

2019 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010025

參展科別 數學

作品名稱 以狀態有向圖探討跳躍數列方法數

得獎獎項 大會獎：四等獎

就讀學校 臺北市立陽明高級中學

指導教師 吳林建宏、王聖淵

作者姓名 蔡宗祐、曾健耘、洪珞婷

關鍵詞 跳躍數列、鄰接矩陣、特徵方程式

作者簡介



我們是蔡宗祐、曾健耘、洪珞婷，來自於臺北市。目前就讀台北市立陽明高中三年級。

我們熱愛數學研究，在跟組員一起討論的時候，可以學習到很多新知識，也能直接地學習數學在不同領域中的應用。在高中時期參與了很多大大小小的比賽，挑戰國際科展的舞台也是第二次，希望藉由這次的比賽讓我們自己在高中三年的專題研究有一個好的結尾。

Abstract

Juggling sequence deals with something about throwing the balls circularly, and there is only a ball back in hand at the same time. We discuss the number of ways in accordance with juggling sequence. Juggling sequence satisfies a sequence $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n)$, $a_k \geq 0$, $a_k \in \mathbb{Z}$, "For all $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$.", and a_k in the sequence H means time to throw the ball in the air at the n -th second.

In the research process, we use adjacency matrix to discuss the conversion method of juggling sequence. In linear algebra, we know the n th power of the juggling sequence's adjacency matrix means the number of string length n of juggling sequence. Then, we discuss the characteristic polynomial of the adjacency matrix in any situation of juggling sequence. Thus, we find some rules in juggling sequence. For example, we know $T_n^{(1,s)}$ is equal to s -step Lucas number. Finally, we use recurrence relation to build $T_n^{(b,s)}$ and find some theorem. For expressing the number of juggling sequence easier, we use approximate general items to replace recurrence relation. In this study, we find many new sequences not available on OEIS, and give them different opinions.

摘要

本篇研究針對跳躍進行數列本身意義的探討，用新的數列 V 表示跳躍數列的接球狀況，接著利用狀態有向圖定義出表示跳躍數列球在空中狀況的「頂點」以及表示跳躍數列內數值的「邊」，而迴圈狀況即為跳躍數列的情況下我們利用鄰接矩陣的想法進行探討，並且最後利用跡數的方式進行跳躍數列形式的討論。不同於文獻中僅針對用球數 b 和跳躍數列字串長度 n 做為討論，本篇研究增加了代表著跳躍數列中數值可達到的最大數值 s (也代表著表示跳躍數列球在空中狀況的「頂點」長度)，針對用球數為 1 顆的情況下為 k 階盧卡斯數的數值，而在其他用球數也有好的結果，並且針對不同情況下的跳躍數列整理出遞迴關係式以及生成函數。最後，在本篇研究中也找到許多在 OEIS 上所沒有的數列，並且給予這些數列有不同的解釋。

壹、前言

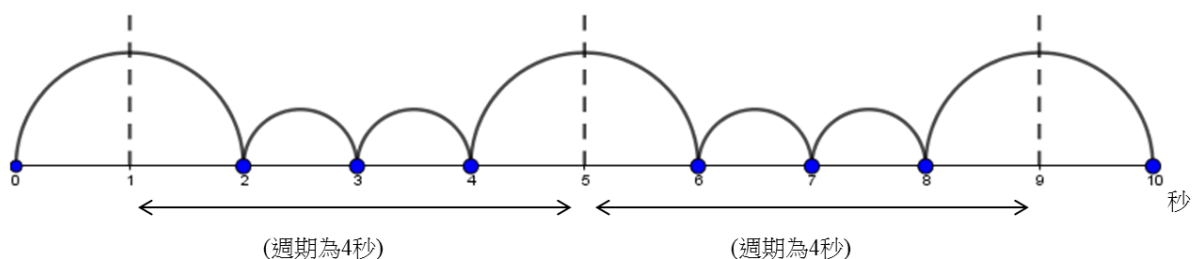
一、研究動機

跳躍數列的問題來自於小丑的丟球問題，對於一個雜耍馬戲團的小丑在丟球時的模式進行討論，問題本身條件的說明：

1. 在小丑丟球時，同一個時間點手上最多只會有一顆球回到手中。
2. 在小丑丟球時，期間需要連續、規律的接及丟出球，並且無限持續下去。

藉由以上條件換句話說，對於一個數列 $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n), a_k \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}$ ，其中 a_k 表第 k 秒時投出此球在空中的時間，滿足「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ， $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ 」則稱此數列為跳躍數列。

舉例來說， $H = (2, 0, 1, 1)$ 為一個跳躍數列，滿足 $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ ，由下圖可知使用的總球數為 1 顆球。



其方法數在許多的文獻資料中都有相關的資料，而一篇文章 Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)中，我們看到了對於跳躍數列的方法數進行探討，

其中給了跳躍數列方法數 $J(b, n) = \begin{cases} (b+1)^{n-b} b!, & \text{if } n \geq b. \\ n!, & \text{otherwise.} \end{cases}$ ，而 b 為用球數、 n 為跳躍數列的長度，

此篇文章探討跳躍數列的方式為原始(Primitive)跳躍數列方法數，其中 $b + 1 \leq a_i + i \leq b + n$ 為此篇文章對於跳躍數列的要求；此篇文章的內容引起我們的興趣，我們嘗試著針對用球數為 1 顆球的情況進行討論，若單純以跳躍數列的條件：

「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ， $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ 」

不去設限 $a_i + i$ 的範圍進行討論會發現其中的方法數為 k 階盧卡斯數；舉例來說，對於長度為 2 的跳躍數列且使用的球數為 1 的跳躍數列在 Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)中所得到的方法數為 2 種，即：(1,1)、(2,0)，因為在此篇研究中認為(2,0)、(0,2)就拋球的方式是一致的，而我們的研究中若單純以跳躍數列的基本條件進行討論則有 3 種，即：(1,1)、(2,0)、(0,2)三種。

本篇研究和 Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)的研究屬於不同的研究方向，而因為本篇研究進行討論時發現一些規律，其中的規律引起我們的興趣，因此開啟了此篇研究。

二、研究目的

- (一)以鄰接矩陣表示跳躍數列的球數轉換關係。
- (二)以遞迴關係式、近似值表示跳躍數列的方法數。
- (三)以生成函數、近似值表示限制情況下的跳躍數列的方法數。

貳、研究方法與過程

一、問題說明

在任一個數列 $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n)$ 的形式下，我們將 a_k 表投出此球時，此球在空中的時間，而 k 值則代表我們在第 k 秒的時候進行這樣的動作。因此，我們有了以下的定義：

定義一：一個數列 $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n)$ ， $a_k \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}$ ，其中 a_k 表第 k 秒時投出的球在空中的時間。若 H 滿足「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n$ 、 $1 \leq j \leq n$ ， $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j)(\text{mod } n)$ 」則稱此數列 H 為跳躍數列。

針對此**定義一**，我們發現若要針對跳躍數列進行進一步的探討，需要一個好的表示方式，因此我們定義出 $y - t$ 圖以及利用 $y - t$ 圖所觀察出球的滯空狀況所假設的數列如下。

圖表說明 $y - t$ 圖：橫向 t 表投球時的時間軸，縱向 y 表球滯空的狀況。

以此可以將圖表中的跳躍數列進行探討，以下圖 1 為例， $H = (2,0,1,1)$ 為一個跳躍數列，且可以發現此跳躍數列在第 $1 + 4t$ 秒(t 為非負整數)時，是沒有投出任何一顆球。

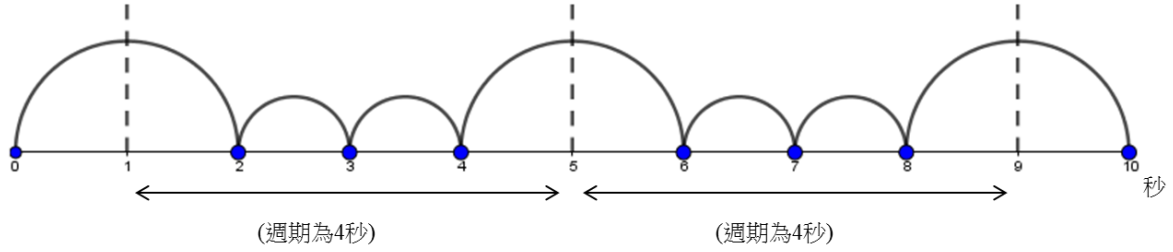


圖 1： $H = (2,0,1,1)$ 的 $y-t$ 圖

藉由上圖 1 的內容，我們嘗試觀察在用球數狀況，得到以下的簡單性質。

[性質 1] 跳躍數列 $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n), a_k \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}$ ，此跳躍數列的用球數為

$$N = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \text{ 顆球。}$$

proof：

已知 $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n), a_k \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}$ 為跳躍數列，由定義可知若 a_k 表第 k 秒投出的球在空中的時間，則對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, (a_i + i) \not\equiv (a_j +$

$j)(\text{mod } n)$ ； $\sum_{k=1}^n a_k$ 表一個數列球在空中的總秒數，則已知跳躍數列的字串長度為 n 表為 n

秒， $N = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$ 即表每一秒有 N 個球在空中，故跳躍數列的用球數為 $N = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$ 顆球。■

二、跳躍數列相關定義

(一) $T_n^{(b,s)}$ ：數列長度為 n 、用球數為 b 且數列中最大數值不大於 s 的跳躍數列個數。

舉例而言， $T_2^{(1,2)} = 3$ 表有 $(1,1)$ 、 $(2,0)$ 、 $(0,2)$ 三種跳躍數列； $T_3^{(1,2)} = 4$ 表有 $(1,1,1)$ 、 $(1,2,0)$ 、 $(0,1,2)$ 、 $(2,0,1)$ 四種跳躍數列； $T_4^{(1,2)} = 7$ 表有 $(0,1,1,2)$ 、 $(0,2,0,2)$ 、 $(1,1,1,1)$ 、 $(1,1,2,0)$ 、 $(1,2,0,1)$ 、 $(2,0,1,1)$ 、 $(2,0,2,0)$ 七種跳躍數列。

(二) $T_n^{(b,Y)}$ ：數列長度為 n 、用球數為 b 且數列所使用的數值只能使用集合 Y 中的元素。

舉例而言， $T_2^{(2,\{1,2,3\})} = 3$ 表有 $(1,3)$ 、 $(2,2)$ 、 $(3,1)$ 三種跳躍數列； $T_3^{(2,\{1,2,3\})} = 4$ 表有 $(1,2,3)$ 、 $(2,2,2)$ 、 $(2,3,1)$ 、 $(3,1,2)$ 四種跳躍數列。對比 $T_2^{(2,3)} = 3$ 表有 $(1,3)$ 、 $(2,2)$ 、 $(3,1)$ 三種跳躍數列；

$T_3^{(2,3)} = 7$ 表有(1,2,3)、(2,2,2)、(2,3,1)、(3,1,2)、(3,0,3)、(0,3,3)、(3,3,0)七種跳躍數列。

(三) $G^{(b,s)}(x)$ ：表 $T_n^{(b,s)}$ 數列所形成的生成函數。

(四) $G^{(b,Y)}(x)$ ：表 $T_n^{(b,Y)}$ 數列所形成的生成函數。

(五)跳躍數列接球狀況之二元字串定義

跳躍數列所代表的值無法針對接球狀況有一個直觀的探討，本篇研究在後續會有相關接球狀況的探討，為了後續研究的整理，因此我們定義一個新的數列 V 以表示接球的狀況；而為了針對其中的各項的值及轉換過程有進行更深入的探討，我們將其表示為二元字串形式。

定義二：對任一個跳躍數列 $H = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n), a_k \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}$ ，已知用球數為 b 的情況下，定義跳躍數列的接球狀況為二元字串 $V = (V_s V_{s-1} \dots V_k \dots V_1)$ ，其中 $V_k \in \{0,1\}$ ，而 $V_k = 1$ ，表有球在第 k 秒後回到手中； $V_k = 0$ ，表第 k 秒沒有球回到手中。

藉由以上**定義二**，我們能夠得知若以二元字串表示定義跳躍數列接球狀況，可直接得到用球數 b 等於多少，因此有了下列的性質。

[性質 2] 對於跳躍數列接球狀況 $V = (V_s V_{s-1} \dots V_k \dots V_1)$ ，用球數為 $b = \sum_{k=1}^n V_k$ 。

對於跳躍數列的接球狀況的二元字串 $V = (V_s V_{s-1} \dots V_k \dots V_1)$ 中，而當下一秒鐘的情況將會是，先將所有數字向右推一位，並且在最後一位補上 0，此種意義在於經過了一秒後，所有球在第幾秒落地的狀況也會減少一秒。如下圖：

001 $\rightarrow$ 0001

(圖 2：001 向右推一格形成 000 (轉換規則)。)

而當再次丟球時，需要知道此球的落地時間，因此我們在箭頭的上方做出標誌，此標誌代表再次丟球時，此球在幾秒後落地。如下圖 3 所示，此種情況代表再次丟出的球將會在 2 秒後落地。

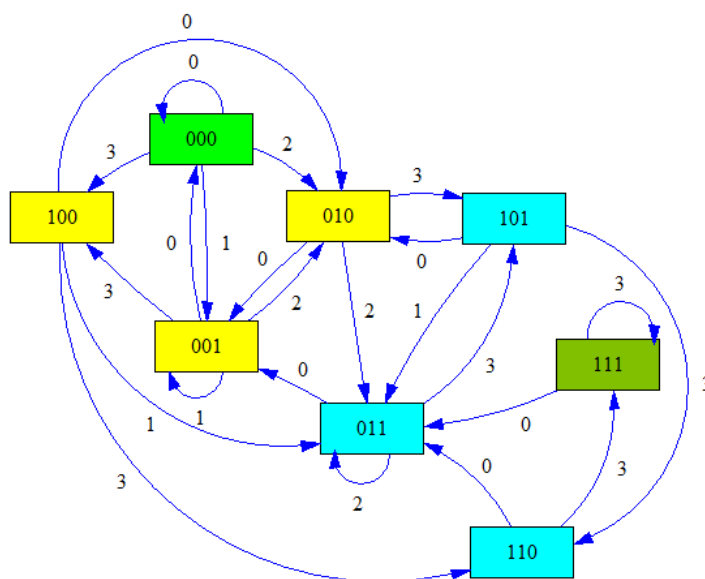
$$\begin{array}{c} 2 \\ \curvearrowright \\ 001 \rightarrow \text{000}1 \rightarrow 010 \end{array}$$

(圖 3：001 向右推一格形成 000，並在第二位的地方加上一個 1 (箭頭轉換)。)

藉由以上的轉換方式，我們得知對於跳躍數列轉換接球狀況，有二元字串以及轉換方式兩種情況；而在此我們希望能有一個好的表示法，因此採用有向圖。

(六) 跳躍數列的狀態有向圖定義

跳躍數列的狀態有向圖，圖中每個頂點為 $V = (V_s V_{s-1} \cdots V_k \cdots V_1)$ ， $V_k \in \{0,1\}$ ， s 則為頂點的字串長度，若滿足跳躍數列的接球狀況二元字串的轉換方式，則稱為跳躍數列的狀態有向圖，在此同時可以發現 s 值即為跳躍數列中的最大值。以下圖 4 為例，為 G_3 的狀態有向圖。



(圖 4：跳躍數列的狀態有向圖 G_3)

藉由二元字串和狀態有向圖的結合，我們先針對頂點為二元字串的形式進行討論，其中狀態有向圖的邊集合上的標號假定為轉換的方式，藉由這樣的方式我們可以將所有的可能狀況整理成有向圖的形式。

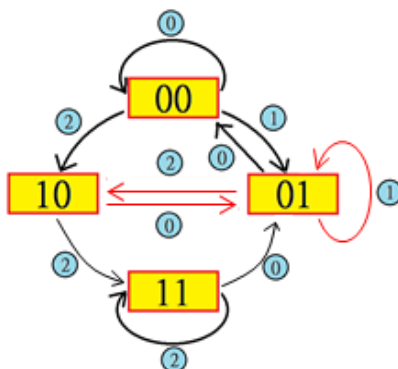
定義三：跳躍數列的狀態有向圖 G_s 滿足圖中每個頂點為 $V = (V_s V_{s-1} \cdots V_k \cdots V_1)$ ， $V_k \in \{0,1\}$ ，邊集合 E 上的標號集合為 $W = \{0,1,2, \dots, s\}$ ，若 G_s 圖中兩頂點 x_1 和 x_2 連接且由 x_1 傳遞至 x_2 ， x_1 和 x_2 連接的標號為 y ， $y \in W$ 且需要滿足跳躍數列接球狀況之二元字串形式表示法的轉換。

三、跳躍數列和狀態有向圖的封閉路徑關係

在探討狀態有向圖時，我們發現針對狀態有向圖的邊和頂點皆有些簡易的迴圈性質，因此為了後續的相關研究，我們將針對狀態有向圖的邊迴圈進行一個探討。

在狀態有向圖中的狀況下，我們知道對於任意的一個封閉迴圈所包含的邊集合皆能形成

一個跳躍數列 H ；以對於一個滿足二元字串形式表示法轉換的 G_2 圖為例，圖中的紅色部份為一個明顯的封閉迴圈，若以 (01) 做為出發點，邊元素分別為： $2 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ ，由**定義三**可假設出跳躍數列 $H = (2, 0, 1, 1)$ ，針對此概念整理成**定理一**，在後續的研究會以此定理進行延伸。



(圖 5： G_2 跳躍數列圖， $H = (2, 0, 1, 1)$ 。)

定理一 一個跳躍數列 $H = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ 對應到在跳躍數列的狀態有向圖 G_s 下的一個封閉迴圈。若且唯若，在跳躍數列的狀態有向圖 G_s 下，若有一個封閉迴圈由其中一頂點出發，且經過的頂點所表示的用球數一樣下，邊元素依照順序為 $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow \dots \rightarrow e_k \rightarrow e_1$ 。

四、跳躍數列的狀態有向圖 G_s 之矩陣探討-以用球數為 1 的頂點元素矩陣為例

(一) 狀態有向圖點元素的鄰接矩陣

我們希望研究能夠針對跳躍數列在特定情況下的個數進行討論，因此為了達成此目標，從**定理一**的概念我們能理解其起點及終點為同一個的時候即為跳躍數列，因此我們需要針對狀態有向圖中形成封閉路徑的情況進行討論。而一開始進行本小節的研究時，需要針對各頂點至各頂點的方法數進行討論，針對跳躍數列被整理成狀態有向圖的狀況進行個數的探討。

定義四： 設跳躍數列的狀態有向圖 G_s 的鄰接矩陣為 $C_{i,j}$ ，若圖中每個頂點 $V = (V_s V_{s-1} \dots V_k \dots V_1)$ ， $V_k \in \{0, 1\}$ 。若 V_j 至 V_i 有連接，則 $C_{i,j} = 1$ ，若 V_j 至 V_i 沒有連接，則 $C_{i,j} = 0$ 。

我們針對用球數一顆球的狀況進行探討，因此可以整理成下表 1 的狀況。

(表 1：跳躍數列 G_2 在用球數一顆球的狀況下的鄰接矩陣。)

二元字串	V_j	01	10
V_i			
01		1	1
10		1	0

(二)以對角化方式探討跳躍數列的狀態有向圖 G_2

先將表 1 中的表格轉換成以下的定義五的矩陣：

定義五：由**定義四**的假設下，假設 $V_1 = (01), V_2 = (10)$ ，則矩陣 $C = [C_{i,j}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

針此矩陣 C 中的值，我們可以知道，若取主對角的值累加可代表從一個點至同一個點路徑長度為 1 的封閉迴圈，那麼若探討 $C^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ 的主對角的值累加則可知道表從一個點至同一個點路徑長度為 n 的封閉迴圈，則藉由定理一則可知這樣的封閉迴圈即為跳躍數列，因此我們可以說： $\text{tr}(C^n) = T_n^{(1,2)}$ ，即為用球數為 1、跳躍數列最大值為 2 的跳躍數列方法數。

藉由以上的概念，我們知道矩陣的對角化是重要的，因此我們嘗試探討 $C^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ 的狀況。為了使用對角化的工具，開始我們需要先行探討矩陣 C 的特徵值以及特徵向量：

$\det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ ，為了往後進行討論方便，我們將假設 λ_1, λ_2 為此矩陣的兩個特徵值，並且整理成一個簡易性質至下方。

[性質 3]假設 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 > \lambda_2$ 為 $C = [C_{i,j}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特徵值，則 λ_1, λ_2 滿足

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \end{cases}。$$

由定義以及性質的概念，我們可以架構出特徵向量，藉此探討 $C^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ ，故假設

$X_{2 \times 1}$ 為矩陣 $C = [C_{i,j}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特徵向量，則

$$(C - \lambda I_2)X = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

藉此取特徵向量 $(x_1, x_2) = (\lambda, 1)$ 後，能得到矩陣 P^{-1}, P 使得 $P^{-1}C^n P = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$ ，此

時我們可知 $P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ ，則藉此可以整理成以下的性質。

[性質 4]若矩陣 $C = [C_{i,j}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 > \lambda_2$ 滿足 $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = -1 \end{cases}$ ，且

$$P^{-1}C^n P = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}。$$

此時我們針對 $C = [C_{i,j}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 以及 C^n 的關係進行相關探討，期望可以藉由此矩

陣進行深入的討論。

[性質 5]若矩陣 $C = [C_{i,j}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $C^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ ， F_n 為費式數列第 n 項的值。

proof：

藉由性質 4 的簡單整理，我們可以進行 C^n 的整理，因此可以得到：

$$\begin{aligned} C^n &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1}\lambda_2 + \lambda_2^{n+1}\lambda_1 \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2 + \lambda_2^n\lambda_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

我們可以發現其內容和費氏數列、盧卡斯數的一般式一致，因此我們能得到

$$C^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}。 \blacksquare$$

由性質 5 的概念，我們能夠將定理一整理成下表 2，表 2 所表示的即為在狀態有向圖 G_2 用球數為一顆球的情況下跳躍數列字串長度為 n 時，對於任意的數值進行轉換的動作時所需要的方法數。

(表 2：跳躍數列 G_2 在用球數為一顆球的情況下，字串長度為 n 的轉換方法數。)

二元字串	V_j	01	10
V_i			
01		F_{n+1}	F_n
10		F_n	F_{n-1}

定理二 對於字串長度為 n 且用球數為 1 顆的跳躍數列，若跳躍數列內的數值最大值不大於 2

的情況下，其方法數為 L_n (為第 n 項盧卡斯數)，即： $T_n^{(1,2)} = \text{tr}(C^n) = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ 。

proof :

由**定義五**及**性質 5** 可知當字串長度為 n 時可得到上表 2，則在此時我們可以藉由**定理一** 可知若出發的頂點和結束的頂點相同時，則可建立出一個跳躍數列，因此若頂點從 01 $\rightarrow$ 10 的方法數為 F_{n+1} ，頂點從 10 $\rightarrow$ 10 的方法數為 F_{n-1} ，則當字串長度為 n 的方法數即為

$\text{tr}(C^n)$ ，而從**性質 5** 中可得 $\text{tr}(C^n) = F_{n+1} + F_{n-1}$ ；由性質一可知 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$ ，因

此針對得到的跡數進行以下的整理：

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}[\lambda_1^{n-1}(\lambda_1^2 + 1) - \lambda_2^{n-1}(\lambda_2^2 + 1)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\lambda_1^{n-1}(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}) - \lambda_2^{n-1}(\frac{5 - \sqrt{5}}{2})] = \lambda_1^{n-1}(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}) + \lambda_2^{n-1}(\frac{-\sqrt{5} + 1}{2}) \\
 &= \lambda_1^n + \lambda_2^n = L_n
 \end{aligned}$$

故可得到 $T_n^{(1,2)} = \text{tr}(C^n) = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ 。■

藉由**定理二**的結果我們可以得到一個不錯的結果，以 $T_3^{(1,2)} = L_3 = 4$ 種情況，即：

(1,1,1)、(2,0,1)、(1,2,0)、(0,1,2)，針對**定理二**可以知道在特定的情況下，字串長度為 n 的跳躍數列可能的方法數已經是一個實際的值，因此接下來我們可以針對在狀態有向圖 G_2 用球數為一顆球的狀況、所有的字串長度進行跳躍數列個數的探討。

(三)跳躍數列的狀態有向圖 G_s 探討-以用球數 1 顆球為例

在前一個部分的研究中，我們能發現狀態有向圖在探討跳躍數列的方式及概念，本部分的研究將針對 G_s ，即對於跳躍數列的最大值為 s 進行深入的討論，即代表將點的字串長度變成 s 並且嘗試進行個數狀況的討論。

1. 用球數 1 顆在跳躍數列的狀態有向圖下 G_s 的矩陣表示法

接著我們希望探討用球數為 1 顆狀態有向圖下 G_s 的相關性質：

[性質 6] 在跳躍數列用球數一顆球的情況下，若以狀態有向圖 G_s 之情況，可利用矩陣表示法表示為：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{s \times s} \quad .$$

接著針對此性質，我們可以嘗試進行矩陣 A 的特徵方程式，在此我們以

$\det(A - \lambda I_{s \times s}) = 0$ 作為此特徵方程式的形式，並且嘗試整理出以下的性質。

[性質 7] 在性質 6 下， $\det(A - \lambda I_{s \times s}) = (-1)^s (\lambda^s - \lambda^{s-1} - \lambda^{s-2} - \cdots - \lambda - 1)$ ，則可知矩陣 A

的特徵方程式為 $\lambda^s - \lambda^{s-1} - \lambda^{s-2} - \cdots - \lambda - 1 = 0$ 且在滿足此方程式的根為 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 下，

有著以下的關係式：
$$\sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq s} \prod_{i=1}^k \lambda_{a_i} = (-1)^{k-1}, 1 \leq k \leq s .$$

此時針對**性質 7**，我們知道其特徵方程式和 k 階 Lucas 數的遞迴關係式有關，因此有以下的定義。

定義六： k 階盧卡斯數一般項 $L_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n$ ，且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 為 $\lambda^k - \lambda^{k-1} - \cdots - 1 = 0$ 。

2. 用球數 1 顆在跳躍數列的狀態有向圖下的矩陣表示法之對角化

在進行 G_s 的矩陣表示法後，我們可以針對此表示法進行對角化討論，以便我們進行跳躍數列的個數探討，而藉由**性質 7** 的概念，我們可以將矩陣 A 進行對角化討論。

[性質 8] 在性質 6 下，存在一個矩陣 B 使得 $A^n = B^{-1} D^n B$ ，且利用**性質 7** 的情況可知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{s \times s}, D = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_{s-1}^n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_s^n \end{bmatrix}_{s \times s}。$$

針對以上的 G_s 表示法，我們希望能藉由此種方式針對用球數一顆球的狀況進行深入的討論，我們可知道接下來若要進行跳躍數列的情況有幾種，將使用跡數的方式進行討論，接下來將針對在用球數一顆球的情況下，字串長度為 n 時，將整理成以下的定理。

定理三 在 G_s 的情況下，若用球數為一顆球的情況下，字串長度為 n 的可能跳躍數列個數為

$$T_n^{(1,s)} = \text{tr}(A^n) = L_n^{(s)}, \text{ 且 } L_n^{(s)} \text{ 為第 } n \text{ 項的 } s \text{ 階盧卡斯數。}$$

proof :

利用**性質 7** 可知在 G_s 的情況下，若用球數為一顆球的情況下，字串長度為 n 的可能跳躍

$$\text{數列個數為 } \text{tr}(A^n) = \text{tr}(B^{-1}D^nB), \text{tr}(B^{-1}D^nB) = \text{tr}(D^nB^{-1}B) = \text{tr}(D^n) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n, \text{ 藉由定理一的}$$

內容我們可證明出**定理三**。

3. 用球數 1 顆在跳躍數列的狀態有向圖下 k 階盧卡斯數性質探討

針對 k 階盧卡斯數的相關性質，我們勢必需要找尋 k 階盧卡斯數的初始值，而其中的初始值有一定的規律，在**定理三**中我們已經知道若要計算第 n 項的 k 階盧卡斯數可使用矩陣 A 進行 n 次矩陣乘法後取跡數即可得到答案，而在計算中我們發現了其中的規律，這個規律將幫助我們進行接下來的相關討論。

[性質 9] 對於 k 階盧卡斯數，其初始值為 $L_n^{(k)} = \text{tr}(A^n), 1 \leq n \leq k-1$ 。

說明：以跡數以及特徵方程式可容易得出。

為了將**定義六**的 k 階盧卡斯數進行深入的性質探討，我們嘗試利用矩陣方法進行討論，並且發現使用的矩陣為上方研究當中矩陣 A 的轉置矩陣 A^T ，在此假設此矩陣為 C 。

定義七：k 階盧卡斯數遞迴關係式為： $L_n^{(k)} = L_{n-1}^{(k)} + \dots + L_{n-k}^{(k)}$ ，可被表為：

$$\begin{bmatrix} L_n^{(k)} \\ L_{n-1}^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{n-k}^{(k)} \\ L_{n-k+1}^{(k)} \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} \begin{bmatrix} L_{n-1}^{(k)} \\ L_{n-2}^{(k)} \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{n-k-1}^{(k)} \\ L_{n-k}^{(k)} \end{bmatrix}_{k \times 1}。$$

4. 由鄰接矩陣轉換成遞迴關係式的方法探討

由上述內容我們能夠由對角化的方式再由跡數求得跳躍數列方法數，然而這樣的方法讓我們由鄰接矩陣進行對角化時的計算過於複雜，因此針對此部分我們將嘗試利用其他方式進行討論遞迴關係式及初始值進行研究；而在此我們需要引入 **Cayley - Hamilton 定理**。

[Cayley - Hamilton 定理]

設矩陣 A 為給定的 $n \times n$ 矩陣， I_n 為 $n \times n$ 的單位矩陣，對於 A 的特徵方程式定義為 $f(x) = \det(x \cdot I_n - A)$ ，則 $f(A) = 0$ 。

我們可以利用 **Cayley - Hamilton 定理** 進行鄰接矩陣的轉換，以一個跳躍數列的特例中的狀態有向圖為例， A 為其鄰接矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}，計算 A 的特徵方程式可得 f(x) = \det(x \cdot I_n - A) = x^6 - x^5 - x^4 - x^3，$$

則可由 **Cayley - Hamilton 定理** 得到 $A^6 - A^5 - A^4 - A^3 = 0$ ，則 $A^6 = A^5 + A^4 + A^3$ ，最後藉由運算可得 $A^n = A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3}$ ；由**定理一**可知若出發的頂點和結束的頂點相同時，則可建立出一個跳躍數列，則 $\text{tr}(A^n)$ 為在跳躍數列的特例中字串長度為 n 的跳躍數列方法數，則可由此得到 $\text{tr}(A^n) = \text{tr}(A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3}) = \text{tr}(A^{n-1}) + \text{tr}(A^{n-2}) + \text{tr}(A^{n-3})$ ，則假設此特例的跳躍數列方法數的表示法為 $T_n^{(2, \{1, 2, 3, 4\})}$ ，由此可以推得此遞迴關係式為

$T_n^{(2,\{1,2,3,4\})} = T_{n-1}^{(2,\{1,2,3,4\})} + T_{n-2}^{(2,\{1,2,3,4\})} + T_{n-3}^{(2,\{1,2,3,4\})}$ ，而其中的初始值可以藉由原本的鄰接矩陣進行推導，而本篇研究的後續將會以此方法進行遞迴關係式的相關運算。

5. 利用數學軟體 Matlab 進行一般項的探討

對於跳躍數列的方法數，我們知道處理上由鄰接矩陣 $A_{s \times s}$ 進行，而 $\text{tr}(A^n)$ 即為跳躍數列方法數，由上述的 **Cayley – Hamilton 定理**可以由鄰接矩陣 A 得到其中的遞迴關係式，然而在進行相關估計時發現當探討較大的項數時無法有效的進行相關預測，對此我們針對鄰接矩陣

A 的特徵值進行相關的分析，可得知 $\text{tr}(A^n) = \text{tr}(B^{-1}D^nB) = \text{tr}(D^nB^{-1}B) = \text{tr}(D^n) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n$ ，其中方陣 $D_{s \times s}$ 即為鄰接矩陣 A 所得到的對角矩陣，其中的 λ_i 為矩陣 A 的特徵值。則當矩陣 A 的特徵值為 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ，假設 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_s|$ ， $\text{tr}(A^n) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^n$ ，則可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\lambda_1^n} = 1$ ，而

後進行整理用 $\text{tr}(A^n) \sim \lambda_1^n$ 表示。

定義八：若跳躍數列的鄰接矩陣 A 之特徵方程式為 $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ，其中的根為 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ 且 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{k-1}| \geq |\lambda_k|$ ，若 $T_n^{(b,s)} = \text{tr}(A^n)$ ，由線性代數基本理論可知 $T_n^{(b,s)} = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_{k-1}^n + \lambda_k^n$ ，則知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n^{(b,s)}}{\lambda_1^n} = 1$ ，以 $T_n^{(b,s)} \sim \lambda_1^n$ 表示 $T_n^{(b,s)}$ 之近似一般項。

以此概念我們利用數學軟體 Matlab 進行特徵方程式求根進而得到特徵值，接著以此進行相關的預估。

而對於任一個高次方程式 $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ 在 Matlab 求解的相關指令如下：

```
clear all
format long %%估計值長度增加
p=[a_k, a_{k-1}, ..., a_2, a_1, a_0]; %%方程式的係數
```

```
r=roots(p)%%求高次方程式的根
polyval(p,r)%%將值代回確認誤差
```

對此我們以三階盧卡斯數 $L_n^{(3)}$ 的特徵方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 為例：

```
clear all
format long %%估計值長度增加
p=[1,-1,-1,-1];%%方程式的係數
r=roots(p)%%求高次方程式的根
polyval(p,r)%%將值代回確認誤差
```

則可以得到結果：

```
r =
    1.839286755214161 + 0.0000000000000000i
   -0.419643377607081 + 0.606290729207200i
   -0.419643377607081 - 0.606290729207200i
ans =
    1.0e-14 *
   -0.088817841970013 + 0.0000000000000000i
    0.111022302462516 + 0.005551115123126i
    0.111022302462516 - 0.005551115123126i
```

則由下方的誤差，我們可以知道其誤差為 10^{-14} 。

由其中求出來的根可得到特徵方程式得到的根分別為

(1)一實根：x= 1.839286755214161

(2)兩虛根：x= -0.419643377607081 + 0.606290729207200i、-0.419643377607081 - 0.606290729207200i

由於很容易知道兩虛根 $|x| < 1$ ，故當 n 值夠大時，可視 $L_n^{(3)} = [1.839286755214161^n]$ ，[]表找尋最近的整數。

而以 $n = 41$ 為例， $L_{41}^{(3)} = 70896889713$ 。而由 Matlab 進行計算可知

`>>1.839286755214161^41=7.089688971299973e+10`

則可得到 $L_{41}^{(3)} = [1.839286755214161^{41}] = [70896889712.99973] = 70896889713$ 。

為了進行一般項的整理，我們以 $L_n^{(3)} \sim 1.839286755214161^n$ 表示。

以以上內容進行說明如何找尋特徵根以及進行找尋根的方式，而在後續將會直接將探討出的結果整理至研究結果中。

6. 探討特定形式特徵方程式建立生成函數

定理四 若跳躍數列方法數 $T_n^{(b,s)}$ 的鄰接矩陣 A 的特徵方程式 $f(x) = \sum_{i=0}^k a_0 x^i$ ，則 $T_n^{(b,s)}$ 形

成數列之生成函數 $G(x) = k - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$ ，且 $h(x) = \sum_{i=0}^k a_{k-i} x^i$ 。

proof：

由定理一的概念可知若用球數為 b ，跳躍數列最大值不大於 s 的情況下，若 A 為其鄰接矩陣，則 $T_n^{(b,s)} = \text{tr}(A^n)$ ，則若 $f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ 為鄰接矩陣的特徵方程式，其中

的根為 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (可以重根)，由線性代數基本理論可得 $\text{tr}(A^n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n$ ，則 $T_n^{(b,s)}$

$$= \sum_{i=1}^k \lambda_i^n。$$

已知對於 $T_n^{(b,s)}$ 的數列，令其生成函數為 $g(x) = \sum_{i \geq 1} T_i^{(b,s)} x^i$ (有項數平移)，則函數

$$g(x) : g(x) = \sum_{i \geq 1} T_i^{(b,s)} x^i = \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) + \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j^2 \right) x + \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j^3 \right) x^2 + \cdots = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j^{i+1} x^i \right)$$

$$\text{則可推得： } g(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (1 + \lambda_j x + \lambda_j^2 x^2 + \cdots) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\frac{1}{1 - \lambda_j x} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j x} = -\frac{h'(x)}{h(x)}$$

，其中 $h(x) = (1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) \cdots (1 - \lambda_k x)$ 。

又 $x^n f(x) = x^k (\frac{1}{x} - \lambda_1) \cdots (\frac{1}{x} - \lambda_n) = (1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) \cdots (1 - \lambda_k x) = h(x)$ ，可知若 $f(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ ，

則 $h(x) = \sum_{i=0}^k a_{k-i} x^i$ ；又單純看 $T_n^{(b,s)}$ 的一般項，可得 $T_0^{(b,s)} = k$ ，故可得其生成函數

$$G(x) = k + x \cdot g(x) = k - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}。 \blacksquare$$

以 $T_n^{(1,3)}$ 為例，其特徵方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 為例，已知 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ ，則

$h(x) = -x^3 - x^2 - x + 1$ ， $h'(x) = -3x^2 - 2x - 1$ ，故可知其生成函數為：

$$G^{(1,3)}(x) = 3 - x \cdot \frac{-3x^2 - 2x - 1}{1 - x - x^2 - x^3} = \frac{3 - 3x - 3x^2 - 3x^3 + 3x^3 + 2x^2 + x}{1 - x - x^2 - x^3} = \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3}。$$

由一般的生成函數算法除了需要遞迴關係式外，也需要初始值，因為本研究中的數列一

般項有特定的形式(即： $T_n^{(b,s)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n$)，因此我們可以在不需要特徵值的情況下，利用定

理四快速整理出各個情況的生成函數。

五、跳躍數列用球數為任意顆球的情況之方法數探討

在探討跳躍數列的過程中，我們希望能將情況進行更深入的探討；已知跳躍數列 H 的方法數會和接球狀況 V 的方法數一致，而在探討接球狀況 V 時，皆會在狀態有向圖 G_s 下探討，則在此處我們將先針對用球數和字串長度進行討論，並且嘗試整理成以下的性質。

(一)用球數和二元字串形式的接球狀況 V 的字串長度之關係

[性質 10]對於用球數為 t 的情況下，二元字串形式的接球狀況 V 的字串長度不小於 t 。

性質 10 中的狀況可以很明顯知道如果球數為 t 時，若要滿足二元字串形式 V 的表示法，則其字串長度勢必不能比 t 來的小，而在此也能很容易知道若用球數為 t 時，其字串長度若等於 t ，則跳躍數列的方法數僅會有一種。

[性質 11] 若用球數為 t 顆球，符合條件的頂點個數為 $\binom{s}{t}$ ， $1 \leq t \leq s$ 。

性質 11 可藉由二元字串形式的接球狀況 $V = (V_s V_{s-1} \cdots V_k \cdots V_1)$ 之狀況，我們能夠由此將在狀態有向圖 G_s 在特定的狀況進行頂點個數的討論，若用球數為 t 顆球，則將 t 分配至 s 個位置，因此利用組合數可知符合條件的頂點個數為 $\binom{s}{t}$ ， $1 \leq t \leq s$ 。

(二)不同用球數鄰接矩陣之情況

我們將不同用球數的狀況進行討論，並且嘗試將情形以鄰接矩陣探討，藉此進行觀察探討其中的規律。

以 $T_n^{(2,4)}$ 做為舉例，其代表的跳躍數列為用球數 2 顆且跳躍數列中的值不大於 4 的情況下，跳躍數列的字串長度為 n 的所有情況，由下表 6 可以得到其中點元素方陣化的情況：

	11	101	110	1001	1010	1100
11	1	1	1	0	0	0
101	1	0	0	1	1	0
110	0	1	0	1	0	1
1001	1	0	0	0	0	0
1010	0	1	0	0	0	0
1100	0	0	0	1	0	0

則假設一個矩陣：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 可知 } T_n^{(2,4)} = T_{n-1}^{(2,4)} + 2T_{n-2}^{(2,4)} + 2T_{n-3}^{(2,4)} + 2T_{n-4}^{(2,4)} - T_{n-5}^{(2,4)} - T_{n-6}^{(2,4)}, \text{ 則}$$

其中的 $T_1^{(2,4)} = 1, T_2^{(2,4)} = 5, T_3^{(2,4)} = 13, T_4^{(2,4)} = 33, T_5^{(2,4)} = 66, T_6^{(2,4)} = 161$ 。 ($\text{tr}(X^n) = T_n^{(2,4)}$)

因此我們可以得到跳躍數列的用球數為 2 時，跳躍數列的值不大於 4 時，跳躍數列的方法數會滿足： $T_n^{(2,4)} = T_{n-1}^{(2,4)} + 2T_{n-2}^{(2,4)} + 2T_{n-3}^{(2,4)} + 2T_{n-4}^{(2,4)} - T_{n-5}^{(2,4)} - T_{n-6}^{(2,4)}$ 且

n	1	2	3	4	5	6
$T_n^{(2,4)}$	1	5	13	33	66	161

而其中特徵方程式為 $x^6 - x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ ，則

$x = 2.333554225170096$ 、 0.627416367054142 、 -1.0000000000000001 、 -0.587813159984445 ，
 $-0.186578716119894 + 1.061667124179090i$ 、 $-0.186578716119894 - 1.061667124179090i$

，可得近似一般項 $T_n^{(2,4)} \sim 2.333554225170096^n$ ，

生成函數 $G^{(2,4)}(x) = \frac{7 - 2x - 6x^2 - 4x^3 - 17x^4 + 6x^6}{1 - x - 2x^2 - 2x^3 - 2x^4 + x^5 + x^6}$ 。

由以上狀況我們將以相同方式進行特徵方程式、初始值、近似一般項以及生成函數的探討。

1. 用球數為 2，且二元字串形式的接球狀況字串長度為 2~7 之情況

(表 3：用球數為 2，且二元字串形式的接球狀況字串長度為 2~7 之表格整理。)

	11	101	110	1001	1010	1100	10001	10010	10100	11000	100001	100010	100100	101000	110000	1000001	1000010	1000100	1001000	1010000	1100000
11	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1001	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1010	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1100	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10001	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10010	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10100	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
11000	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
100001	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
100010	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
100100	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
101000	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
110000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1000001	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000010	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000100	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1001000	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1010000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1100000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

在表 3 的整理中，我們能夠發現其中相關的表示規律，而表格中由小而大的正方塊表示

的是用球數為 2 且二元字串形式的接球狀況字串長度為 2~7 的表示方式，此部分能夠由此發

現用球數為 2 時，字串長度為 3 時，其跳躍數列方法數滿足 $L_n^{(3)}$ ，而其他字串長度仍遵循一些規律，但可以知道跳躍數列的方法數不會遵從 k 階盧卡斯數。

以下為我們利用特徵方程式表達遞迴關係式、跡數計算初始值探討數列的相關表示法：

$$(1) T_n^{(2,2)} = 1$$

$$(2) T_n^{(2,3)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(2,3)} = L_n^{(3)} = L_{n-1}^{(3)} + L_{n-2}^{(3)} + L_{n-3}^{(3)}$$

n	1	2	3
$T_n^{(2,3)}$	1	3	7

特徵方程式： $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(2,3)} \sim 1.839286755214161^n$ ，

$$\text{生成函數 } G^{(2,3)}(x) = \frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}。$$

$$(3) T_n^{(2,4)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(2,4)} = T_{n-1}^{(2,4)} + 2T_{n-2}^{(2,4)} + 2T_{n-3}^{(2,4)} + 2T_{n-4}^{(2,4)} - T_{n-5}^{(2,4)} - T_{n-6}^{(2,4)}$$

n	1	2	3	4	5	6
$T_n^{(2,4)}$	1	5	13	33	66	161

特徵方程式： $x^6 - x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(2,4)} \sim 2.333554225170096^n，$$

$$\text{生成函數 } G^{(2,4)}(x) = \frac{7 - 2x - 6x^2 - 4x^3 - 17x^4 + 6x^6}{1 - x - 2x^2 - 2x^3 - 2x^4 + x^5 + x^6}。$$

$$(4) T_n^{(2,5)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(2,5)} = T_{n-1}^{(2,5)} + 2T_{n-2}^{(2,5)} + 3T_{n-3}^{(2,5)} + 5T_{n-4}^{(2,5)} + 6T_{n-5}^{(2,5)} - T_{n-6}^{(2,5)} - T_{n-7}^{(2,5)} - T_{n-9}^{(2,5)} - T_{n-10}^{(2,5)}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_n^{(2,5)}$	1	5	16	49	131	302	813	2145	5596	14545

特徵方程式： $x^{10} - x^9 - 2x^8 - 3x^7 - 5x^6 - 6x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(2,5)} \sim 2.607225089719684^n。$$

$$\text{生成函數 } G^{(2,5)}(x) = \frac{11 - 6x - 11x^2 - 10x^3 - 20x^4 - 66x^5 + 3x^6 + 10x^7 - 9x^8 + 10x^{10}}{1 - x - 2x^2 - 3x^3 - 5x^4 - 6x^5 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{10}}。$$

(5) $T_n^{(2,6)}$ 討論

$$T_n^{(2,6)} = T_{n-1}^{(2,6)} + 2T_{n-2}^{(2,6)} + 4T_{n-3}^{(2,6)} + 6T_{n-4}^{(2,6)} + 10T_{n-5}^{(2,6)} + 12T_{n-6}^{(2,6)} \\ - 4T_{n-7}^{(2,6)} - 6T_{n-8}^{(2,6)} - 6T_{n-9}^{(2,6)} - 2T_{n-11}^{(2,6)} - 2T_{n-12}^{(2,6)} + T_{n-14}^{(2,6)} + T_{n-15}^{(2,6)}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_n^{(2,6)}$	1	5	19	57	171	473	1191	3360
n	9	10	11	12	13	14	15	
$T_n^{(2,6)}$	9379	25985	71721	192763	546079	1509919	4172409	

特徵方程式：

$$x^{15} - x^{14} - 2x^{13} - 4x^{12} - 6x^{11} - 10x^{10} - 12x^9 + 4x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

，則可得近似一般項 $T_n^{(2,6)} \sim 2.762764142398571^n$ 。

(6) $T_n^{(2,7)}$ 討論

$$T_n^{(2,7)} = T_{n-1}^{(2,7)} + 2T_{n-2}^{(2,7)} + 4T_{n-3}^{(2,7)} + 7T_{n-4}^{(2,7)} + 13T_{n-5}^{(2,7)} + 22T_{n-6}^{(2,7)} + 28T_{n-7}^{(2,7)} - 4T_{n-8}^{(2,7)} - 6T_{n-9}^{(2,7)} \\ - 6T_{n-10}^{(2,7)} - 4T_{n-12}^{(2,7)} - 10T_{n-13}^{(2,7)} - 10T_{n-14}^{(2,7)} + T_{n-16}^{(2,7)} + T_{n-17}^{(2,7)} + T_{n-20}^{(2,7)} + T_{n-21}^{(2,7)}$$

n	1	2	3	4	5	6	7
$T_n^{(2,7)}$	1	5	19	61	191	569	1611
n	8	9	10	11	12	13	14
$T_n^{(2,7)}$	4293	12421	35705	102191	291709	831663	2370849
n	15	16	17	18	19	20	21
$T_n^{(2,7)}$	6762839	19304213	55088433	157186829	448494355	1279680301	3651357855

特徵方程式：

$$x^{21} - x^{20} - 2x^{19} - 4x^{18} - 7x^{17} - 13x^{16} - 22x^{15} - 28x^{14} + 4x^{13} + 6x^{12} + 6x^{11} + 4x^9 + 10x^8 + 10x^7 - x^5 - x^4 - x - 1 = 0$$

，則可得近似一般項 $T_n^{(2,7)} \sim 2.853287731749214^n$ 。

2. 用球數為 3，且二元字串形式的接球狀況字串長度為 3~6 之情況

(表 4：用球數為 3，且二元字串形式的接球狀況字串長度為 3~6 之表格整理。)

	111	1011	1101	1110	10011	10101	10110	11001	11010	11100	100011	100101	100110	101001	101010	101100	110001	110010	110100	111000
111	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1011	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1101	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1110	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10011	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
10101	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
10110	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
11001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
11010	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
11100	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
100011	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100101	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100110	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101001	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101010	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101100	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
110100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
111000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

在表 4 的整理中，我們能夠發現其中相關的表示規律，而表格中由小而大的正方塊表示的是用球數為 3 且二元字串形式的接球狀況字串長度為 3~6 的表示方式，此部分能夠由此發現用球數為 3 時，字串長度為 4 時，其跳躍數列方法數滿足 $L_n^{(4)}$ ，而其他字串長度仍遵循一些規律，但可以知道跳躍數列的方法數不會遵從 k 階盧卡斯數。

以下為我們利用特徵方程式表達遞迴關係式、跡數計算初始值探討數列的相關表示法：

$$(1) T_n^{(3,3)} = 1$$

$$(2) T_n^{(3,4)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(3,4)} = L_n^{(4)} = L_{n-1}^{(4)} + L_{n-2}^{(4)} + L_{n-3}^{(4)} + L_{n-4}^{(4)}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(3,4)}$	1	3	7	15

特徵方程式： $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(3,4)} \sim 1.927561975482926^n$ 。

$$(3) T_n^{(3,5)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(3,5)} = T_{n-1}^{(3,5)} + 2T_{n-2}^{(3,5)} + 3T_{n-3}^{(3,5)} + 5T_{n-4}^{(3,5)} + 6T_{n-5}^{(3,6)} - T_{n-6}^{(3,5)} - T_{n-7}^{(3,5)} - T_{n-9}^{(3,5)} - T_{n-10}^{(3,5)}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_n^{(3,5)}$	1	5	16	49	131	302	813	2145	5596	14545

特徵方程式： $x^{10} - x^9 - 2x^8 - 3x^7 - 5x^6 - 6x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(3,5)} \sim 2.607225089719684^n。$$

$$(4) T_n^{(3,6)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(3,6)} = T_{n-1}^{(3,6)} + 3T_{n-2}^{(3,6)} + 5T_{n-3}^{(3,6)} + 9T_{n-4}^{(3,6)} + 17T_{n-5}^{(3,6)} + 21T_{n-6}^{(3,6)} - 20T_{n-7}^{(3,6)} - 28T_{n-8}^{(3,6)} - 8T_{n-9}^{(3,6)} + 4T_{n-10}^{(3,6)} - 12T_{n-11}^{(3,6)} - 16T_{n-12}^{(3,6)} + 4T_{n-13}^{(3,6)} + 13T_{n-14}^{(3,6)} + 11T_{n-15}^{(3,6)} - 3T_{n-16}^{(3,6)} - T_{n-17}^{(3,6)} + 3T_{n-18}^{(3,6)} - T_{n-19}^{(3,6)} - T_{n-20}^{(3,6)}$$

n	1	2	3	4	5
$T_n^{(3,6)}$	1	7	25	87	291
n	6	7	8	9	10
$T_n^{(3,6)}$	883	2416	7631	23677	72707
n	11	12	13	14	15

$T_n^{(3,6)}$	222135	678303	2075347	6362804	19485405
n	16	17	18	19	20
$T_n^{(3,6)}$	59650687	182612029	559103707	1711916987	5241647367

特徵方程式：

$$x^{20} - x^{19} - 3x^{18} - 5x^{17} - 9x^{16} - 17x^{15} - 21x^{14} + 20x^{13} + 28x^{12} + 8x^{11} - 4x^{10} + 12x^9 + 16x^8 - 4x^7 - 13x^6 - 11x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$

，則可得近似一般項 $T_n^{(3,6)} \sim 3.061773427899112^n$ 。

3. 用球數為 4，且二元字串形式的接球狀況字串長度為 4~6 之情況

(表 5：用球數為 4，且二元字串形式的接球狀況字串長度為 4~6 之表格整理。)

	1111	10111	11011	11101	11110	100111	101011	101101	101110	110011	110101	110110	111001	111010	111100
1111	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10111	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
11011	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
11101	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
11110	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
100111	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101011	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101101	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101110	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110011	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
110101	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
110110	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
111001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
111010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
111100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

在表 5 的整理中，我們能夠發現其中相關的表示規律，而表格中由小而大的正方塊表示的是用球數為 4 且二元字串形式的接球狀況字串長度為 4~6 的表示方式，此部分能夠由此發現用球數為 4 時，字串長度為 5 時，其跳躍數列方法數滿足 $L_n^{(5)}$ ，而其他字串長度仍遵循

一些規律，但可以知道跳躍數列的方法數不會遵從 k 階盧卡斯數。

以下為我們利用特徵方程式表達遞迴關係式、跡數計算初始值探討數列的相關表示法：

$$(1) T_n^{(4,4)} = 1$$

$$(2) T_n^{(4,5)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(4,5)} = L_n^{(5)} = L_{n-1}^{(5)} + L_{n-2}^{(5)} + L_{n-3}^{(5)} + L_{n-4}^{(5)} + L_{n-5}^{(5)}$$

n	1	2	3	4	5
$T_n^{(4,5)}$	1	3	7	15	31

特徵方程式： $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(4,5)} \sim 1.965948236645486^n。$$

$$(3) T_n^{(4,6)} \text{ 討論}$$

$$T_n^{(4,6)} = T_{n-1}^{(4,6)} + 2T_{n-2}^{(4,6)} + 4T_{n-3}^{(4,6)} + 6T_{n-4}^{(4,6)} + 10T_{n-5}^{(4,6)} + 12T_{n-6}^{(4,6)} - 4T_{n-7}^{(4,6)} - 6T_{n-8}^{(4,6)} - 6T_{n-9}^{(4,6)} - 2T_{n-11}^{(4,6)} - 2T_{n-12}^{(4,6)} + T_{n-14}^{(4,6)} + T_{n-15}^{(4,6)}$$

n	1	2	3	4	5
$T_n^{(4,6)}$	1	5	19	57	171
n	6	7	8	9	10
$T_n^{(4,6)}$	473	1191	3361	9379	25985
n	11	12	13	14	15
$T_n^{(4,6)}$	71721	197793	546079	1509919	4172409

特徵方程式：

$$x^{15} - x^{14} - 2x^{13} - 4x^{12} - 6x^{11} - 10x^{10} - 12x^9 + 4x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0，則可得近似$$

$$\text{一般項 } T_n^{(4,6)} \sim 2.762764142398571^n。$$

六、限制跳躍數列的特定值探討跳躍數列的方法數

針對跳躍數列的一般情況方法數在以上有一些好的結果，而後我們希望針對跳躍數列中

的數值進行相關的限制，因此我們需要針對不同球數下的數值變換進行討論，近而整理成鄰接矩陣以計算其值在不同長度的跳躍數列方法數。

(一) G_5 圖的數值變換

由鄰接矩陣的概念，我們可以將其整理成跳躍數列的狀態有向圖中「邊元素」的表格整理，以 G_2 圖的數值變換為例，我們討論用球數為 1 顆的情況：

	v_j	01	10
v_i			
01		1	0
10		2	

由以上的邊元素轉換後，我們可以很容易的將需要限制的值進行整理，舉例來說若我們要限制跳躍數列內的值沒有 0 的出現，則狀態有向圖中的鄰接矩陣會是： $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則可知道沒有 0 的 $T_n^{(1,2)} = \text{tr}(A^n) = 1$ 種方法數。

為了針對特定值進行討論，我們嘗試以前述的名詞定義 $T_n^{(b,Y)}$ (數列長度為 n 、用球數為 b 且數列所使用的數值只能使用集合 Y 中的元素) 進行討論，期望藉此針對不同限制下找尋不同的規律。

(二) G_4 圖的數值變換

針對 G_4 圖的轉換，我們針對用球數 1、2、3 顆球進行不同的討論。

1. 在 G_4 圖下用球數 1 顆球

由點元素的整理，我們可以得到其數值轉換的方式：

	v_j	0001	0010	0100	1000
v_i					
0001		1	0		
0010		2		0	
0100		3			0
1000		4			

接著我們希望從中整理出以下的各種情況。

(1) $T_n^{(1,\{1,2,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以很容易得到 $T_n^{(1,\{1,2,3,4\})} = \text{tr}(A^n) = 1$ 。

(2) $T_n^{(1,\{0,2,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(1,\{0,2,3,4\})} = T_{n-2}^{(1,\{0,2,3,4\})} + T_{n-3}^{(1,\{0,2,3,4\})} + T_{n-4}^{(1,\{0,2,3,4\})}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(1,\{0,2,3,4\})}$	2	3	6	5

特徵方程式： $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(1,\{0,2,3,4\})} \sim 1.465571231876769^n$ ，

生成函數： $\frac{4 - 2x - x^2 - 4x^4}{1 - x^2 - x^3 - x^4}$ 。

(3) $T_n^{(1,\{0,1,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(1,\{0,1,3,4\})} = T_{n-1}^{(1,\{0,1,3,4\})} + T_{n-3}^{(1,\{0,1,3,4\})} + T_{n-4}^{(1,\{0,1,3,4\})}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(1,\{0,1,3,4\})}$	1	1	4	9

特徵方程式： $x^4 - x^3 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(1,\{0,1,3,4\})} \sim 1.618033988749894^n。$$

生成函數： $\frac{5 - 4x + 3x^2 - 4x^4}{1 - x - x^3 - x^4}$ 。

(4) $T_n^{(1,\{0,1,2,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(1,\{0,1,2,4\})} = T_{n-1}^{(1,\{0,1,2,4\})} + T_{n-2}^{(1,\{0,1,2,4\})} + T_{n-4}^{(1,\{0,1,2,4\})}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(1,\{0,1,2,4\})}$	1	3	4	11

特徵方程式： $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(1,\{0,1,2,4\})} \sim 1.754877666246692^n$

，生成函數： $\frac{5 - 2x - 4x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - x - x^2 - x^4}$ 。

(5) $T_n^{(1,\{0,1,2,3\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(1,\{0,1,2,3\})} = T_{n-1}^{(1,\{0,1,2,3\})} + T_{n-2}^{(1,\{0,1,2,3\})} + T_{n-3}^{(1,\{0,1,2,3\})}，我們知道等價於$$

$$T_n^{(1,3)}。$$

n	1	2	3
$T_n^{(1,\{0,1,2,3\})} = T_n^{(1,3)}$	1	3	7

特徵方程式： $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(1,\{0,1,2,3\})} \sim 1.839286755214161^n$ ，

生成函數： $\frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}$ 。

對此，我們可以得到一個合理的推論，若在 G_4 圖且用球數為一顆的情況下，限制特定數值後，其遞迴關係式會針對限制的值進行相對應的缺項，而跳躍數列中沒有 0 的出現時，其方法數皆為 1；在此我們有此定理：

定理五 $T_n^{(1,\{1,2,3,\dots,s\})} = 1$ ，即在用球數為 1 顆且跳躍數列最大值不大於 s，若跳躍數列中沒

有 0 的情況下，跳躍數列的方法數為 1。

proof :

對於跳躍數列 $H = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，可知在用球數為 1 顆的情況下，由性質 1 可知

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = 1, \text{ 則由此可得知若 } a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0, \text{ 則唯一的情況為 } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1. \blacksquare$$

2. 在 G_4 圖下用球數 2 顆球

由點元素的整理，我們可以得到其數值轉換的方式：

	V_j	0011	0101	0110	1001	1010	1100
V_i							
0011		2	1	0			
0101		3			1	0	
0110			3		2		0
1001		4					
1010			4				
1100					4		

接著我們希望從中整理出以下的各種情況。

(1) $T_n^{(2, \{1, 2, 3, 4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(2, \{1, 2, 3, 4\})} = T_{n-1}^{(2, \{1, 2, 3, 4\})} + T_{n-2}^{(2, \{1, 2, 3, 4\})} + T_{n-3}^{(2, \{1, 2, 3, 4\})}$$

n	1	2	3
$T_n^{(2, \{1, 2, 3, 4\})}$	1	3	7

特徵方程式： $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(2, \{1, 2, 3, 4\})} \sim 1.839286755214161^n$ ，

生成函數： $\frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}$ 。

(2) $T_n^{(2,\{0,2,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})} = T_{n-1}^{(2,\{0,2,3,4\})} + T_{n-2}^{(2,\{0,2,3,4\})} + T_{n-3}^{(2,\{0,2,3,4\})} + T_{n-4}^{(2,\{0,2,3,4\})} - T_{n-5}^{(2,\{0,2,3,4\})} - T_{n-6}^{(2,\{0,2,3,4\})}$$

n	1	2	3	4	5	6
$T_n^{(2,\{1,2,3,4\})}$	1	3	7	15	21	39

特徵方程式： $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})} \sim 1.855885998666238^n,$$

生成函數： $\frac{7 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - 11x^4 + 6x^6}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6}$ 。

(3) $T_n^{(2,\{0,1,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})} = 2T_{n-2}^{(2,\{0,1,3,4\})} + 2T_{n-3}^{(2,\{0,1,3,4\})} + 2T_{n-4}^{(2,\{0,1,3,4\})} - T_{n-6}^{(2,\{0,1,3,4\})}$$

n	1	2	3	4	5	6
$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})}$	0	4	6	16	20	46

特徵方程式： $x^6 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})} \sim 1.883203505913527^n,$$

生成函數： $\frac{6+4x-6x^2-4x^3-12x^4-6x^5+6x^6}{1-2x^2-2x^3-2x^4+x^6}$ 。

(4) $T_n^{(2,\{0,1,2,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})} = T_{n-1}^{(2,\{0,1,2,4\})} + T_{n-2}^{(2,\{0,1,2,4\})} + T_{n-3}^{(2,\{0,1,2,4\})} + T_{n-4}^{(2,\{0,1,2,4\})} - T_{n-5}^{(2,\{0,1,2,4\})} - T_{n-6}^{(2,\{0,1,2,4\})}$$

n	1	2	3	4	5	6
$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})}$	1	3	7	15	21	39

特徵方程式： $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ ，則可得近似一般項

$$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})} \sim 1.855885998666238^n,$$

生成函數： $\frac{7-4x-3x^2-2x^3-11x^4+6x^6}{1-x-x^2-x^3-x^4+x^5+x^6}$ 。

(4) $T_n^{(2,\{0,1,2,3\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(2,\{0,1,2,3\})} = T_{n-1}^{(2,\{0,1,2,3\})} + T_{n-2}^{(2,\{0,1,2,3\})} + T_{n-3}^{(2,\{0,1,2,3\})}$$

n	1	2	3
$T_n^{(2,\{0,1,2,3\})}$	1	3	7

特徵方程式： $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(2,\{0,1,2,3\})} \sim 1.839286755214161^n$ ，

生成函數： $\frac{4-x-3x^3}{1-x-x^2-x^3}$ 。

3. 在 G_4 圖下用球數 3 顆球

由點元素的整理，我們可以得到其數值轉換的方式：

	v_j	0111	1011	1101	1110
v_i					
0111		3	2	1	0
1011		4			
1101			4		
1110				4	

接著我們希望從中整理出以下的各種情況。

(1) $T_n^{(3,\{1,2,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(3,\{1,2,3,4\})} = T_{n-1}^{(3,\{1,2,3,4\})} + T_{n-2}^{(3,\{1,2,3,4\})} + T_{n-3}^{(3,\{1,2,3,4\})}$$

n	1	2	3
$T_n^{(3,\{1,2,3,4\})}$	1	3	7

特徵方程式： $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(3,\{1,2,3,4\})} \sim 1.839286755214161^n$ ，

生成函數： $\frac{4-x-3x^3}{1-x-x^2-x^3}$ 。

(2) $T_n^{(3,\{0,2,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(3,\{0,2,3,4\})} = T_{n-1}^{(3,\{0,2,3,4\})} + T_{n-2}^{(3,\{0,2,3,4\})} + T_{n-4}^{(3,\{0,2,3,4\})}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(3,\{1,2,3,4\})}$	1	3	4	11

特徵方程式： $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(3,\{0,2,3,4\})} \sim 1.754877666246692^n$

，生成函數： $\frac{5 - 2x - 4x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - x - x^2 - x^4}$ 。

(3) $T_n^{(3,\{0,1,3,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(3,\{0,1,3,4\})} = T_{n-1}^{(3,\{0,1,3,4\})} + T_{n-3}^{(3,\{0,1,3,4\})} + T_{n-4}^{(3,\{0,1,3,4\})}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(2,\{1,0,3,4\})}$	1	1	4	9

特徵方程式： $x^4 - x^3 - x - 1 = 0$ ，則 $x = 1.618033988749894$ 、 -0.618033988749895 、 i 、 $-i$

可得近似一般項 $T_n^{(3,\{0,1,3,4\})} \sim 1.618033988749894^n$ ，

生成函數： $\frac{5 - 4x + 3x^2 - 4x^4}{1 - x - x^3 - x^4}$ 。

(4) $T_n^{(3,\{0,1,2,4\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，可以得到

$$T_n^{(3,\{0,1,2,4\})} = T_{n-2}^{(3,\{0,1,2,4\})} + T_{n-3}^{(3,\{0,1,2,4\})} + T_{n-4}^{(3,\{0,1,2,4\})}$$

n	1	2	3	4
$T_n^{(3,\{0,1,2,4\})}$	0	2	3	6

特徵方程式： $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ ，則可得近似一般項 $T_n^{(3,\{0,1,2,4\})} \sim 1.465571231876769^n$

，生成函數： $\frac{4-2x-x^2-4x^4}{1-x^2-x^3-x^4}$ 。

(4) $T_n^{(3,\{0,1,2,3\})}$ 的方法數

其中的狀態有向圖為 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\text{tr}(A^n) = T_n^{(3,\{0,1,2,3\})} = 1$ 。

參、研究結果與討論

一、跳躍數列用球數為任意顆球的性質整理

由跳躍數列的相關性質，我們有著計算「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ， $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ 」主要核心概念的定理一。

定理一 一個跳躍數列 $H = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ 對應到在跳躍數列的狀態有向圖 G_s 下的一個封閉迴圈

若且唯若在跳躍數列的狀態有向圖 G_s 下，若有一個封閉迴圈由其中一頂點出發，且經過的頂點所表示的用球數一樣下，邊元素依照順序為 $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_3 \rightarrow \dots \rightarrow e_k \rightarrow e_1$ 。

(一) 跳躍數列 $T_n^{(b,s)}$ 方法數性質整理

由前面的名詞定義可知， $T_n^{(b,s)}$ ：數列長度為 n 、用球數為 b 且數列中最大數值不大於 s 的跳躍數列個數。以下為針對用球數及接球狀況的字串長度 s 所整理的相關圖表：

$\begin{matrix} s \\ \text{用球數} \end{matrix}$	用球數	用球數+1	用球數+2	用球數+3	...	用球數+n
用球數 0 顆球	$T_n^{(0,0)} = 1$	$T_n^{(0,1)} = 1$	$T_n^{(0,2)} = 1$	$T_n^{(0,3)} = 1$		$T_n^{(0,n)} = 1$
用球數 1 顆球	$T_n^{(1,1)} = 1$	$T_n^{(1,2)} = L_n^{(2)}$	$T_n^{(1,3)} = L_n^{(3)}$	$T_n^{(1,4)} = L_n^{(4)}$	...	$T_n^{(1,n+1)} = L_n^{(n+1)}$
用球數 2 顆球	$T_n^{(2,2)} = 1$	$T_n^{(2,3)} = L_n^{(3)}$	$T_n^{(2,4)}$	$T_n^{(2,5)}$	...	$T_n^{(2,n+2)}$
用球數 3 顆球	$T_n^{(3,3)} = 1$	$T_n^{(3,4)} = L_n^{(4)}$	$T_n^{(3,5)}$	$T_n^{(3,6)}$	...	$T_n^{(3,n+3)}$
⋮	⋮		⋮	⋮	...	⋮
用球數 k 顆球	$T_n^{(k,k)} = 1$	$T_n^{(k,k+1)} = L_n^{(k+1)}$	$T_n^{(k,k+2)}$	$T_n^{(k,k+3)}$	...	$T_n^{(k,k+n)}$

定理二 對於字串長度為 n 且用球數為 1 顆的跳躍數列，若跳躍數列內的數值最大值不大於 2 的情況下，其方法數為 L_n (為第 n 項盧卡斯數)，即： $T_n^{(1,2)} = \text{tr}(C^n) = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ 。

定理三 在 G_s 的情況下，若用球數為一顆球的情況下，字串長度為 n 的可能跳躍數列個數為 $T_n^{(1,s)} = \text{tr}(A^n) = L_n^{(s)}$ ，且 $L_n^{(s)}$ 為第 n 項的 s 階盧卡斯數。

由**定義六**，能夠發現一個相互對稱的狀況，而這樣的情況源自於接球狀況的表示法，對於一個字串 0 代表該秒沒有球落下，1 代表該秒有球落下之情況，而在此若是兩個相同長度的字串但用球數不同的情況下，能夠理解最終的跳躍數列字串長度相同的情況下，其跳躍數列的方法數相同，因此針對此種概念 整理成以下的**定理六**及**定理七**。

定理六 用球數為 k 個且跳躍數列中的所有值不大於 $(k+1)$ 時，跳躍數列的方法數為第 n 項的 $(k+1)$ 階盧卡斯數，即： $T_n^{(k,k+1)} = L_n^{(k+1)}$ 。

定理七 $T_n^{(b,s)} = T_n^{(s-b,s)}$ 。

(二)跳躍數列 $T_n^{(b,Y)}$ 方法數性質整理

對於各種跳躍數列 $T_n^{(b,Y)}$ 方法數，在此有著許多不同表示的方式及定理，我們將其整理為以下性質整理：

定理五 $T_n^{(1,\{1,2,3,\dots,s\})} = 1$ ，即在用球數為 1 顆且跳躍數列最大值不大於 s ，若跳躍數列中沒有 0 的情況下，跳躍數列的方法數為 1。

定理八 若 $b \in \{2,3\}$ ，則 $T_n^{(b,\{1,2,3,4\})} = T_{n-1}^{(b,\{1,2,3,4\})} + T_{n-2}^{(b,\{1,2,3,4\})} + T_{n-3}^{(b,\{1,2,3,4\})}$ ，且

n	1	2	3
$T_n^{(b,\{1,2,3,4\})}$	1	3	7

近似一般項 $T_n^{(b,\{1,2,3,4\})} \rightarrow 1.839286755214161^n$

，生成函數： $\frac{4-x-3x^3}{1-x-x^2-x^3}$ 。

定理九 對於用球數為 b 且最大值不大於 s 的跳躍數列，若跳躍數列其中的數值為正整數，則跳躍數列方法數為 $T_n^{(b-1,s-1)}$ 。

proof :

假設用球數為 b 且最大值不大於 s 且其中的數值為正整數的跳躍數列為

$H' = (a_1', a_2', \dots, a_k', \dots, a_{n-1}', a_n'), 1 \leq a_k' \leq s, a_k' \in N$ 且「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ 」; 假設 $a_k' = a_k + 1$, 則由最大值的限制可發現

$1 \leq a_1', a_2', \dots, a_k', \dots, a_{n-1}', a_n' \leq s \Rightarrow 1 \leq (a_1' + 1), (a_2' + 1), \dots, (a_n' + 1) \leq s$, 故可知 $0 \leq a_k \leq s - 1$; 又

從性質 1 可得 $a_1' + a_2' + \dots + a_k' + \dots + a_{n-1}' + a_n' = nb \Rightarrow (a_1 + 1) + \dots + (a_k + 1) + \dots + (a_n + 1) = nb$,

因此可知 $a_1 + \dots + a_k + \dots + a_n = n(b - 1)$, 可知其中的用球數為 $b - 1$ 顆, 又「對於所有 $i \neq j$ 且

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $(a_i' + i) \not\equiv (a_j' + j) \pmod{n}$ 」, 則 $((a_i + 1) + i) \not\equiv ((a_j + 1) + j) \pmod{n}$, 因此

$(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$; 藉由以上內容可得到 $0 \leq a_k \leq s - 1$ 、 $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ 且

$a_1 + \dots + a_k + \dots + a_n = n(b - 1)$, 則用球數為 b 且最大值不大於 s 且其中的數值為正整數的跳躍

數列的方法數為 $T_n^{(b-1, s-1)}$ 。■

(三) 跳躍數列 $T_n^{(b,s)}$ 表格整理

用 球 數	數列情況	特徵方程式	生成函數	近似一般項 (至小數點後 3 位)
2	$T_n^{(2,3)}$	$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4-x-3x^3}{1-x-x^2-x^3}$	$T_n^{(2,3)} \sim 1.839^n$
2	$T_n^{(2,4)}$	$x^6 - x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$	略	$T_n^{(2,4)} \sim 2.334^n$
2	$T_n^{(2,5)}$	$x^{10} - x^9 - 2x^8 - 3x^7 - 5x^6 - 6x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 0$	略	$T_n^{(2,5)} \sim 2.607^n$
2	$T_n^{(2,6)}$	$x^{15} - x^{14} - 2x^{13} - 4x^{12} - 6x^{11} - 10x^{10} - 12x^9$ $+4x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$	略	$T_n^{(2,6)} \sim 2.763^n$
2	$T_n^{(2,7)}$	$x^{21} - x^{20} - 2x^{19} - 4x^{18} - 7x^{17} - 13x^{16}$ $-22x^{15} - 28x^{14} + 4x^{13} + 6x^{12} + 6x^{11}$ $+4x^9 + 10x^8 + 10x^7 - x^5 - x^4 - x - 1 = 0$	略	$T_n^{(2,7)} \sim 2.853^n$
3	$T_n^{(3,4)}$	$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	略	$T_n^{(3,4)} \sim 1.928^n$
3	$T_n^{(3,5)}$	$x^{10} - x^9 - 2x^8 - 3x^7 - 5x^6 - 6x^5 + x^4 + x^3$ $+ x + 1 = 0$	略	$T_n^{(3,5)} \sim 2.607^n$
3	$T_n^{(3,6)}$	$x^{20} - x^{19} - 3x^{18} - 5x^{17} - 9x^{16} - 17x^{15} - 21x^{14}$ $+20x^{13} + 28x^{12} + 8x^{11} - 4x^{10} + 12x^9 + 16x^8$ $-4x^7 - 13x^6 - 11x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$	略	$T_n^{(3,6)} \sim 3.062^n$
4	$T_n^{(4,5)}$	$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	略	$T_n^{(4,5)} \sim 1.966^n$
4	$T_n^{(4,6)}$	$x^{15} - x^{14} - 2x^{13} - 4x^{12} - 6x^{11} - 10x^{10} - 12x^9 + 4x^8$ $+ 6x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$	略	$T_n^{(4,6)} \sim 2.763^n$

(四)在 G_4 圖限制跳躍數列情況之整理

用球數	數列情況	特徵方程式	生成函數	近似一般項 (至小數點後 3 位)
1	$T_n^{(1,\{1,2,3,4\})}$	$x = 1$	略	$T_n^{(1,\{1,2,3,4\})} = 1$
1	$T_n^{(1,\{0,2,3,4\})}$	$x^4 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4 - 2x - x^2 - 4x^4}{1 - x^2 - x^3 - x^4}$	$T_n^{(1,\{0,2,3,4\})} \sim 1.466^n$
1	$T_n^{(1,\{0,1,3,4\})}$	$x^4 - x^3 - x - 1 = 0$	$\frac{5 - 4x + 3x^2 - 4x^4}{1 - x - x^3 - x^4}$	$T_n^{(1,\{0,1,3,4\})} \sim 1.618^n$
1	$T_n^{(1,\{0,1,2,4\})}$	$x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$	$\frac{5 - 2x - 4x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - x - x^2 - x^4}$	$T_n^{(1,\{0,1,2,4\})} \sim 1.755^n$
1	$T_n^{(1,\{0,1,2,3\})}$	$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}$	$T_n^{(1,\{0,1,2,3\})} \sim 1.839^n$
2	$T_n^{(2,\{1,2,3,4\})}$	$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}$	$T_n^{(2,\{1,2,3,4\})} \sim 1.839^n$
2	$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})}$	$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$	$\frac{7 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - 11x^4 + 6x^6}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6}$	$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})} \sim 1.856^n$
2	$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})}$	$x^6 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1 = 0$	$\frac{6 + 4x - 6x^2 - 4x^3 - 12x^4 - 6x^5 + 6x^6}{1 - 2x^2 - 2x^3 - 2x^4 + x^6}$	$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})} \sim 1.883^n$
2	$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})}$	$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$	$\frac{7 - 4x - 3x^2 - 2x^3 - 11x^4 + 6x^6}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6}$	$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})} \sim 1.856^n$
2	$T_n^{(2,\{0,1,2,3\})}$	$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}$	$T_n^{(2,\{0,1,2,3\})} \sim 1.839^n$
3	$T_n^{(3,\{1,2,3,4\})}$	$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4 - x - 3x^3}{1 - x - x^2 - x^3}$	$T_n^{(3,\{1,2,3,4\})} \sim 1.839^n$
3	$T_n^{(3,\{0,2,3,4\})}$	$x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$	$\frac{5 - 2x - 4x^2 + 4x^3 - 4x^4}{1 - x - x^2 - x^4}$	$T_n^{(3,\{0,2,3,4\})} \sim 1.755^n$
3	$T_n^{(3,\{0,1,3,4\})}$	$x^4 - x^3 - x - 1 = 0$	$\frac{5 - 4x + 3x^2 - 4x^4}{1 - x - x^3 - x^4}$	$T_n^{(3,\{0,1,3,4\})} \sim 1.618^n$
3	$T_n^{(3,\{0,1,2,4\})}$	$x^4 - x^2 - x - 1 = 0$	$\frac{4 - 2x - x^2 - 4x^4}{1 - x^2 - x^3 - x^4}$	$T_n^{(3,\{0,1,2,4\})} \sim 1.466^n$
3	$T_n^{(3,\{0,1,2,3\})}$	$x = 1$	略	$T_n^{(3,\{0,1,2,3\})} = 1$

二、本篇研究中的數列在 OEIS 上的討論

(一) $T_n^{(b,s)}$ 的數列之相關討論

以下的表格為針對 $T_n^{(b,s)}$ 的數列進行整理，尋找收集數列的網站 OEIS 上的內容進行討論，其中每個數列後面的代表 OEIS 上的數列名稱，而在整理的過程中，發現有 OEIS 上沒有的數列，因此以「無」作為代表。

用球數 \ s	用球數+1	用球數+2	用球數+3	用球數+4	用球數+5
1 顆球	$T_n^{(1,2)} : A000032$	$T_n^{(1,3)} : A001644$	$T_n^{(1,4)} : A073817$	$T_n^{(1,5)} : A074048$	$T_n^{(1,6)} : A074584$
2 顆球	$T_n^{(2,3)} : A001644$	$T_n^{(2,4)} : \text{無}$	$T_n^{(2,5)} : \text{無}$	$T_n^{(2,6)} : \text{無}$	...
3 顆球	$T_n^{(3,4)} : A073817$	$T_n^{(3,5)} : \text{無}$	$T_n^{(3,6)} : \text{無}$	...	...
4 顆球	$T_n^{(4,5)} : A074048$	$T_n^{(4,6)} : \text{無}$	...	...	...
5 顆球	$T_n^{(5,6)} : A074584$	...	...	...	...

由以上表格可以知道 s 為用球數+1 或者用球數為 1 顆球的情況下，在 OEIS 上皆能找到相關資料，然而其他在本篇研究中所整理出的數列皆為新的數列，如： $T_n^{(2,4)}$ 、 $T_n^{(2,5)}$ 、 $T_n^{(2,6)}$ 、 $T_n^{(3,5)}$ 、 $T_n^{(3,6)}$ 、 $T_n^{(4,6)}$ 等等，這些數列皆代表著能夠滿足「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n$ 、 $1 \leq j \leq n$ ， $(a_i + i) \not\equiv (a_j + j) \pmod{n}$ 」的方法數，對此我們能夠對此給予這些數列有一個新的解釋方式，且是從來沒有人發現過的性質。

(二) $T_n^{(b,Y)}$ 的數列之相關討論

用球數	數列情況	OEIS	用球數	數列情況	OEIS
1	$T_n^{(1,\{1,2,3,4\})}$	A000012 省略討論	3	$T_n^{(3,\{1,2,3,4\})}$	A001644
1	$T_n^{(1,\{0,2,3,4\})}$	A001634	3	$T_n^{(3,\{0,2,3,4\})}$	A001641
1	$T_n^{(1,\{0,1,3,4\})}$	A001638	3	$T_n^{(3,\{0,1,3,4\})}$	A001638
1	$T_n^{(1,\{0,1,2,4\})}$	A001641	3	$T_n^{(3,\{0,1,2,4\})}$	A001634
1	$T_n^{(1,\{0,1,2,3\})}$	A001644	3	$T_n^{(3,\{0,1,2,3\})}$	A000012 省略討論

用球數	數列情況	OEIS
2	$T_n^{(2,\{1,2,3,4\})}$	A001644
2	$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})}$	無
2	$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})}$	無
2	$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})}$	無
2	$T_n^{(2,\{0,1,2,3\})}$	A001644

在特定限制下的跳躍數列，我們對於其中的狀況也和 OEIS 上的數列進行比較，最後也找出了 $T_n^{(2,\{0,2,3,4\})}$ 、 $T_n^{(2,\{0,1,3,4\})}$ 、 $T_n^{(2,\{0,1,2,4\})}$ 是 OEIS 上沒有的新數列，對此給予了這樣新的數列一個新的解釋。

(三)本篇研究新尋找之數列整理

針對於 OEIS 上沒有的新數列，整理如下，並且整理出特徵方程式及近似一般項。

用 球 數	數列情況	特徵方程式	近似一般項 (至小數點後 3 位)
2	$T_n^{(2,4)}$	$x^6 - x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$	$T_n^{(2,4)} \sim 2.334^n$
2	$T_n^{(2,5)}$	$x^{10} - x^9 - 2x^8 - 3x^7 - 5x^6 - 6x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 0$	$T_n^{(2,5)} \sim 2.607^n$
2	$T_n^{(2,6)}$	$x^{15} - x^{14} - 2x^{13} - 4x^{12} - 6x^{11} - 10x^{10} - 12x^9 + 4x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$	$T_n^{(2,6)} \sim 2.763^n$
3	$T_n^{(3,5)}$	$x^{10} - x^9 - 2x^8 - 3x^7 - 5x^6 - 6x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 0$	$T_n^{(3,5)} \sim 2.607^n$
3	$T_n^{(3,6)}$	$x^{20} - x^{19} - 3x^{18} - 5x^{17} - 9x^{16} - 17x^{15} - 21x^{14} + 20x^{13} + 28x^{12} + 8x^{11} - 4x^{10} + 12x^9 + 16x^8 - 4x^7 - 13x^6 - 11x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$	$T_n^{(3,6)} \sim 3.062^n$
4	$T_n^{(4,6)}$	$x^{15} - x^{14} - 2x^{13} - 4x^{12} - 6x^{11} - 10x^{10} - 12x^9 + 4x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 2x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$	$T_n^{(4,6)} \sim 2.763^n$
2	$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})}$	$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$	$T_n^{(2,\{0,2,3,4\})} \sim 1.856^n$
2	$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})}$	$x^6 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1 = 0$	$T_n^{(2,\{0,1,3,4\})} \sim 1.883^n$
2	$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})}$	$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$	$T_n^{(2,\{0,1,2,4\})} \sim 1.856^n$

肆、結論與應用

本篇文章單純以跳躍數列的條件「對於所有 $i \neq j$ 且 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, (a_i + i) \not\equiv (a_j + j)(\text{mod } n)$ 」進行討論，為此我們針對其中所形成的狀態有向圖進行處理，進而使用鄰接矩陣探討狀態有向圖的方法數，而從矩陣的相關性質我們可以知道鄰接矩陣的迴圈個數即為主對角值的總和，因此本篇研究一開始針對能夠對角化的矩陣進行對角化的討論，然而鄰接矩陣會因為 b 和 s 的值有所改變，可以從性質中得知鄰接矩陣的大小為 $\begin{pmatrix} s \\ b \end{pmatrix}$ 行 $\begin{pmatrix} s \\ b \end{pmatrix}$ 列，因此其大小會變得十分的龐大，縱使能夠進行對角化，在運算量上卻是無力進行，因此我們使用鄰接矩陣的性質，得知由鄰接矩陣所得到的特徵方程式及遞迴關係式可由 **Cayley-Hamilton 定理**以

行列式值求得，進而利用軟體 **Matlab** 解決特徵方程式的各解，而因為知道 $T_n^{(b,s)} = \sum_{i=1}^{\begin{pmatrix} s \\ b \end{pmatrix}} \lambda_i^n$ ，

其中一般項的形式僅需由特徵方程式的各解即可，但對於較高次方的一般項表示方式卻十分難以直接看出此數列的狀況，因此以近似一般項代替進而有一個比較簡單的表示法。

本篇研究也解決跳躍數列的生成函數表示法，其主要目的在於提供一個更具該數列代表性的方式，而非較為麻煩(遞迴關係式及初始值)的方式。

由本篇研究的內容，未來希望嘗試找尋出各個用球數之間的關係，期望找出一個更為具體的方式進行轉換。

伍、參考文獻

- [1] Fan Chung and Ron Graham(2008).Primitive Juggling Sequences. The Mathematical Association of America,America.
- [2] Michigan(2016).Generalized Eulerian Numbers and Multiplex Juggling Sequences,Collede of Saint Benedict,America.
- [3] Hilton, P.; Holton, D.; and Pedersen, J. "Fibonacci and Lucas Numbers." Ch.3 in[Mathematical Reflections in a Room with Many Mirrors](#).New York: Springer-Verlag, pp.61-85, 1997.
- [4] Rena Parindeni.(2017).Formula for Lucas Like Sequence of Fourth Step and Fifth Step. *International Mathematical Forum*, Vol. 12, 2017, no. 3, 103 – 110.
- [5] T. D. Noe and J. V. Post.(2005). Primes in Fibonacci n-Step and Lucas n-Step Sequences, *Journal of Integer Sequence*,8, 1-12.
- [6] 黃哲男、陳佩佩、郭懿慧、黃映親(民 98)。小丑的秘密-循環跳躍的數列。中華民國 第 49 屆中小學科學展覽會，未出版，台南市。

【評語】 010025

本文從小丑的丟球問題開始，討論跳躍數列的相關問題。作者利用新的數列 V 表示跳躍數列的接球狀況，接著利用狀態有向圖的方法，以「頂點」表示跳躍數列內的數值，再利用鄰接矩陣的想法進行探討，很有創意。

這個作品充分利用線性數與離散數學的基本概念，是一個相當完整的文章。