數量</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>12</td></tr> <tr><td>8</td><td>48</td></tr> </tbody> </table>	洞口(由左到右)	進洞數量	1	4	2	5	3	8	4	5	5	10	6	8	7	12	8	48	<p>發現 3.2：</p> <p>(1)接續全無釘子的板面，我們再探討只在兩側上方加阻擋釘，研究彈珠落下的位置。</p> <p>(2)實驗後發現，彈珠會撞到左邊的阻釘而反彈，由於中間沒有任何釘子，所以彈珠幾乎集中在右邊的第8道落下。</p>
洞口(由左到右)	進洞數量																			
1	4																			
2	5																			
3	8																			
4	5																			
5	10																			
6	8																			
7	12																			
8	48																			

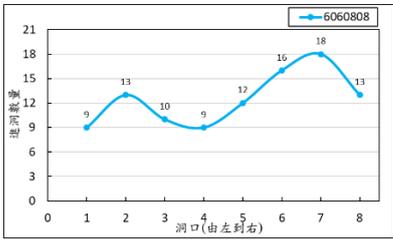
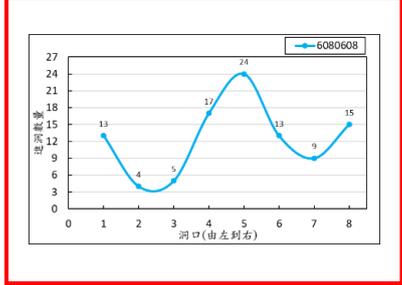
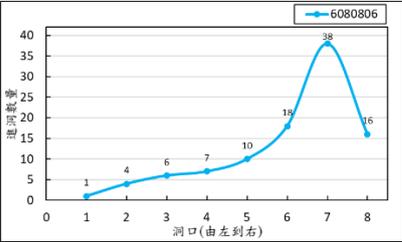
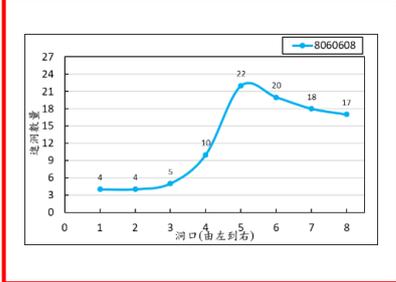
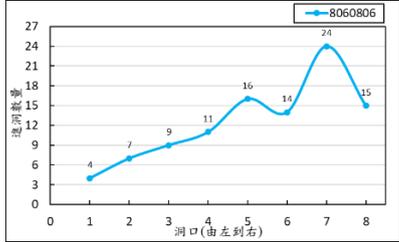
(三) 釘子排列出**不同形狀**，彈珠落入孔洞分佈情形

排列形狀	釘子位置	彈珠落孔分佈圖	排列形狀	釘子位置	彈珠落孔分佈圖																																				
三角形	 <p>間隔間距</p>	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (間隔間距)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>彈珠數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>12</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>12</td></tr> <tr><td>6</td><td>20</td></tr> <tr><td>7</td><td>23</td></tr> <tr><td>8</td><td>16</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	彈珠數	1	3	2	12	3	7	4	7	5	12	6	20	7	23	8	16	正方形	 <p>7x7</p>	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (7x7)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>彈珠數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>16</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>17</td></tr> <tr><td>6</td><td>11</td></tr> <tr><td>7</td><td>21</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	彈珠數	1	6	2	16	3	9	4	9	5	17	6	11	7	21	8	10
	洞口 (由左到右)	彈珠數																																							
1	3																																								
2	12																																								
3	7																																								
4	7																																								
5	12																																								
6	20																																								
7	23																																								
8	16																																								
洞口 (由左到右)	彈珠數																																								
1	6																																								
2	16																																								
3	9																																								
4	9																																								
5	17																																								
6	11																																								
7	21																																								
8	10																																								
	 <p>無間隔間距</p>	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (無間隔間距)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>彈珠數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>14</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>17</td></tr> <tr><td>7</td><td>31</td></tr> <tr><td>8</td><td>15</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	彈珠數	1	5	2	14	3	8	4	3	5	7	6	17	7	31	8	15		 <p>8x8</p>	 <table border="1"> <caption>彈珠落孔分佈圖 (8x8)</caption> <thead> <tr> <th>洞口 (由左到右)</th> <th>彈珠數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>19</td></tr> <tr><td>4</td><td>16</td></tr> <tr><td>5</td><td>12</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>23</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td></tr> </tbody> </table>	洞口 (由左到右)	彈珠數	1	1	2	10	3	19	4	16	5	12	6	5	7	23	8	10
洞口 (由左到右)	彈珠數																																								
1	5																																								
2	14																																								
3	8																																								
4	3																																								
5	7																																								
6	17																																								
7	31																																								
8	15																																								
洞口 (由左到右)	彈珠數																																								
1	1																																								
2	10																																								
3	19																																								
4	16																																								
5	12																																								
6	5																																								
7	23																																								
8	10																																								

發現 3.3 :

- (1)在三角形釘子的排列方式，我們分為**奇數排**(間隔一排不釘釘子)及**全排**進行實驗；在分佈圖中，彈珠在孔道4~8呈現鐘形分配圖，在孔道4是彈珠落下最少的，孔道7彈珠是落下最多的，我們推測彈珠順著三角形的斜度滑落。
- (2)在三角形釘子的排列方式，一樣是斜坡，孔道2彈珠落下的數量比孔道7少，應該是彈珠彈到左側阻擋釘而往右側滑下所致。
- (3)在正方形釘子的排列方式，我們分為**7x7排**及**8x8排**進行實驗；在分佈圖中，彈珠球數落下的曲線沒有呈現集中在中間的鐘形分配。
- (4)我們推論因為正方形的釘板是對齊排列，致使彈珠滾動時進入釘排後比較不容易碰撞其他釘子而會直直落下。

(四) 6個及8個釘子不同的排列方式，彈珠落入孔洞分布情形

釘子排列示意圖		排列	6060808	6080608
		彈珠落孔分佈圖		
排列	6080806		8060608	8060806
彈珠落孔分佈圖				

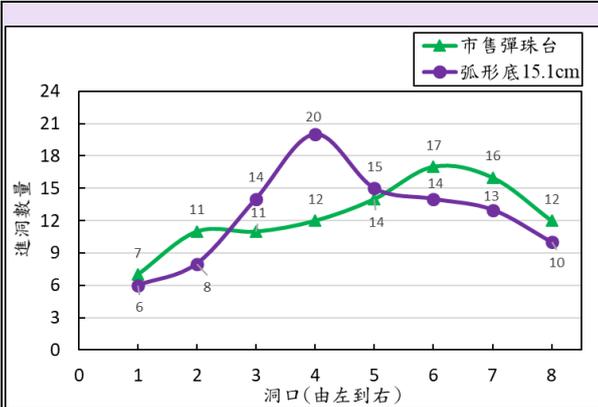
發現 3.4

- (1)依市售的釘板，共有9排，其釘子數量為8、7、6、8、7、6、6、7、8，在探究一中，我們發現市售彈珠臺的實驗分配圖接近右偏鐘形分配，我們在不改變最後一排的釘位，增加排間的距離下，改變釘子數量及排列時，進行實驗，找出符合中間型的鐘形分配圖。
- (2)實驗設計是依市售的釘板，不改變最後一排的釘位，我們增加排間的時間距離，留下第1、3、5、7排的釘位，釘子數量以6個釘子及8個釘子的交錯排列來進行實驗。
- (3)依市售的釘板，不改變最後一排的釘位，其釘子數量為6個釘子及8個釘子的五種排列釘板中，發現6080608的排列最接近集中在中間的鐘形分配圖。
- (4)以拉到底的力在原板其分配圖偏右邊，而在五個數據中，發現彈珠碰撞不同排列的釘子次數不一，導致彈珠發生不同軌跡的行進的方向而會形成中間的鐘形分配圖。
- (5)以彈珠會沿著弧度落下情形，我們猜測不同檔板弧度的設計也會影響彈珠的分佈圖。

四、**探究四**：探討彈珠檯檔板弧度與不同力道搭配，彈珠落入各個孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。

(一) 不同橢圓弧度為上方檔板弧度(以拉把拉到底的力)，彈珠落入孔洞分布情形

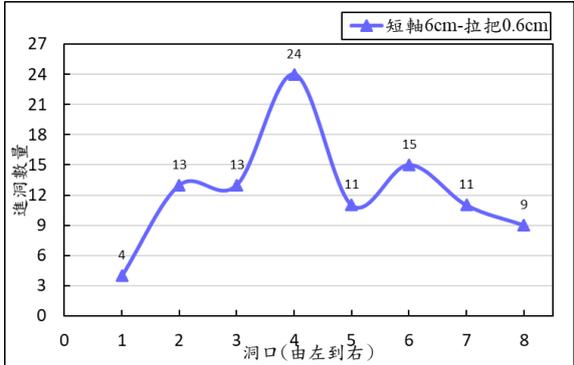
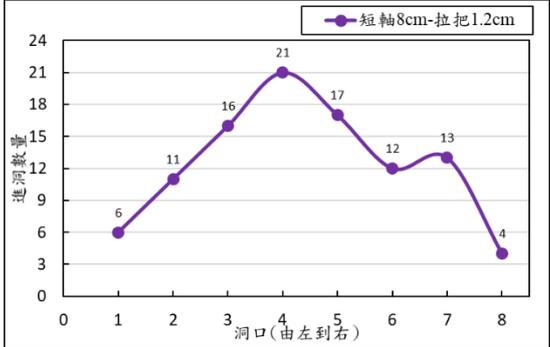
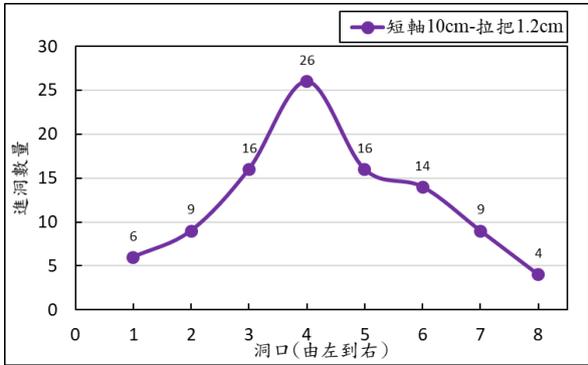
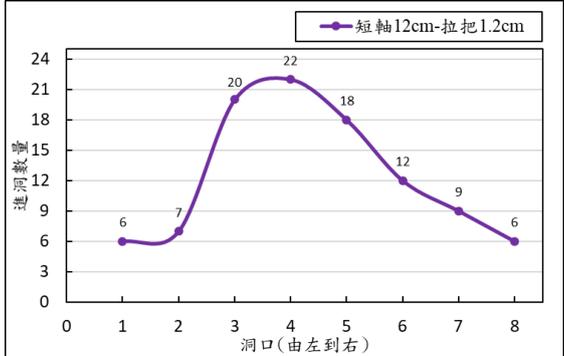
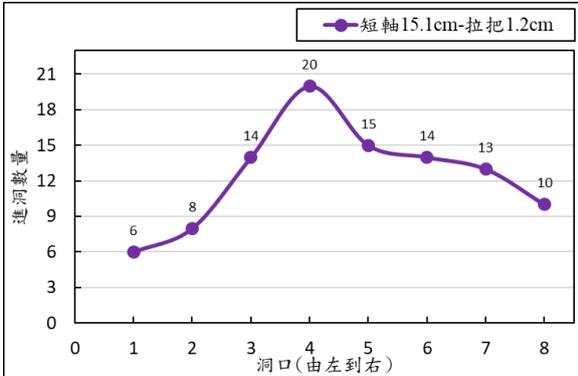
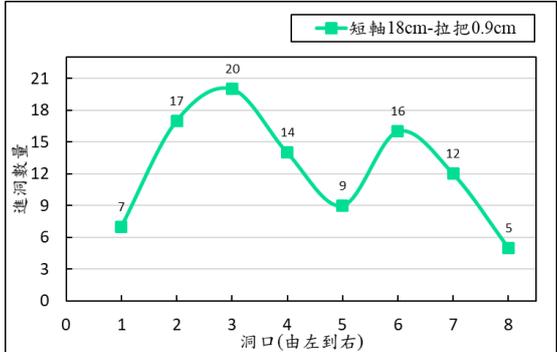
短軸 (cm)	釘板與彈珠軌跡示意圖	彈珠落孔分佈圖	短軸 (cm)	釘板與彈珠軌跡示意圖	彈珠落孔分佈圖
6			8		
10			12		
15.1			18		



發現 4.1 :

- (1)探究1-2中，我們發現彈珠發射後會沿著檔板的弧度落下而影響彈珠的落下的位置，因此我們改變檔板弧度，研究彈珠的落孔情形。
- (2)我們先將市售的弧度作圖，發現檔板是接近直徑15.1cm的圓形，所以我們先量測以直徑15.1cm的圓作出的弧，固定檔板寬度與市售的檔板相同作比較，發現彈珠落入孔洞分布情形比原弧度更接近中間型的鐘形分配圖(如左圖1)。
- (3)以橢圓形固定橫向長軸為15.1cm(彈珠檯寬度)，改變短軸的長度，用拉到底的力發現8cm、10cm、12cm、15.1cm撞到阻擋釘後接近中間落下，而分佈圖為接近中間的鐘形分配→符合彈珠越靠近中間落下，越容易形成中間的鐘型分配；而6cm與18cm分配圖偏右邊。
- (4)我們想若是結合力量的變化，將弧形擋板搭配不同力道的控制，也找出6cm與18cm符合中間型鐘形分配圖。

(二) 不同弧形檔板**搭配不同力量控制**，彈珠落入孔洞形成集中中間的鐘形分配組合

短軸 (cm)	容易形成中間鐘形分配的伸長量及分配圖	短軸 (cm)	容易形成中間型鐘形分配的伸長量及分配圖
6	<p>伸長量0.6cm</p>  <p>短軸6cm-拉把0.6cm</p>	8	<p>伸長量1.2cm</p>  <p>短軸8cm-拉把1.2cm</p>
10	<p>伸長量1.2cm</p>  <p>短軸10cm-拉把1.2cm</p>	12	<p>伸長量1.2cm</p>  <p>短軸12cm-拉把1.2cm</p>
15.1	<p>伸長量1.2cm</p>  <p>短軸15.1cm-拉把1.2cm</p>	18	<p>伸長量0.9cm</p>  <p>短軸18cm-拉把0.9cm</p>

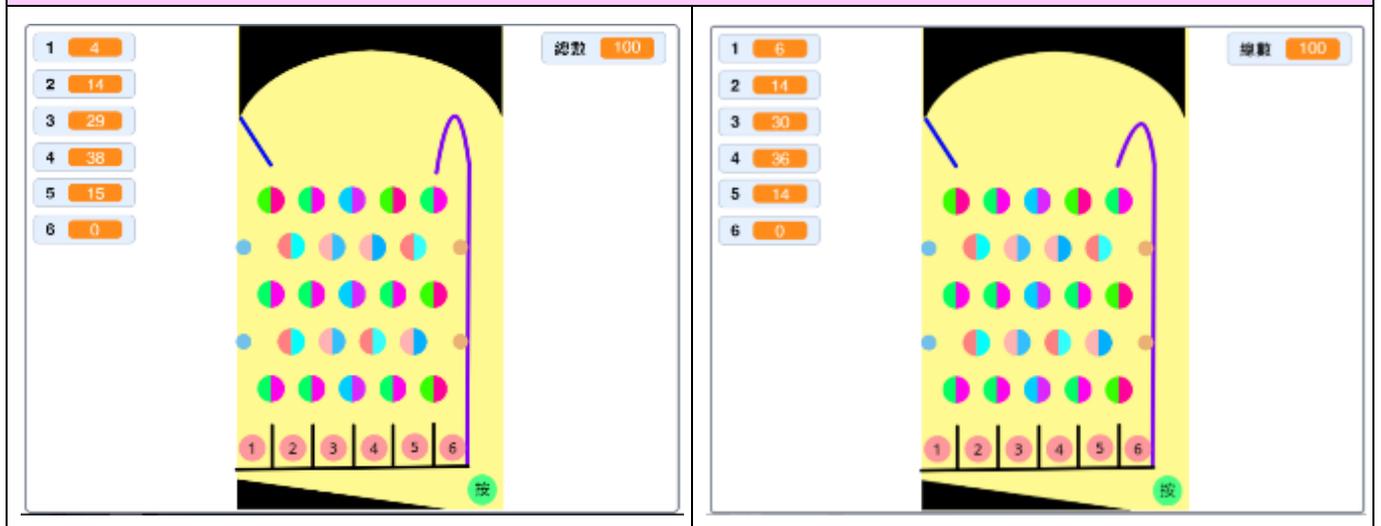
發現 4.2 :

- (1)在6種檔板弧形中，我們分別以伸長量0.6cm、0.9cm與1.2cm，進行測試找出最佳組合。
- (2)結果顯示：檔板6cm搭配伸長量0.6cm；檔板8、10、12、15.1cm搭配伸長量1.2cm。
- (3)檔板18cm搭配伸長量0.9cm會呈現雙峰分配，討論其不同伸長量彈珠沿著檔板落下的情形→推測會呈現中間型的鐘型分配在此伸長量左右。

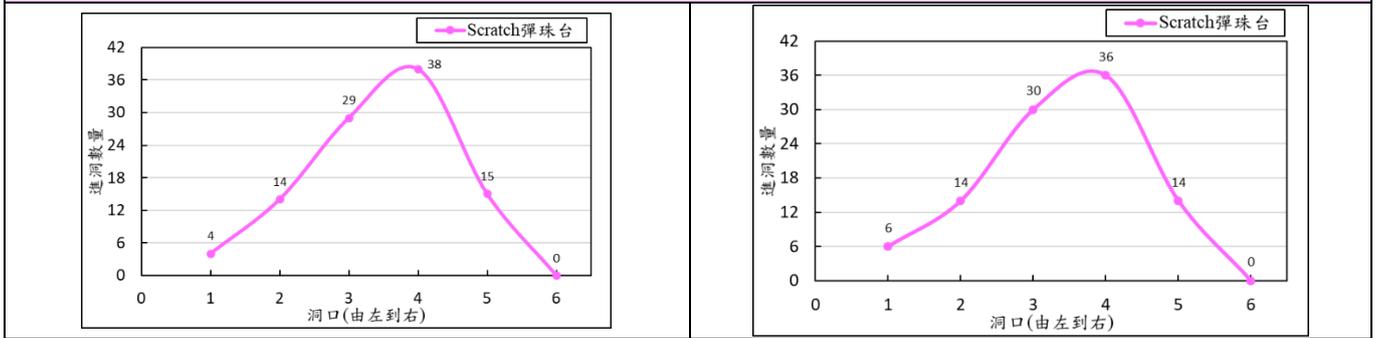
五、**探究五**：由實體彈珠台結果，以Scratch編程虛擬彈珠台。

Scratch編程		
彈珠落下	彈珠撞擊阻擋釘	彈珠撞擊釘子

程式畫面



彈珠落孔分佈圖



陸、討論

一、文獻閱讀

(一) 高爾頓釘板(Galton Board)：這項裝置上方是一個漏斗狀的容器，可將許多大小相同的小球倒入並讓其掉落。每個小球先碰到第一排釘子，繼續掉落則會碰到第二排釘子，並且碰到的機率都是 $1/2$ 。球繼續掉落，最後落入底部隔開的槽內。假若一共有 n 排釘子，各槽內的球數則服從於二項分布 $B(n, 1/2)$ ；當 n 很大時，它就接近於常態分布(如圖1所示)。



圖1-1高爾頓釘板

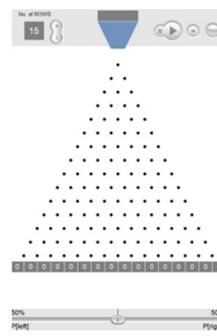


圖1-2、模擬軟體 The STATISTICAL MIND

(二) 鐘型分配圖(常態分配圖)：在閱讀的文獻中提到，在垂直面板上釘上好幾排釘子，其排列的樣式形成三角形，三角形每個位置上都有釘子 (如圖2-1)。最上面的那個釘子的正上方有個彈孔，彈珠就從彈孔落下。碰到最上面的釘子之後，彈珠就各有一半的機會彈落到第二排的那兩個釘子之一，隨後又各有一半的機會彈落到其左下或右下第三排的兩個釘子之一。依此類推，經過多次彈落，最後會落入溝槽中。根據公式算法及實驗的結果，中間溝槽的彈珠最多，往兩端則逐漸減少，其累積彈珠數與依理論所畫的常態分布曲線非常接近(如圖2-2)。

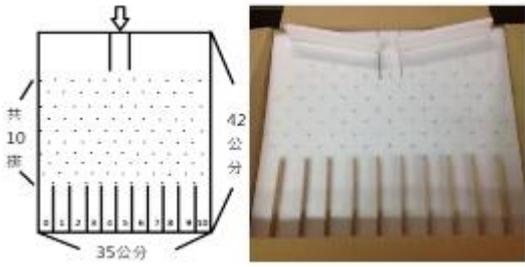


圖2-1釘板

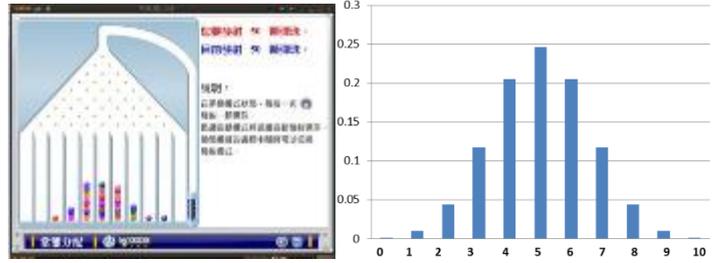


圖2-2、模擬與實際常態曲線圖

(三) 自然界、工業界及科學研究中許多資料都呈現鐘型曲線的累積分配現象，如圖3所示。資料所呈現的數值大部分會集中在中央，而數值越高或越低的出現次數會比較少，當我們將這些出現的次數累加起來，化成的曲線就會像一座鐘的形狀，這種現象所呈現的曲線圖形被稱為常態曲線或鐘型曲線圖。

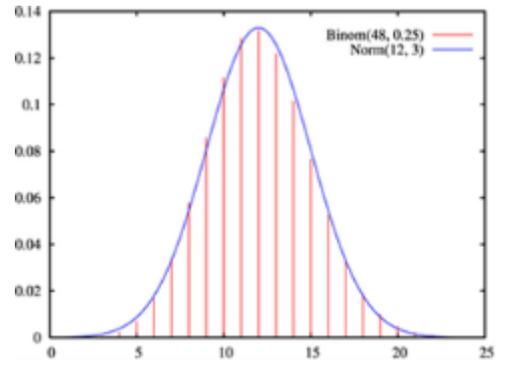
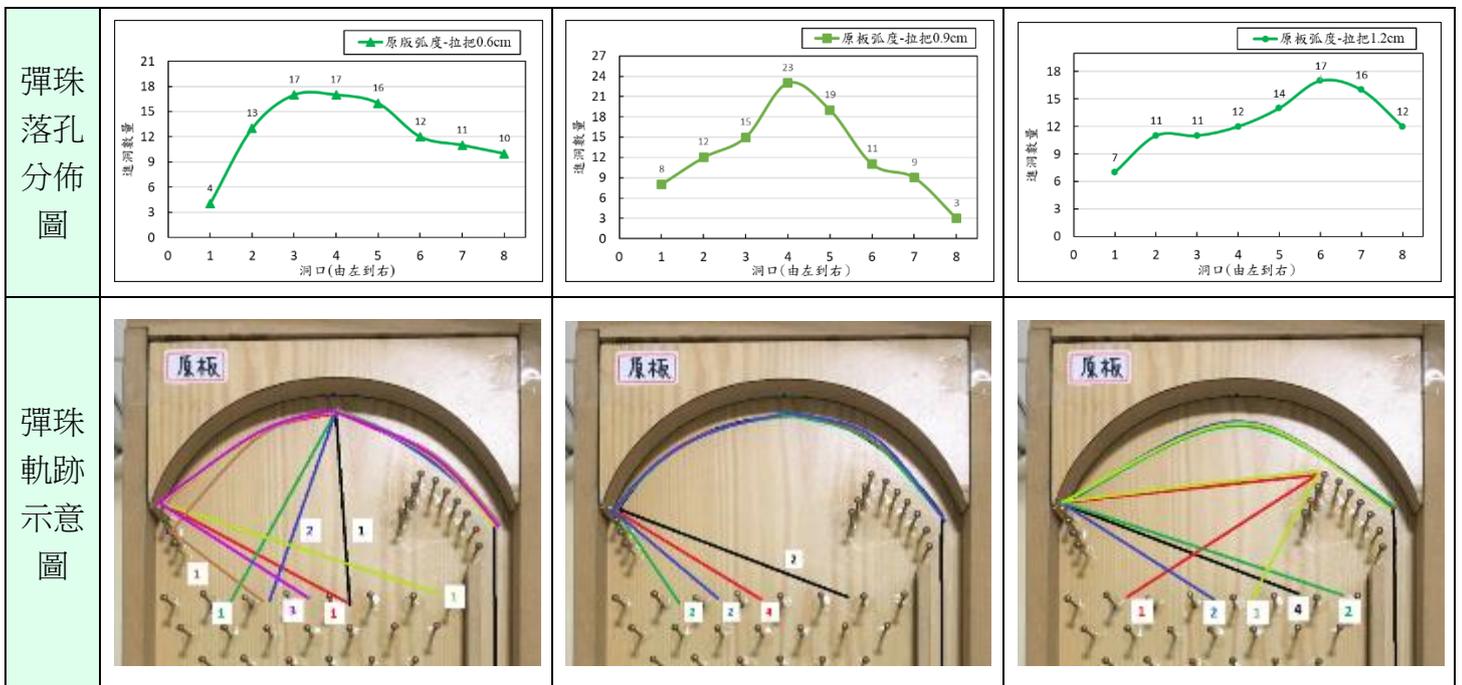


圖3 鐘型曲線

二、實驗討論

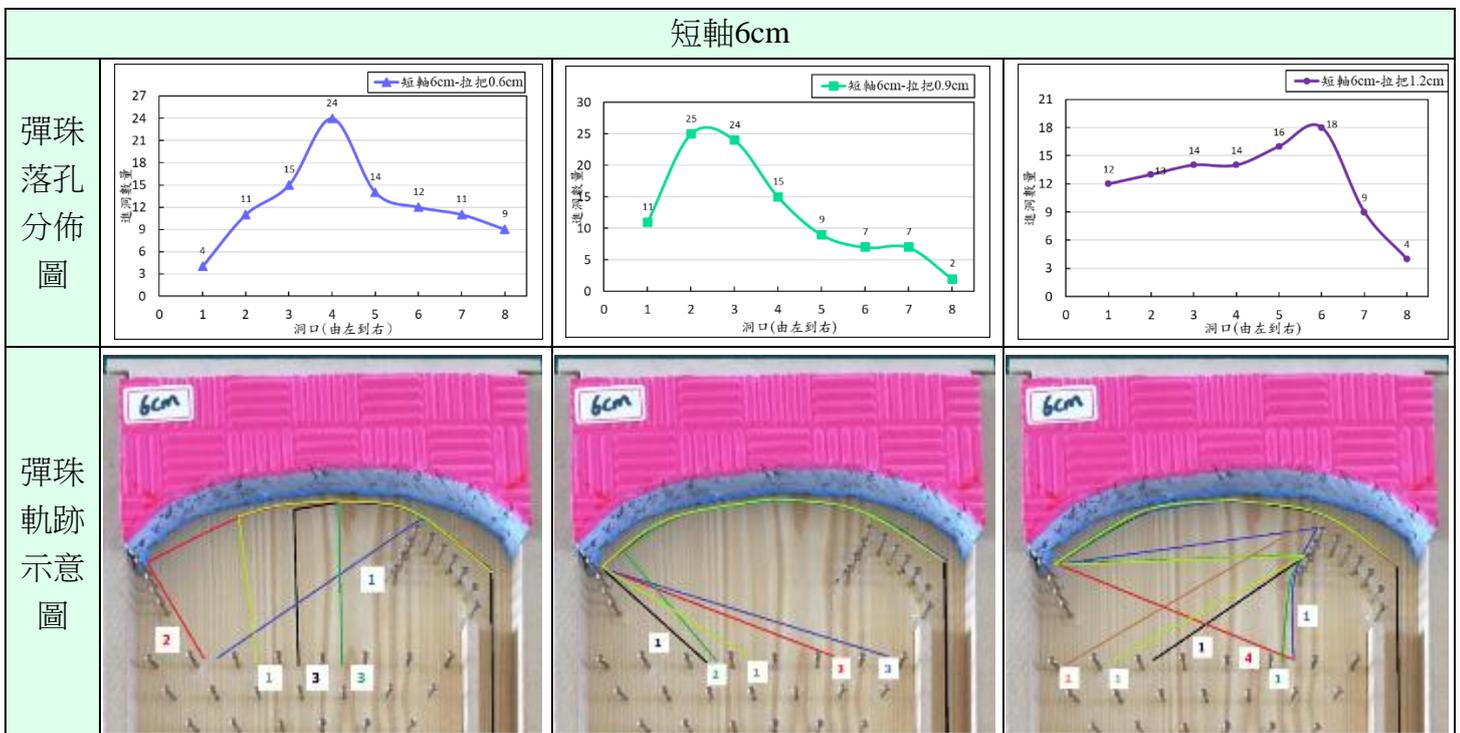
(一) 探究1-2中，DIY彈珠台不同伸長量的落孔情形，延伸討論彈珠軌跡。我們已10次彈珠台彈射畫出彈珠落孔軌跡示意圖，來討論不同伸長量時，其鐘形分配高峰位置不同的原因。



討論彈珠軌跡來研究現象呈現的原因：我們發現伸長量**0.6cm**時候，彈珠偏左側中間落下，所以對照鐘形分配圖呈現左側高台狀→推測**0.6cm**的伸長量，以彈力公式 $F=k(\Delta X)$ 可知，**拉力較小**，彈珠以軌跡圖來看，分兩種情況落下，一部分沿著擋板弧度中間落下，

另一部分撞擊到左側阻擋釘，由於力量小，所以會偏左側直接落下，呈現左側高台狀鐘型分配；伸長量0.9cm時候，彈珠集中中間落下，所以對照鐘形分配圖呈現中間尖狀→推測0.9cm的伸長量，以彈力公式 $F=k(\Delta X)$ 可知，拉力適中，彈珠以軌跡圖來看，幾乎都撞擊到左側阻擋釘，造成反作用力，所以會偏中間落下，呈現中間尖狀的鐘型分配，符合我們討論的主題；伸長量1.2cm時，彈珠偏右側落下，所以對照鐘形分配圖也呈現右偏→推測1.2cm的伸長量，以彈力公式 $F=k(\Delta X)$ 可知，拉力偏大，彈珠以軌跡圖來看，都撞擊到左側阻擋釘，造成反作用力較大，有時反作用力過大，會使彈珠又反彈，會偏右側落下，而呈現右偏的鐘型分配。

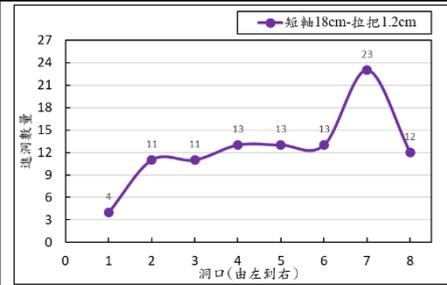
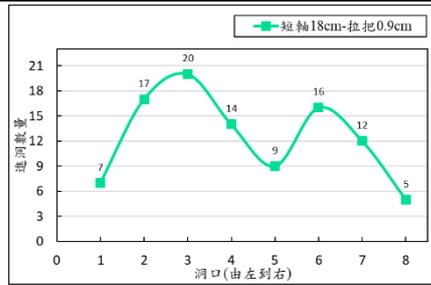
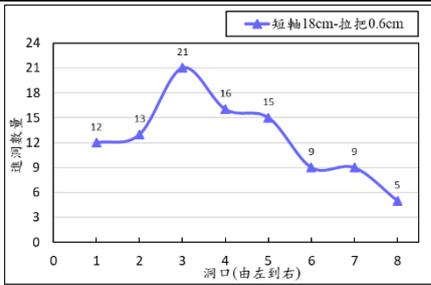
(二) 由探究四中，我們發現檔板弧度短軸6cm、18cm在拉到底的力呈現右偏，由彈珠行進路線討論此兩種短軸要搭配哪種伸長量會使之呈現中間型的鐘型分配：



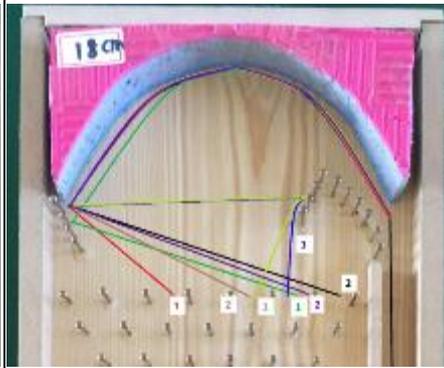
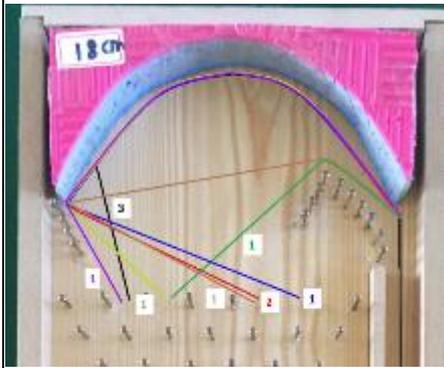
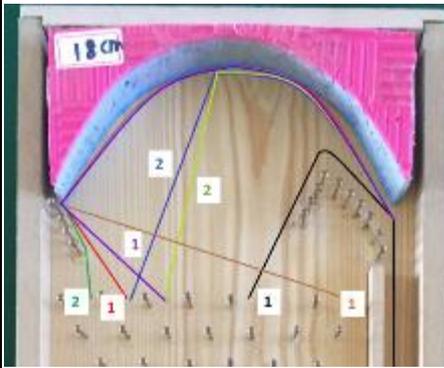
依據彈珠軌跡來討論落孔分配圖呈現的原因：檔板弧度短軸6cm中，彈珠除了沿著檔板弧度彈射，在起始碰到檔板往左方前進時，因為弧度扁平與右側阻擋釘距離較接近，故彈珠容易碰撞阻擋釘形成較大的摩擦力，在伸長量0.6cm，比較容易在弧度中間就垂直落下，呈現中間尖狀的鐘型分配；伸長量0.9cm時，此力量能使彈珠幾乎沿著檔板弧度前進到底，但因前方碰撞阻擋釘形成摩擦力，使彈珠狀及左側阻擋釘後，彈射不遠就落下，所以分配圖偏左側；伸長量1.2cm時，此力量較大能使彈珠沿著檔板弧度前進到底後容易碰撞左側阻擋釘產生反作用力而撞擊右側阻擋釘後落下，呈現偏右側平緩的鐘形分配圖。

短軸18cm

彈珠落孔分佈圖



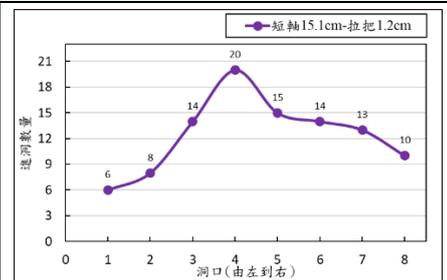
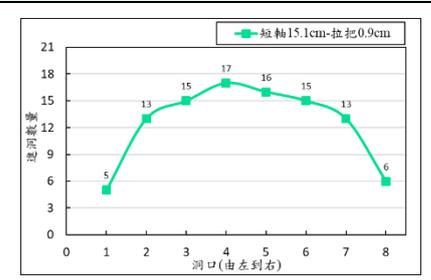
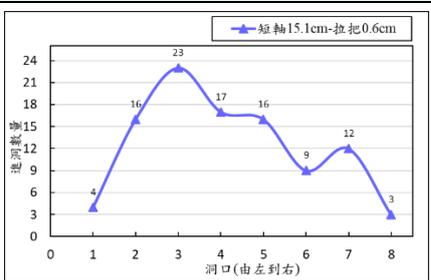
彈珠軌跡示意圖



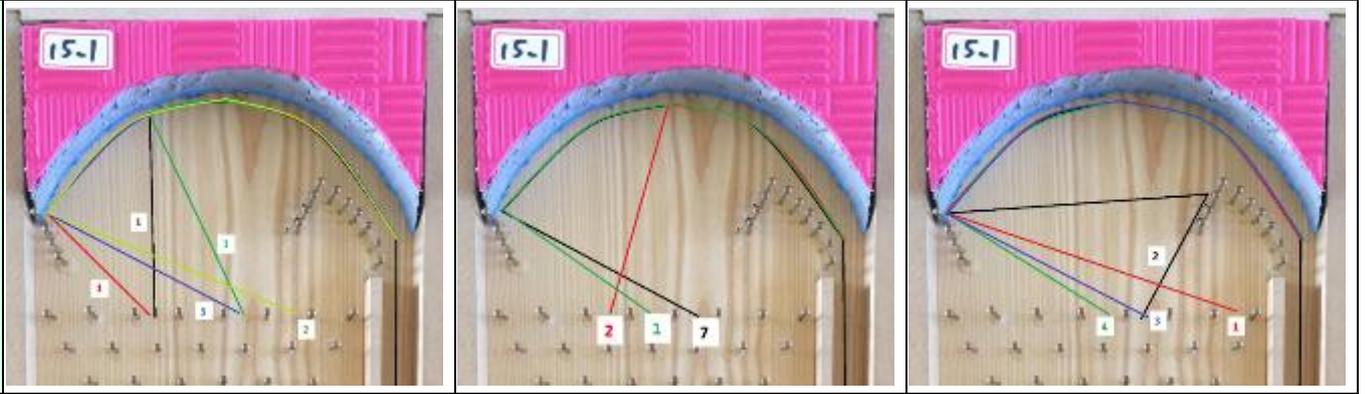
依據彈珠軌跡來討論落孔分配圖呈現的原因：檔板弧度短軸18cm中，檔板弧度較大，彈珠除了沿著檔板弧度彈射，也容易因力道不同碰撞阻擋釘，改變落入孔洞的彈道；過大的弧形檔板給予彈珠行徑路徑變化量也大，不是每一顆彈珠都會完整沿著檔板弧度走完。伸長量為0.6cm時，因為力不足，彈珠會因弧度過大無法沿著弧度前進而垂直落下，造成彈珠落孔的分配曲線偏左側；在1.2cm伸長量發現，力量大加上檔板弧度大會使彈珠彈射比較遠，而分配圖偏右側；而伸長量為0.9cm觀察彈道行進方分兩部分，一部分因為弧度大彈珠沒有走到底於左側落下，另一部分是撞到阻擋釘彈射到右側而呈現雙峰狀的鐘形分配圖，故我們推測在伸長量0.9cm附近，有力量適中呈現中間的鐘形分配圖。

短軸15.1cm

彈珠落孔分佈圖



彈珠軌跡示意圖



(三) 根據原檔板試算後發現弧度接近直徑15.1cm的圓，再用厚地墊製作出類似的弧形檔板，進行實驗。原檔板實驗後符合中間型的鐘形分配圖其伸長量為0.9cm，在自製檔板中發現明顯符合中間型的鐘形分配圖卻是伸長量為1.2cm。藉由觀察彈珠軌跡，在自製的檔板中我們推測伸長量為0.9cm~1.2cm皆能呈現中間型的鐘形分配圖。

觀察比較後我們推測有幾點原因使得分配圖不一致：檔板材質、弧形平整性。

(四) 探究三中，無釘板面彈珠會因為上方檔板的弧度，彈珠落下的彈道只單偏於左方，而在上方加阻釘的板面，彈珠會因為撞擊到左方的阻擋釘而使落下的彈道只單偏於右方。在下方有釘子的情形，釘子的間距是否影響彈珠落下的位置？改變釘子排列形狀是否符合會成鐘形分配？數據分析是否有特殊狀況？

釘子的間距是否影響彈珠落下的位置？

釘子間隔間距大彈珠落下的位置差異變化性多，間隔間距小的板面，彈珠集中進洞次數比較多，數據分析圖表較容易呈現出鐘型分配。

改變釘子排列形狀是否符合中間型鐘形分配？

三角形的釘子分布依據Galton Board(高爾頓釘版)的位置，若彈珠集中在中間落下，較符合中間型鐘型曲線圖。

數據分析是否有特殊狀況？

板面設計中我們以6、8個釘子設計5種排列，發現彈珠滾動軌跡及落下彈道較多趨向於右邊，是因為我們用拉到底的力進行彈射，以及撞擊阻擋釘後產生反作用力使分配圖多呈現右偏。所以在不同設計的弧形檔板可能也會影響彈珠掉落的情形。

柒、結論

- 一、在手機APP彈珠台(虛擬實驗)及市售DIY彈珠台(實體實驗)的比較實驗中，在彈珠顆數固定的條件下，想要每一排都打進的機會不大；若想要刻意打中其中某一排也很難，**控制力道**就是一大因素。在虛擬實驗中，手機APP彈珠台在2~6格力中，以**中間的力(3格、4格)**符合我們討論的鐘型分配；力量格少偏左邊，力量格多偏右邊。**在DIY彈珠檯中結果與手機APP的相符**，伸長量小偏右邊，伸長量大偏左邊，**中間的伸長量**符合所討論的鐘型分配。
- 二、以文獻高爾頓釘板的設計，來應用在DIY彈珠檯上(拉倒底的力偏右分配)，限制彈珠由中間落下，發現可以與文獻相符，為中間的鐘形分配；利用Scratch設計程式，我們可以編程出這樣的結果。
- 三、在自製不同釘子排列中，以6釘、8釘交錯，不改變最後一排釘位，其中**6080608**的排列最接近集中在中間的鐘形分配圖。
- 四、當彈珠在平面上做等速度運動時，彈珠行進的軌跡為直線前進；但是彈珠台並非是平面直線的彈道設計，彈珠檯面上檔板做弧形設計的彈道，使彈珠在滾動的過程中，因彈射沿著弧形彈道而產生位移的改變(如圖4所示)。
- 五、以橢圓形固定橫向長軸為15.1cm(彈珠檯寬度)，改變短軸的長度，用**拉到底的力**發現**8cm、10cm、12cm、15.1cm**撞到阻擋釘後接近中間落下，而分佈圖為接近中間的鐘型分配→符合彈珠**越靠近中間落下，越容易形成中間的鐘形分配**；而6cm與18cm分配圖偏右邊。
不同弧形檔板**搭配不同力量控制**，彈珠落入孔洞最容易形成集中中間的鐘形分配組合：檔板**6cm**搭配伸長量**0.6cm**；**檔板8、10、12、15.1cm**搭配伸長量**1.2cm**。檔板18cm搭配伸長量約0.9cm。
- 六、固定檔板弧形寬度(長軸)，改變短軸，不同短軸的檔板形成不同角度的弧形彈道，彈珠會沿著弧形彈道前進。當短軸越小，彈道的角度越大，彈珠的入射角小，撞擊阻擋釘後反射角也變小，藉由不同拉把伸長量可以在不同檔板弧度控制彈珠落孔的分配情形。
- 七、以Scratch設計能出符合我們實驗結果的彈珠檯遊戲，設計深入淺出的遊戲，學習透過科學、推理的計算，讓我們成為致勝王。
- 八、未來展望



圖4彈珠弧形彈道

- 1.能以實驗情形在實際的情況下遊戲：由設計的遊戲彈珠檯在園遊會時就可以實際的遊玩，體驗夜市老闆賺錢的秘密。
- 2.彈珠檯檔板的材質及弧形平整性：在探究四中，原檔板與自製檔板所呈現出的落孔分布並不一致，故在自製檔板材質、切割後弧的平整性我們可以再進行延伸探究。
- 3.彈珠檯機電整合：將編寫的程式結合實際機台，在虛擬軟體中呈現實際的情形，並將結果統計及繪圖。

彈珠檯遊戲是台灣夜市一大特色，是大、小朋友的最愛，老闆們事先『用心』，玩家當下『專心』，贏家最後『開心』。

我們從無到有DIY組裝完整的彈珠檯，由虛擬實驗配合所組裝的彈珠檯依序完成實體實驗，設計出符合實體情形的彈珠檯程式。在實驗的過程要重覆多次擲彈珠且反覆紀錄結果的過程，無聊乏味，但實驗後我們運用EXCEL作圖及分析，進階使用Scratch積木程式打造出擬真的夜市彈珠檯，增添了我們不同的思考探究層面。

希望未來所設計出的彈珠檯結合機電應用，軟體跟機台能互相搭配，做進一步研究。

捌、參考資料及其他

- 1.吳冠諺(2018)•輪盤遊戲-夜市老闆背後的秘密•中華民國第59屆中小學科學展覽會。
- 2.二項分佈彈珠台機率•取自
http://phet.colorado.edu/sims/plinko-probability/plinko-probability_zh_TW.htm
- 3.巴斯卡三角之圖例•取自
<http://www.skhsbs.edu.hk/math/inmath2/inmath2.files/mathematician.files/pascal.html>
- 4.林坤樑•由高三主題式活動：「數學實驗－利用彈珠台學機統」談起。
- 5.彈珠台的秘密•臺北市第41屆中小學科學展覽會。取自
http://xn--djrpts8e06givco05g1ku.tw/news/u_news_v2.asp?id=%7BCAABEF6D-DC36-7A17-8FE7-A0D900FB9B88%7D&newsid=1894&PageNo=1&keyword=

【評語】 082802

本作品取材彈珠台遊戲，以科學的方法探討彈珠在不同情況下的落點分布，實驗控制的變因包括不同力量、不同擋板弧度與不同釘子排列的狀況下，依據實驗結果統計彈珠的落點，發現彈珠越靠近中間落下，越容易形成中間型的鐘形分布，作品分析比較各種狀況的可能原因，符合科學研究的精神，最後將實驗獲得的結果應用在自製的彈珠台遊戲，值得鼓勵。對於部分實驗結果呈現不是預期的鐘形分布，建議可以再做深入的討論，或許可由增加實驗次數，或是消除異常的情況，例如有些釘子彎曲了，可能影響落點等等，讓實驗的結果更具說服力。

摘要

彈珠撞擊釘子的運動方向與四年級力與運動的課程相關結合五年級的資訊課Scratch的程式，將實體的運動方式，以虛擬的程式呈現。我們發展多元釘板的彈珠檯，以便於觀察與討論彈珠在受力後運動的情形。實驗中藉由牛頓運動定律改變檔板弧度、彈珠彈射力道等變因來操控彈珠的方向，設計五種不同弧形檔板；利用彈力公式，彈簧在不同伸長量會產生不同的力，找出最佳的中間型鐘形分配圖。

以我們現今最方便的手機彈珠檯遊戲切入，再進行實體的探究。我們先以文獻的討論，了解彈珠的落孔情形，進而分析、比較彈珠的進洞機率，以研究中間型鐘形分配為主，改變釘子排列與檔板的弧度配合不同的力量找出符合實驗期望模式，再以Scratch依探究結果設計出彈珠檯遊戲。

壹 研究動機

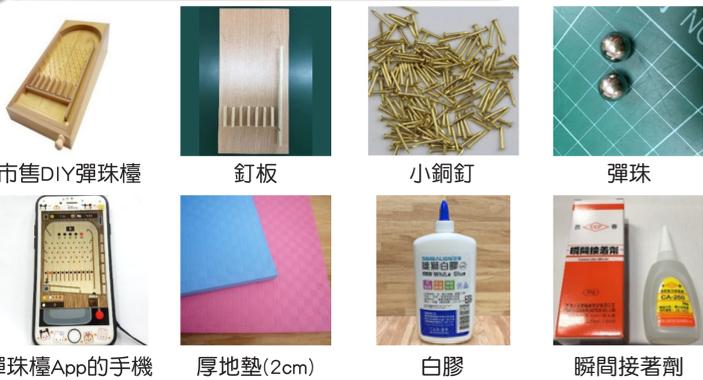
每次去逛夜市或是園遊會擺攤，就一定看到彈珠檯的攤位，彈珠檯是不論任何年齡都會喜歡玩的機台，也是我們的父母親小時候的童年。在玩彈珠台時，發現球幾乎每次都掉到中間，然而中間又是最少分數的，因此吸引了我的好奇心，讓我們開始了這次的研究。

到底要如何獲得更多的彈珠，是否跟上面的釘子有關呢？還是有其他影響彈珠掉落的因素，吸引我們想要更深入地去探究。我們在手機APP找到彈珠檯遊戲，由虛擬實驗到實體操作，自己DIY組裝一個完整的彈珠台，並利用自己裝的彈珠台運用四年級所學彈力的知識延伸學習，依序完成所有實驗並且紀錄實驗過程，分析數據並整理成實驗報告，利用組裝的彈珠檯找到不同彈珠落孔情形，結合我們五年級資訊課程Scratch積木程式，編程出我們的彈珠台遊戲，讓所有喜歡彈珠台遊戲的同學一起用我們設計的彈珠台來玩遊戲。

貳 研究目的

- 01 觀察手機App與實體彈珠檯遊戲，以不同的力彈射彈珠，落入各孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。
- 02 由高爾頓模擬鐘形分配與實體的情形，再以Scratch編程。
- 03 探討自製不同釘子排列之彈珠檯，彈珠落入各球洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。
- 04 探討彈珠檯檔板弧度與不同力道搭配，彈珠落入各孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。
- 05 由實體彈珠台結果，以Scratch編成虛擬彈珠台。

參 研究設備及器材



肆 研究過程及方法

一、實驗設計說明

為了讓遊戲程式編寫出的彈珠檯符合實際情況的彈珠檯，我們研究實體彈珠檯收集數據，找到最符合中間型鐘形分配情況。我們請木材行幫我們切割與市售DIY的彈珠檯相同的底板，自行設計釘子釘的位置。由實驗結果討論出，由彈珠落入球洞位置分配，找出最符合中間型的鐘形分配進而用Scratch設計彈珠檯遊戲。

探究一 手機App彈珠檯遊戲與市售DIY彈珠檯的比較

- 1 手機App彈珠檯遊戲比較不同力量格各彈射100顆彈珠，比較彈珠落孔分布情形
- 2 以市售DIY彈珠檯，不同拉把伸長量，各彈射100顆彈珠，比較彈珠落孔分布情形
- 3 app遊戲與實際實驗的差異探討

探究二 高爾頓釘板的鐘形分配

- 1 高爾頓模擬100個彈珠落孔情形
- 2 實體彈珠台控制一個彈珠落下，彈射100個彈珠，落孔分配情形
- 3 以Scratch程式編程高爾頓模擬100個彈珠落孔情形

探究三 釘子排列不同的比較

- 1 光滑面、有阻擋釘的板子各彈射100個彈珠，比較落孔差異
- 2 釘子排列圖形，各彈射100個彈珠比較落孔差異
- 3 不同數量釘子交錯排列，各彈射100個彈珠比較落孔差異
- 4 比較探討是否符合鐘形分配圖

探究四 市售釘板改變檔板弧度與力量比較

- 1 市售釘板改變上方檔板弧度。以橢圓弧度，長軸為市售彈珠檯寬，改變短軸取橢圓弧度，各彈射100個彈珠比較落孔差異
- 2 不同檔板弧度，搭配不同的拉把伸長量，各彈射100個彈珠比較落孔差異
- 3 不同檔板弧度與不同力量，找出最符合中間鐘形分配的組合

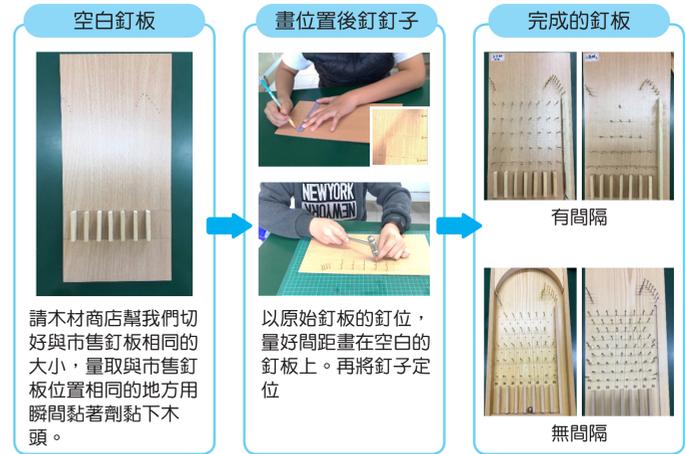
探究五 以scratch依探究結果編程出遊戲彈珠台

二、測定方法

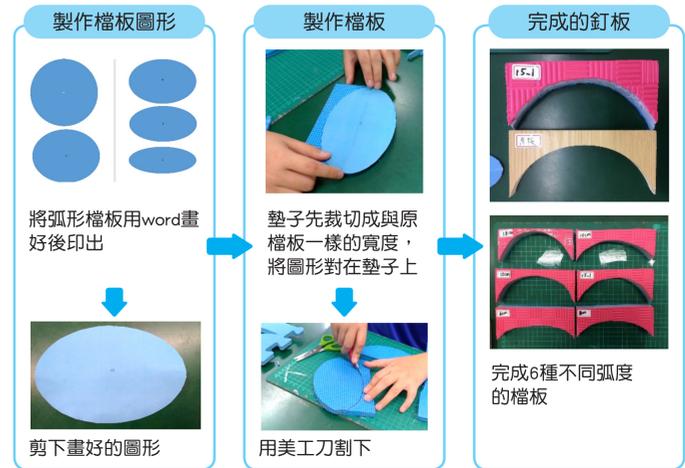
1 手機app彈珠檯遊戲與DIY彈珠檯



2 釘板釘子排列



3 檔板製作



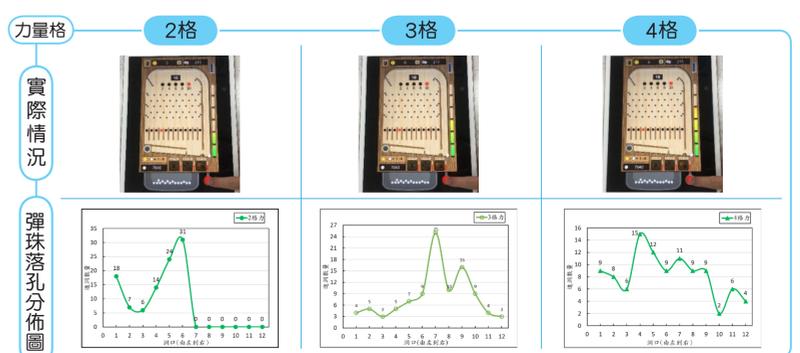
三、實驗流程



伍 研究結果

探究一 觀察手機App與實體彈珠檯遊戲，以不同的力彈射彈珠，落入各孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。

1.1 手機App不同力量格，彈珠落入各個孔洞的分布情形



力量格 5格 6格

實際情況

彈珠落孔分佈圖

發現 1.1

(1) 用手機APP模擬彈珠台，發現力量格越少偏向左偏的鐘形分配；而力量格越多，偏向右偏的鐘形分配；中間格數的力會呈現中間的鐘形分配，符合我們討論的鐘形分配。

發現 3.3

(1) 在三角形釘子的排列方式，我們分為**奇數排**(間隔一排不釘釘子)及**全排**進行實驗；在分佈圖中，彈珠在孔道4-8呈現鐘形分配圖，在孔道4是彈珠落下最少的，孔道7彈珠是落下最多的，我們推測彈珠順著三角形的斜度滑落。

(2) 在三角形釘子的排列方式，一樣是斜坡，孔道2彈珠落下的數量比孔道7少，應該是彈珠彈到左側阻擋釘而往右側滑下所致。

(3) 在正方形釘子的排列方式，我們分為**7x7排**及**8x8排**進行實驗；在分佈圖中，彈珠球數落下的曲線沒有呈現集中在中間的鐘形分配。

(4) 我們推論因為正方形的釘板是對齊排列，致使彈珠滾動時進入釘排後比較不容易碰撞其他釘子而會直直落下。

3.4 6個及8個釘子不同的排列方式，彈珠落入孔洞分布情形

釘子排列示意圖

6060808 **6080608**

彈珠落入孔洞分配圖

6080806 **8060608** **8060806**

彈珠落入孔洞分配圖

發現 3.4

(1) 依市售的釘板，共有9排，其釘子數量為8、7、6、8、7、6、6、7、8，在探究一中，我們發現市售彈珠檯的實驗分配圖接近右偏鐘形分配，我們在不改變最後一排的釘位，增加排間的距離，改變釘子數量及排列時，進行實驗，找出符合中間型的鐘形分配圖。

(2) 實驗設計是依市售的釘板，不改變最後一排的釘位，我們增加排間的距離，留下第1、3、5、7排的釘位，釘子數量以6個釘子及8個釘子的交錯排列來進行實驗。

(3) 依市售的釘板，不改變最後一排的釘位，其釘子數量為6個釘子及8個釘子的五種排列釘板中，發現**6080608**的排列最接近集中在中間的鐘形分配圖。

(4) 以拉到底的力在原板其分配圖偏右邊，而在五個數據中，發現彈珠碰撞不同排列的釘子次數不一，導致彈珠發生不同軌跡的行進的方向而會形成中間的鐘形分配圖。

(5) 以彈珠會沿著弧度落下的情形，我們猜測不同檔板弧度的設計也會影響彈珠的分佈圖。

探究四 探討彈珠檯檔板弧度與不同力道搭配，彈珠落入各個孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。

4.1 不同橢圓弧度為上方檔板弧度(以拉把拉到底的力)，彈珠落入孔洞分布情形

短軸 (cm) 6 8 10 12 15.1 18

釘板與彈珠軌跡示意圖 **彈珠落孔分佈圖**

釘板與彈珠軌跡示意圖 **彈珠落孔分佈圖**

發現 4.1

(1) 探究1-2中，我們發現彈珠發射後會沿著檔板的弧度落下而影響彈珠的落下的位置，因此我們改變檔板弧度，研究彈珠的落孔情形。

(2) 我們先將市售的弧度作圖，發現檔板是接近直徑15.1cm的圓形，所以我們先量測以直徑15.1cm的圓作出的弧，固定檔板寬度與市售的檔板相同作比較，發現彈珠落入孔洞分布情形比原弧度更接近中間型的鐘形分配圖(如左圖)。

(3) 以橢圓形固定橫向長軸為15.1cm(彈珠檯寬度)，改變短軸的長度，用拉到底的力發現8cm、10cm、12cm、15.1cm撞到阻擋釘後接近中間落下，而分佈圖為接近中間的鐘形分配→符合彈珠越靠近中間落下，越容易形成中間的鐘形分配；而6cm與18cm分配圖偏右邊。

(4) 我們想若是結合力量的變化，將弧形檔板搭配不同力道的控制，也找出6cm與18cm符合中間型鐘形分配圖。

4.2 不同弧形檔板搭配不同力量控制，彈珠落入孔洞形成集中中間的鐘形分配組合

短軸 (cm) 6 8 10 12 15.1 18

容易形成中間鐘形分配的伸長量及分配圖

發現 4.2

(1) 在6種檔板弧形中，我們分別以伸長量0.6cm、0.9cm與1.2cm，進行測試找出最佳組合。

(2) 結果顯示：檔板6cm搭配伸長量0.6cm；檔板8、10、12、15.1cm搭配伸長量1.2cm。

(3) 檔板18cm搭配伸長量0.9cm會呈現雙峰分配，討論其不同伸長量彈珠沿著檔板落下的情形→推測會呈現中間型的鐘形分配在此伸長量左右。

1.2 市售DIY彈珠台不同伸長量，彈珠落入各個孔洞的分布情形

伸長量 0.6cm 0.9cm 1.2cm(拉到底)

實際情況

彈珠落孔分佈圖

發現 1.2

(1) 根據彈力公式 $F=k(\Delta X)$ ，其中彈力 F 與伸長量 ΔX 成正比。故我們可由改變拉把的伸長量長度來定義彈力大小，當伸長量比較長時，彈力比較大；而伸長量比較短時，彈力比較小。

(2) 發現力量小會偏左邊，力量大會偏右邊→依據結果推論力量能夠控制彈珠落下孔洞的位置。

探究二 由高爾頓模擬鐘形分配與實體的情形，再以Scratch編程。

釘板 高爾頓模擬 8釘6釘交錯排列 三角形

釘板

彈珠落孔分佈圖

發現 2

(1) 根據文獻的探討已知高爾頓釘板的设计會使彈珠集中，容易呈現中間高起的鐘形分配。

(2) 我們驗證Galton Board(高爾頓釘板)的模擬軟體模擬100顆球落下時，其分布的鐘型分配圖來與實際DIY的彈珠台做比較。

(3) 將彈珠固定中點彈珠落下在8釘6釘交錯的釘板中，彈珠集中落下在第4、第7彈道中，彈珠落下的分布圖接近中間的鐘形分配；而將彈珠固定中點彈珠落下在三角形的釘板中，彈珠落下彈道與我們預測的一樣；彈珠由三角形正上方的彈孔落下，碰到最上面的釘子之後，彈珠就各有一半有機會彈落到第二排的那兩個釘子之一，隨後又各有一半的機會彈落到第三排。彈珠落下的分部曲線圖更接近中間的鐘形分配。

(4) 故我們驗證，彈珠越靠近中間落下，越容易形成中間型鐘形分配。

(5) 由這樣的結果，我們利用Scratch編程出此現象的程式設計，為設計實體實驗結果相近的遊戲做準備。

Scratch程式編程

高爾頓鐘形分配

探究三 探討自製不同釘子排列之彈珠檯，彈珠落入各個孔洞的分布情形找出符合中間的鐘形分配。

3.1 無釘釘子下，彈珠落入孔洞分布情形

實際情況 **彈珠落孔分佈圖**

發現 3.1

(1) 在閱讀文獻探討後，彈珠會因為板面有釘子而影響彈珠落下的位置，所以我們先討論無釘子的狀況下，彈珠落下的情況。

(2) 實驗後發現，彈珠會沿著檔板的弧度滑落，所以幾乎落在左邊1道的位置。

3.2 上方加阻擋釘下，彈珠落入孔洞分布情形

實際情況 **彈珠落孔分佈圖**

發現 3.2

(1) 接續全無釘子的板面，我們再探討只在兩側上方加阻擋釘，研究彈珠落下的位置。

(2) 實驗後發現，彈珠會撞擊到左邊的阻擋釘而反彈，由於中間沒有任何釘子，所以彈珠幾乎集中在右邊的第8道落下。

3.3 釘子排列出不同形狀，彈珠落入孔洞分布情形

釘子位置 **彈珠落入孔洞分配圖**

釘子位置 **彈珠落入孔洞分配圖**

排列形狀：三角形

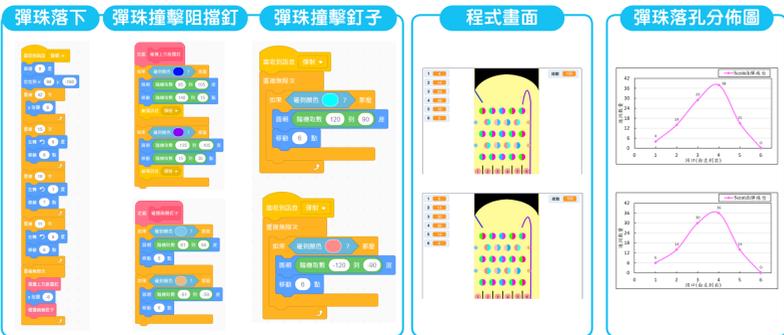
間隔間距 無間隔間距

排列形狀：正方形

7x7 8x8

探究五 由實體彈珠台結果，以Scratch編程虛擬彈珠台。

Scratch程式編程



陸 討論

一、文獻閱讀

(一) 高爾頓釘板(Galton Board)：這項裝置上方是一個漏斗狀的容器，可將許多大小相同的小球倒入並讓其掉落。每個小球先碰到第一排釘子，繼續掉落則會碰到第二排釘子，並且碰到的機率都是 1/2。球繼續掉落，最後落入底部隔開的槽內。假若一共有 n 排釘子，各槽內的球數則服從於二項分布 $B(n, 1/2)$ ；當 n 很大時，它就接近於常態分布(如圖1所示)。

圖1-1高爾頓釘板

圖1-2、模擬軟體 the STATISTICAL MIND

(二) 鐘型分配圖(常態分配圖)：在閱讀的文獻中提到，在垂直面板上釘上好幾排釘子，其排列的樣式形成三角形，三角形每個位置上都有釘子(如圖2-1)。最上面的那個釘子的正上方有個彈孔，彈珠就從彈孔落下。碰到最上面的釘子之後，彈珠就各有一半的機會彈落到第二排的那兩個釘子之一，隨後又各有一半的機會彈落到其左下或右下第三排的那兩個釘子之一。依此類推，經過多次彈落，最後會落入溝槽中。根據公式算法及實驗的結果，中間溝槽的彈珠最多，往兩端則逐漸減少，其累積彈珠數與依理論所畫的常態分布曲線非常接近(如圖2-2)。

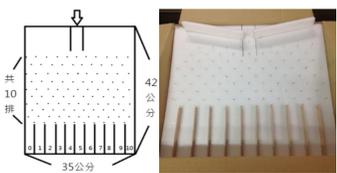


圖2-1釘板

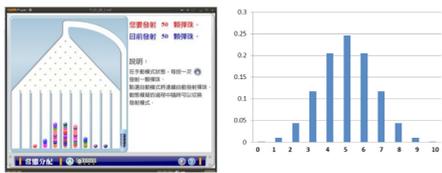


圖2-2、模擬與實際常態曲線圖

(三) 自然界、工業界及科學研究中許多資料都呈現鐘型曲線的累積分配現象，如圖3所示。資料所呈現的數值大部分會集中在中央，而數值越高或越低的出現次數會比較少，當我們將這些出現的次數累加起來，化成的曲線就會像一座鐘的形狀，這種現象所呈現的曲線圖形被稱為常態曲線或鐘型曲線圖。

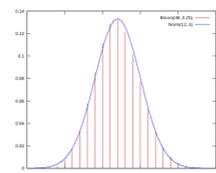
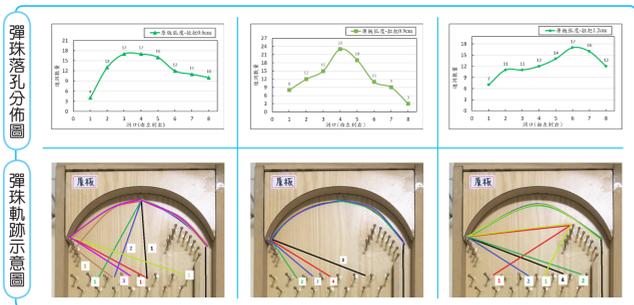


圖3 鐘型曲線

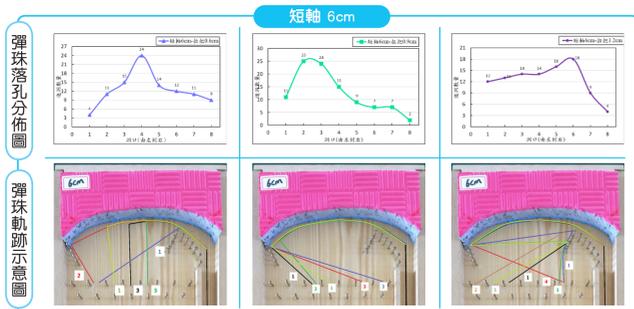
二、實驗討論

(一) 探究1-2中，DIY彈珠台不同伸長量的落孔情形，延伸討論彈珠軌跡。我們已10次彈珠台彈射畫出彈珠落孔軌跡示意圖，來討論不同伸長量時，其鐘形分配高峰位置不同的原因。

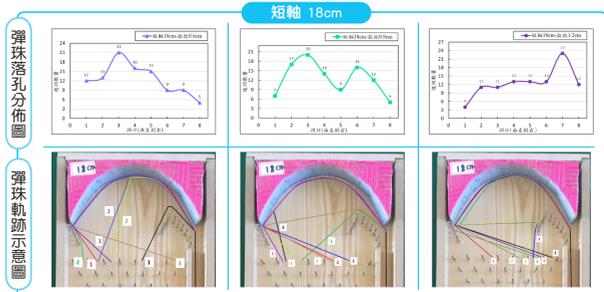


討論彈珠軌跡來研究現象呈現的原因：我們發現伸長量0.6cm時候，彈珠偏左側中間落下，所以對照鐘形分配圖呈現左側高台狀→推測0.6cm的伸長量，以彈力公式 $F=k(\Delta X)$ 可知，**拉力較小**，彈珠以軌跡圖來看，分兩種情況落下，一部分沿著擋板弧度中間落下，另一部分撞左側阻擋釘，由於力量小，所以會偏左側直接落下，呈現**左側高台狀鐘型分配**；伸長量0.9cm時候，彈珠集中中間落下，所以對照鐘形分配圖呈現中間尖狀→推測0.9cm的伸長量，以彈力公式 $F=k(\Delta X)$ 可知，**拉力適中**，彈珠以軌跡圖來看，幾乎都撞到左側阻擋釘，造成反作用力，所以會偏中間落下，呈現**中間尖狀的鐘型分配**，符合我們討論的主題；伸長量1.2cm時，彈珠偏右側落下，所以對照鐘形分配圖也呈現右偏→推測1.2cm的伸長量，以彈力公式 $F=k(\Delta X)$ 可知，**拉力偏大**，彈珠以軌跡圖來看，都撞到左側阻擋釘，造成反作用力較大，有時反作用力過大，會使彈珠又反彈，會偏右側落下，而呈現**右偏的鐘型分配**。

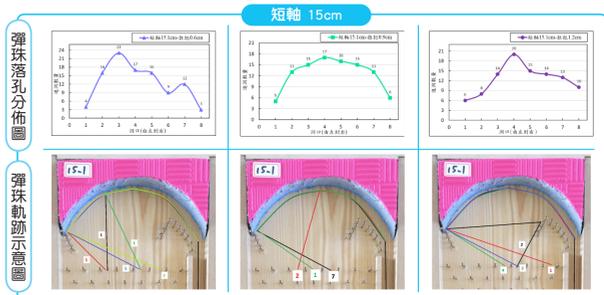
(二) 由探究四中，我們發現擋板弧度短軸6cm、18cm在拉到底的力呈現右偏，由彈珠行進路線討論此兩種短軸要搭配哪種伸長量會使之呈現中間型的鐘型分配：



依據彈珠軌跡來討論落孔分配圖呈現的原因：擋板弧度短軸6cm中，彈珠除了沿著擋板弧度彈射，在起始碰到擋板往左方前進時，因為弧度扁平與右側阻擋釘距離較接近，故彈珠容易碰撞阻擋釘形成較大的摩擦力，在伸長量0.6cm，比較容易在弧度中間就垂直落下，呈現**中間尖狀的鐘型分配**；伸長量0.9cm時，此力量能使彈珠幾乎沿著擋板弧度前進到底，但因前方碰撞阻擋釘形成摩擦力，使彈珠狀及左側阻擋釘後，彈射不遠就落下，所以分配圖偏左側；伸長量1.2cm時，此力量較大能使彈珠沿著擋板弧度前進到底後容易碰撞左側阻擋釘產生反作用力而撞擊右側阻擋釘後落下，呈現偏右側平緩的鐘形分配圖。



依據彈珠軌跡來討論落孔分配圖呈現的原因：擋板弧度短軸18cm中，擋板弧度較大，彈珠除了沿著擋板弧度彈射，也容易因力道不同碰撞阻擋釘，改變落入孔洞的彈道；過大的弧形擋板給予彈珠行徑路徑變化量也大，不是每一顆彈珠都會完整沿著擋板弧度走完。伸長量為0.6cm時，因為力不足，彈珠會因弧度過大無法沿著弧度前進而垂直落下，造成彈珠落孔的分配曲線偏左側；在1.2cm伸長量發現，力量大加上擋板弧度大會使彈珠彈射比較遠，而分配圖偏右側；而伸長量為0.9cm觀察彈道進行分兩部分，一部分因為弧度大彈珠沒有走到底於左側落下，另一部分是撞阻擋釘彈射到右側而呈現雙峰狀的鐘形分配圖，故我們推測在伸長量0.9cm附近，有力量適中呈現中間的鐘形分配圖。



(三) 根據原擋板試算後發現弧度接近直徑15.1cm的圓，再用厚地墊製作出類似的弧形擋板，進行實驗。原擋板實驗後符合中間型的鐘形分配圖其伸長量為0.9cm，在自製擋板中發現明顯符合中間型的鐘形分配圖卻是伸長量為1.2cm。藉由觀察彈珠軌跡，在自製的擋板中我們推測伸長量為0.9cm-1.2cm皆能呈現中間型的鐘形分配圖。觀察比較後我們推測有幾點原因使得分配圖不一致：擋板材質、弧形平整性。

(四) 探究三中，無釘板面彈珠會因為上方擋板的弧度，彈珠落下的彈道只單偏於左方，而在上方加阻釘的板面，彈珠會因為撞擊到左方的阻擋釘而使落下的彈道只單偏於右方。在下方有釘子的情形，釘子的間距是否影響彈珠落下的位置？改變釘子排列形狀是否符合會成鐘形分配？數據分析是否有特殊狀況？

釘子的間距是否影響彈珠落下的位置？

釘子間隔間距大彈珠落下的位置差異變化性多，間隔間距小的板面，彈珠集中進洞次數比較多，數據分析圖表較容易呈現出鐘型分配。

改變釘子排列形狀是否符合中間型鐘形分配？

三角形的釘子分布依據Galton Board(高爾頓釘板)的位置，若彈珠集中在中間落下，較符合中間型鐘型曲線圖。

數據分析是否有特殊狀況？

板面設計中我們以6、8個釘子設計5種排列，發現彈珠滾動軌跡及落下彈道較多趨向於右邊，是因為我們用拉到底的力進行彈射，以及撞擊阻擋釘後產生反作用力使分配圖多呈現右偏。所以在不同設計的弧形擋板可能也會影響彈珠掉落的情形。

柒 結論

- 01 在手機APP彈珠台(虛擬實驗)及市售DIY彈珠台(實體實驗)的比較實驗中，在彈珠顆數固定的條件下，想要每一排都打進的機會不大；若想要刻意打中其中某一排也很難，**控制力道**就是一大因素。在虛擬實驗中，手機APP彈珠台在2-6格力中，以**中間的力(3格、4格)**符合我們討論的鐘型分配；力量格少偏左邊，力量格多偏右邊。在DIY彈珠台中結果與手機APP的相符，伸長量小偏右邊，伸長量大偏左邊，**中間的伸長量**符合所討論的鐘型分配。
- 02 以文獻高爾頓釘板的設計，來應用在DIY彈珠檯上(拉倒底的力偏右分配)，限制彈珠由中間落下，發現可以與文獻相符，為中間的鐘形分配；利用Scratch設計程式，我們可以編程出這樣的結果。
- 03 在自製不同釘子排列中，以6釘、8釘交錯，不改變最後一排釘位，其中**6080608**的排列最接近集中在中間的鐘形分配圖。
- 04 當彈珠在平面上做等速度運動時，彈珠行進的軌跡為直線前進；但是彈珠台並非是平面直線的彈道設計，彈珠檯面上擋板做弧形設計的彈道，使彈珠在滾動的過程中，因彈射沿著弧形彈道而產生位移的改變(如圖4所示)。
- 05 擋板以橢圓形固定橫向長軸為15.1cm(彈珠檯寬度)，改變短軸的長度，用拉到底的力發現**8cm、10cm、12cm、15.1cm**撞阻擋釘後接近中間落下，而分佈圖為接近中間的鐘型分配→符合彈珠**越靠近中間落下，越容易形成中間的鐘形分配**；而6cm與18cm分配圖偏右邊。
- 06 不同弧形擋板**搭配不同力量控制**，彈珠落入孔洞最容易形成集中中間的鐘形分配組合：擋板6cm搭配伸長量0.6cm；擋板8、10、12、15.1cm搭配伸長量1.2cm。擋板18cm搭配伸長量約0.9cm。
- 07 固定擋板弧形寬度(長軸)，改變短軸，不同短軸的擋板形成不同角度的弧形彈道，彈珠會沿著弧形彈道前進。當短軸越小，彈道的角度越大，彈珠的入射角小，撞擊阻擋釘後反射角也變小，藉由不同拉把伸長量可以在不同擋板弧度控制彈珠落孔的分配情形。
- 08 以Scratch能設計出符合我們實驗結果的彈珠檯遊戲，設計深入淺出的遊戲，學習透過科學、推理的計算，讓我們成為致勝王。



圖4彈珠弧形彈道

- 1.能以實驗情形在實際的情況下遊戲：由設計的遊戲彈珠檯在園遊會時就可以實際的遊玩，體驗夜市老闆賺錢的祕密。
- 2.彈珠檯擋板的材質及弧形平整性：在探究四中，原擋板與自製擋板所呈現出的落孔分布並不一致，故在自製擋板材質、切割後弧的平整性我們可以再進行延伸探究。
- 3.彈珠檯機電整合：將編寫的程式結合實際機台，在虛擬軟體中呈現實際的情形，並將結果統計及繪圖。

彈珠檯遊戲是台灣夜市一大特色，是大、小朋友的最愛，老闆們先『用心』，玩家當下『專心』，贏家最後『開心』。我們從無到有DIY組裝完整的彈珠檯，由虛擬實驗配合所組裝的彈珠檯循序完成實體實驗，設計出符合實體情形的彈珠檯程式。在實驗的過程要重覆多次擲彈珠且反覆紀錄結果的過程，無聊乏味，但實驗後我們運用EXCEL作圖及分析，進階使用Scratch積木程式打造出擬真的夜市彈珠檯，增添了我們不同的思考探究層面。希望未來所設計出的彈珠檯結合機電應用，軟體跟機台能互相搭配，做進一步研究。

