

# 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

佳作

050401

Lissajous 的神祕面紗

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：  高二 公 奕  高二 鄭育澧	指導老師：  游明俐
---------------------------------	------------------

關鍵詞：Lissajous、double point

## 摘要

兩個互相垂直的簡諧運動所構成的圖形即為 Lissajous 曲線，可寫成 
$$\begin{cases} x = p_1 \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = p_2 \cos(\alpha_2 t + c_2) \end{cases}$$

的形式，而當且僅當頻率比  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  為有理數時，圖形會形成一個封閉曲線，且會有重合與不重合兩種情況，將兩種情況分開討論，對於任意給定的頻率和相位差，我們求出了 Lissajous 曲線的二重點(double point，指曲線與其本身相交的點且曲線在該點的兩條切線斜率是相異的)參數值及其個數公式以及判別其重合與否的充要條件，也對 Lissajous 曲線的連續性質做了一些研究，包括切線斜率、反曲點個數等。並將 Lissajous 曲線拓展到三維的情況，發現大部分的情況下圖形是沒有二重點的封閉曲線，也得到了在固定頻率比的情況下，二維 Lissajous 曲線相位差的改變即為三維 Lissajous 曲線在空間中旋轉的投影這一有趣結果。

## 壹、研究動機

國中時因為想自學三角函數，便買了一本書《數學女孩：圓圓的三角函數》，書中有提到，兩個互相垂直的三角函數，其產生的軌跡即是利薩如曲線，當時就在心中埋下小小的種子。很湊巧的，升高一的暑假作業，是這本書的讀書心得，重新拾起這本書，第二次閱讀，又是另外一番滋味，在我們討論的過程中，也與利薩如曲線有了第二次的相遇，美麗的圖形吸引了我們的目光，這次，我們不滿足於書中給的介紹，便在網路上進行了一些查詢，並一起討論，發現利薩如曲線並不只是肉眼觸目所及的美，又若是三個互相垂直三角函數產生的軌跡呢？其中還有許多奧妙正等待著我們去探索。

## 貳、研究目的

- (一) 什麼情況下 Lissajous 曲線會是重和的？
- (二) Lissajous 曲線的二重點(double point)個數。
- (三) 二維 Lissajous 的連續性質。
- (四) 三維 Lissajous 的性質討論。

## 參、研究設備及器材

筆、紙、電腦

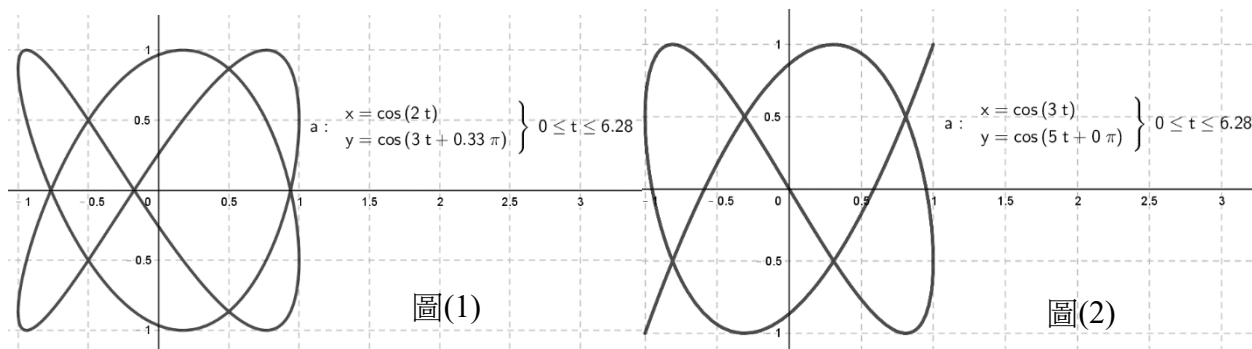
## 肆、研究過程

### 1 初步探討

**Definition 1.** (二維)利薩如曲線(Lissajous curve)

平面上以參數式  $\begin{cases} x = p_1 \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = p_2 \cos(\alpha_2 t + c_2) \end{cases}$  所定義的圖形稱為 Lissajous curve，其中  $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2$

為非 0 實數， $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 。並稱  $p_1, p_2$  為振幅， $\alpha_1, \alpha_2$  為頻率， $c_1, c_2$  為起始相位，如圖(1)、(2)。



由於振幅  $p_1, p_2$  只控制圖形在  $x, y$  方向上的縮放，故接下來我們只討論  $p_1 = p_2 = 1$ ，形如

$\begin{cases} x = \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = \cos(\alpha_2 t + c_2) \end{cases}$  的 Lissajous 曲線。

**Lemma 1.** 圖形  $\begin{cases} x = \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = \cos(\alpha_2 t + c_2) \end{cases}$  有週期  $r$  若且唯若  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  為有理數。

取  $n_1, n_2$  為  $\alpha_1, \alpha_2$  的最簡整數比，即可得到：

**Lemma 2.** 對所有頻率比為有理數的 Lissajous 曲線  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = \cos(\alpha_2 t + c_2) \end{cases}$ ， $\Gamma$  亦可被表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \end{cases}$ ， $t \in [0, 2\pi)$  的形式(其中  $n_1, n_2$  是兩互質的整數)。

此外我們還有  $\sin(n_1 t' + c_1) = -\sin(-n_1 t' - c_1)$ ，而這只是對  $x$  軸(或  $y$  軸)做對稱而已，故只需討論  $n_1, n_2$  為互質正整數的情況即可。

**Lemma 3.** 對所有曲線  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \end{cases}$ ，存在  $\phi \in [0, 2\pi)$  使得  $\Gamma$  可被表示成  $\Gamma': \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$ ， $t \in [0, 2\pi)$  的形式。

**Proof:** 令  $t' = t + \frac{c_1}{n_1}$  帶入  $\Gamma$  即得證。

※以下的討論皆為頻率比為有理數的曲線，為求方便， $\Gamma$  代表的是曲線  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \end{cases}$ 。

## 2 重合

**Definition 2.** 重合:

對以參數式定義的圖形  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ，若存在  $t_0$  使得對所有  $t$  皆有  $\begin{cases} x(t_0 - t) = x(t_0 + t) \\ y(t_0 - t) = y(t_0 + t) \end{cases}$ ，則稱此圖

形是重合的(當然， $t_0$  和  $t$  需在定義域內)，並稱  $t_0$  為端點參數。

**Theorem 1.** 對  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \end{cases}$ ，圖形是重合的充要條件為  $\frac{1}{\pi}(n_1 c_2 - n_2 c_1)$  為整數。且

有:

(a) 令  $t_0$  為重合的端點參數，則有  $t_0 + \pi$  亦為端點參數。(當然，有  $t_0, t_0 + \pi \in [0, 2\pi)$ )

(b)  $(\sin(n_1 t_0 + c_1), \sin(n_2 t_0 + c_2))$ 、 $(\sin(n_1(t_0 + \pi) + c_1), \sin(n_2(t_0 + \pi) + c_2))$  為  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  的四個頂點中相異的兩個。

(c) 只需考慮  $t \in [t_0, t_0 + \pi]$  即可得到完整的圖形。

**Proof:** 由定義知若圖形重合則存在  $t_0$  使得對所有  $t \in R$ ，

$$\begin{cases} \cos(n_1(t_0 + t) + c_1) = \cos(n_1(t_0 - t) + c_1) \\ \cos(n_2(t_0 + t) + c_2) = \cos(n_2(t_0 - t) + c_2) \end{cases} \text{ 恆成立。}$$

考慮第一式有  $[n_1(t_0 + t) + c_1] - [n_1(t_0 - t) + c_1] = 2n_1 t = 2k\pi$  或

$$[n_1(t_0 + t) + c_1] + [n_1(t_0 - t) + c_1] = 2n_1 t_0 + 2c_1 = 2h\pi \quad (\text{其中 } k, h \in Z)$$

顯然對所有  $t$ ，不可能  $\frac{n_1 t}{\pi}$  皆為整數，故只需考慮  $2n_1 t_0 + 2c_1 = 2h\pi$  的情況。

$$\Rightarrow \text{原式等價於 } \begin{cases} 2n_1 t_0 + 2c_1 = 2h_1 \pi \\ 2n_2 t_0 + 2c_2 = 2h_2 \pi \end{cases} \dots\dots(1)$$

$$\Rightarrow \frac{2h_1 \pi - 2c_1}{n_1} = 2t_0 = \frac{2h_2 \pi - 2c_2}{n_2} \dots\dots(2)$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{\pi}(n_1 c_2 - n_2 c_1) = n_1 h_2 - n_2 h_1。$$

顯然等式右邊為一整數，且由 **Be'zout Theorem** 知等號右邊可取到所有整數(因為  $n_1, n_2$  互質)，

故等號成立的充要條件即為  $\frac{1}{\pi}(n_1 c_2 - n_2 c_1) \in Z$ 。□

帶入即可證  $t_0 + \pi$  亦是端點參數。□



接下來要證明  $t_0$  和  $t_0 + \pi$  對應到的頂點是不同的，我們有

$$\begin{cases} \cos(n_1 t_0 + c_1) = \cos(h_1 \pi) = \pm 1 \\ \cos(n_2 t_0 + c_2) = \cos(h_2 \pi) = \pm 1 \end{cases}, \begin{cases} \cos(n_1(t_0 + \pi) + c_1) = \cos((h_1 + n_1)\pi) = \pm 1 \\ \cos(n_2(t_0 + \pi) + c_2) = \cos((h_2 + n_2)\pi) = \pm 1 \end{cases}$$

而  $\cos(h\pi)$  的取值為 1 或 -1 則是由  $h$  之奇偶性決定的。

又顯然若  $(h_1, h_2)$  和  $(h_1 + n_1, h_2 + n_2)$  之奇偶性完全一致則  $n_1, n_2$  皆為偶數，有公因數 2，矛盾。

$\Rightarrow (\cos(n_1 t_0 + c_1), \cos(n_2 t_0 + c_2)), (\cos(n_1(t_0 + \pi) + c_1), \cos(n_2(t_0 + \pi) + c_2))$  是不同的頂點。□

最後，對所有  $t \notin [t_0, t_0 + \pi]$ ，皆存在  $t' = 2t_0 - t \in [t_0, t_0 + \pi]$  使得

$$\begin{cases} \cos(n_1 t + c_1) = \cos(n_1(t_0 - (t_0 - t) + c_1) = \cos(n_1(t_0 + (t_0 - t) + c_1) = \cos(n_1 t' + c_1) \\ \cos(n_2 t + c_2) = \cos(n_2(t_0 - (t_0 - t) + c_2) = \cos(n_2(t_0 + (t_0 - t) + c_2) = \cos(n_2 t' + c_2) \end{cases},$$

故只需考慮  $t \in [t_0, t_0 + \pi]$  即可得到完整的圖形。□

**Corollary 1:** 無相位差的曲線  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \end{cases}$  必是重合的。

**Theorem 2.** 重合的曲線必可表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \end{cases}$ ， $t \in [0, \pi]$  的形式。( $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ )

**Proof:** 若  $\Gamma$  是重合的則由 **Theorem 1** 知，存在  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  使得  $\frac{k_1 \pi - c_1}{n_1} = \frac{k_2 \pi - c_2}{n_2} = t_0$  ( $t_0$  為端點

參數)。令  $t' = t - t_0$  帶入原式得  $x(t) = \cos(n_1 t + c_1) = \cos(n_1(t' + t_0) + c_1) = \cos(n_1 t' + k_1 \pi)$ ，

同理有  $y(t) = \cos(n_2 t' + k_2 \pi)$ ，且因  $t \in [t_0, t_0 + \pi] \Rightarrow t' \in [0, \pi]$ ，

所以  $\Gamma$  也可表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \end{cases}$ ， $t \in [0, \pi]$  的形式。 *QED*

對所有頻率固定的圖形  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$ ，顯然只需考慮  $\phi \in [0, 2\pi)$ ，即可得到所有的圖形，但

其實這並不是他的最小週期，因此有了以下的性質：

**Proposition 1.** 對所有的頻率比為  $\frac{n_1}{n_2}$  之曲線  $\Gamma$ ，都存在唯一的  $\phi_0 \in [0, \frac{\pi}{n_1}]$  使得其可表示

成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi_0) \end{cases}$  的形式。

**Proof:**約定符號  $\phi \sim \phi_0$  代表  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$  和  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi_0) \end{cases}$  有相同的圖形。

不難驗證  $\phi \sim \phi + 2k\pi$  ( $\forall k \in \mathbb{Z}$ ) 對所有  $\phi$  恆成立。

又參數值的平移，不影響其圖形，將  $t = t_0 + \frac{2k\pi}{n_1}$  代入原式，得到  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + 2k\pi) = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t_0 + \frac{2n_2 k\pi}{n_1} + \phi) \end{cases}$

和  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$  的圖形相同，故  $\phi \sim \phi + \frac{2n_2 k\pi}{n_1}$ 。

結合前面兩點可知  $\phi \sim \phi + 2k\pi + \frac{2n_2 h\pi}{n_1}$  對所有整數  $k, h$  皆成立，又  $n_1, n_2$  為互質整數，故必存

在整數  $k', h'$  使得  $2k'\pi + \frac{2n_2 h'\pi}{n_1} = \frac{2\pi}{n_1}$  (**Bézout's Theorem**)

故  $\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{n_1}$ 。 $(\forall \phi \in [0, 2\pi), \exists \phi_0 \in [0, \frac{2\pi}{n_1})$  使得  $\phi \sim \phi_0$ )

接著，令  $t = -t_0 - \frac{2k\pi}{n_1}$  代入， $\begin{cases} x = \cos(-n_1 t - 2k\pi) = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(-n_2 t_0 - \frac{2n_2 k\pi}{n_1} + \phi) = \cos(n_2 t_0 + \frac{2n_2 k\pi}{n_1} - \phi) \end{cases}$

$\Rightarrow \phi \sim \frac{2n_2 k\pi}{n_1} - \phi$ ，同理可證  $\phi \sim \frac{2\pi}{n_1} - \phi$ 。

故  $\forall \phi \in [\frac{\pi}{n_1}, \frac{2\pi}{n_1})$ ， $\frac{2\pi}{n_1} - \phi \in (0, \frac{\pi}{n_1}]$  且  $\phi \sim \frac{2\pi}{n_1} - \phi$ ，

$\Rightarrow \forall \phi \in [0, 2\pi), \exists \phi_0 \in [0, \frac{\pi}{n_1}]$  使得  $\phi \sim \phi_0$  **QED**

### 3 二重點

**Definition 3.**二重點 (double point):

曲線軌跡和它本身相交的點，且使得該曲線在那點有兩條斜率不同的切線。

**Theorem 3.** 對不重合的 Lissajous 圖形  $\Gamma$ ，其共有  $2n_1 n_2 - n_1 - n_2$  個二重點，且每個二重點的兩不同參數值  $t$  (模  $2\pi$ )，皆為下列兩種形式之一：

(I)  $t = (\frac{\pm k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2}$ ， $(k, h) \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}$ ，共有  $n_2(n_1 - 1)$  個二重點。

(II)  $t = (\frac{h}{n_1} + \frac{\pm k}{n_2})\pi - \frac{c_1}{n_1}$ ， $(k, h) \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ ，共有  $n_1(n_2 - 1)$  個二重點。

**Proof:** 圖形有二重點，即為存在  $t_1 \neq t_2 \pmod{2\pi}$  使得  $\begin{cases} \cos(n_1 t_1 + c_1) = \cos(n_1 t_2 + c_1) \\ \cos(n_2 t_1 + c_2) = \cos(n_2 t_2 + c_2) \end{cases}$ ，等價於

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1} \pi \dots (1) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi - \frac{2c_1}{n_1} \dots (1') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2}{n_2} \pi \dots (2) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2} \pi - \frac{2c_2}{n_2} \dots (2') \end{cases}, k_1, k_2, h_1, h_2 \in \mathbb{Z}.$$

分成以下四種情況：

(i)、(1)(2)同時成立， $t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1} \pi = \frac{2k_2}{n_2} \pi$ ：

我們有  $n_2 k_1 = n_1 k_2$  且  $n_1, n_2$  互質，故  $n_1 \mid k_1$ ，此時  $t_1 - t_2 = 2(\frac{k_1}{n_1})\pi$ ，無解。

(ii)、(1')(2')同時成立， $t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi - \frac{2c_1}{n_1} = \frac{2h_2}{n_2} \pi - \frac{2c_2}{n_2}$ ：

整理得  $\frac{1}{\pi}(n_1 c_2 - n_2 c_1) = n_1 h_2 - n_2 h_1$  為一整數。故其是重和的。(由 **Theorem 1.**)

(iii)、(1)(2')同時成立， $t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1} \pi \wedge t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2} \pi - \frac{2c_2}{n_2}$ ：

$$\text{解得 } (t_1, t_2) = ((\frac{k_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2}, (\frac{-k_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2}),$$

因為  $x(t + 2\pi) = x(t) \wedge y(t + 2\pi) = y(t)$

故只需考慮  $k_1 \in \{1, 2, \dots, 2n_1 - 1\} \setminus \{n_1\}$ 、 $h_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 2n_2 - 1\}$

而  $k_1$  不能是  $n_1$  的倍數理由同(i)。

$$\text{令 } A = \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}, A' = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, 2n_1 - 1\}$$

$$B = \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}, B' = \{n_2, n_2 + 1, \dots, 2n_2 - 1\}$$

接下來要證明其實只要考慮  $(k_1, h_2) \in A \times B$  即可得到全部的二重點。

約定  $P(k, h)$  代表數對  $((\frac{k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2}, (\frac{-k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2})$ ，

$Q(k, h)$  代表數對  $((\frac{-k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2}, (\frac{k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2})$ ，

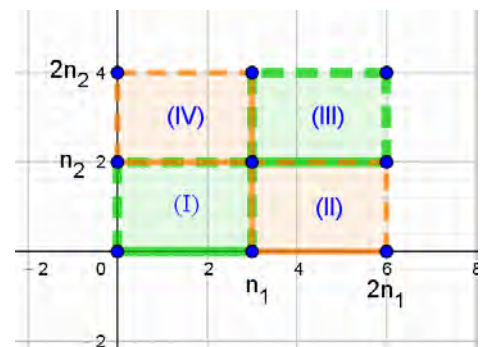
圖(3)

(III)  $\forall (k, h) \in A' \times B', (k - n_1, h - n_2) \in A \times B$  且

$$P(k, h) \equiv P(k - n_1, h - n_2) \pmod{2\pi}$$

(II)  $\forall (k, h) \in A' \times B, (-k + 2n_1, h) \in A \times B$  且

$$P(k, h) \equiv Q(-k + 2n_1, h) \pmod{2\pi}$$



(IV)  $\forall (k, h) \in A \times B', (-k + n_1, h - n_2) \in A \times B$  且

$$P(k, h) \equiv Q(-k + n_1, h - n_2) \pmod{2\pi} \square$$

接著要證對所有相異的  $(k, h), (k', h') \in A \times B$  ,  $P(k, h)$  和  $P(k', h')$  得到的二重點是不同的

令  $P(k, h) = (t_1, t_2)$  、  $P(k', h') = (t_1', t_2')$  , 其代表相同的二重點等價於  $(t_1, t_1')$  滿足(1)(2')

或(1')(2)或  $(t_1, t_2')$  滿足(1)(2')或(1')(2)

$$\begin{aligned} (t_1, t_1') \text{ 同時滿足(1)(2')} &\Rightarrow \frac{k-k'}{n_1} + \frac{h-h'}{n_2} = \frac{2r}{n_1} \wedge \frac{k+k'}{n_1} + \frac{h+h'}{n_2} = \frac{2s}{n_2} \\ &\Rightarrow 2 \mid k-k', h=h' \wedge k+k'=n_1, 2 \mid k+k'=n_1 \wedge 2 \mid n_2, \text{ 矛盾。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t_1, t_1') \text{ 同時滿足(1')(2)} &\Rightarrow \frac{k-k'}{n_1} + \frac{h-h'}{n_2} = \frac{2r}{n_2} \wedge \frac{k+k'-2s}{n_1} \pi + \frac{h+h'}{n_2} \pi = \frac{2c_2}{n_2} - \frac{2c_1}{n_1} \\ &\Rightarrow 2 \mid h-h', k=k' \Rightarrow \frac{1}{\pi}(n_1 c_2 - n_2 c_1) \in \mathbb{Z}, \text{ 重合。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t_1, t_2') \text{ 同時滿足(1)(2')} &\Rightarrow \frac{k+k'}{n_1} + \frac{h-h'}{n_2} = \frac{2r}{n_2} \wedge \frac{k-k'}{n_1} + \frac{h+h'}{n_2} = \frac{2s}{n_2} \\ &\Rightarrow k=k' \text{ 且 } h=h', \text{ 與相異的假設矛盾。} \end{aligned}$$

$(t_1, t_2')$  同時滿足(1')(2)  $\Rightarrow$  同  $(t_1, t_1')$  同時滿足(1')(2) 的情況。  $\square$

故考慮  $(k_1, h_2) \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}$  恰可得到所有二重點，共  $n_2(n_1 - 1)$  個。

$$(iv) \text{、} (1')(2) \text{ 同時成立, } t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi - \frac{2c_1}{n_1} \wedge t_1 - t_2 = \frac{2k_2}{n_2} \pi :$$

$$\text{同(iii)可得 } (t_1, t_2) = \left( \left( \frac{h_1}{n_1} + \frac{k_2}{n_2} \right) \pi - \frac{c_1}{n_1}, \left( \frac{h_1}{n_1} + \frac{-k_2}{n_2} \right) \pi - \frac{c_1}{n_1} \right),$$

考慮  $(k_2, h_1) \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$  恰可得到所有二重點，共  $n_1(n_2 - 1)$  個。

又在不重合的情況下(iii)、(iv)所得出的二重點是不會重複的，結合上述四種情況，即有一不

重合的 Lissajous 圖形有  $2n_1 n_2 - n_1 - n_2$  個二重點，且每個二重點都擁有 2 個不同的參數值 (模

$2\pi$ )，分別是 (I)  $\left( \frac{\pm k}{n_1} + \frac{h}{n_2} \right) \pi - \frac{c_2}{n_2}$  其中， $(k, h) \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}$  或是 (II)

$\left( \frac{h}{n_1} + \frac{\pm k}{n_2} \right) \pi - \frac{c_1}{n_1}$ ，其中  $(k, h) \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ 。 QED

**Theorem 4.** 對重合的曲線  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \end{cases}$ ，其共有  $\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 1)$  個二重點，且每

個二重點皆擁有四個不同的參數值(模  $2\pi$ )，分別是  $\left( \frac{\pm r}{n_1} + \frac{\pm s}{n_2} \right) \pi$ ，不妨假設  $n_1$  是奇數，則

其中  $(r, s) \in \{1, 2, \dots, \frac{n_1 - 1}{2}\} \times \{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$ 。

**Proof:**類似 **Theorem 3.**地有 
$$\begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{2r_1\pi}{n_1} \dots (1) \vee t_1 + t_2 = \frac{2s_1\pi}{n_1} \dots (1') \\ t_1 - t_2 = \frac{2r_2\pi}{n_2} \dots (2) \vee t_1 + t_2 = \frac{2s_2\pi}{n_2} \dots (2') \end{cases}, \text{ 其中 } r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$$

同樣的分成四種情況討論：

(i)、(1)(2)同時成立， $t_1 - t_2 = \frac{2r_1\pi}{n_1} = \frac{2r_2\pi}{n_2}$ ：無解(同 **Theorem 3.** (i))。

(ii)、(1')(2')同時成立， $t_1 + t_2 = \frac{2s_1\pi}{n_1} = \frac{2s_2\pi}{n_2} \Rightarrow n_1 \mid s_1, t_1 + t_2 = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ ，故對所有參數值 $t$ ， $-t$ 所代表的點和 $t$ 相同，但微分可得 $\Gamma$ 在 $t$ 處和在 $-t$ 處的切線斜率是相同的，故不是二重點。

(iii)、(1)(2')同時成立， $t_1 - t_2 = \frac{2r_1\pi}{n_1} \wedge t_1 + t_2 = \frac{2s_2\pi}{n_2}$ ：

$$\text{解得 } t_1 = \left(\frac{r_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2}\right)\pi, t_2 = \left(\frac{-r_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2}\right)\pi,$$

類似 **Theorem 3.**知只需考慮 $(r_1, s_2) \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \times \{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$ 即可得到所有二重點。

但在重合的情況下，尚須考慮 $t$ 、 $2m\pi - t$  ( $m$ 是整數)代表的是同一點這一事實。

約定 $P(r, s)$ 代表數對 $\left(\left(\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2}\right)\pi, \left(\frac{-r}{n_1} + \frac{s}{n_2}\right)\pi\right)$ ，

令 $P(r, s) = (t_1, t_2)$ 、 $P(r', s') = (t_1', t_2')$ ，其中 $r, r' \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ 、 $s, s' \in \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}$

若 $t_1 + t_2 = \left(\frac{r+r'}{n_1} + \frac{s+s'}{n_2}\right)\pi = 2m\pi$ ，則考慮 $r, r', s, s'$ 的範圍可得 $m = 1$ ，

故 $n_2(r+r') + n_1(s+s') = 2n_1n_2$ ， $n_1 \mid r+r' \Rightarrow r+r' = n_1, s+s' = n_2$ 。

若 $t_1 + t_2' = \left(\frac{r-r'}{n_1} + \frac{s+s'}{n_2}\right)\pi = 2m\pi$ ，則考慮 $r, r', s, s'$ 的範圍可得 $m = 0 \vee 1$ ，

$m = 0 \Rightarrow n_2(r'-r) = n_1(s+s'), n_1 \mid r'-r \Rightarrow r = r', s+s' = 0$ ，無解。

$m = 1 \Rightarrow n_2(r-r') + n_1(s+s') = 2n_1n_2, n_1 \mid r'-r \Rightarrow r = r', s+s' = 2n_2$ ，無解。

故對所有屬於 $\{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \times \{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$  (圖(3)之(I))中的數對 $(r, s)$ ，僅有 $(n_1 - r, n_2 - s)$ 與其代表的點是相同的，其幾何意義即為 $(r, s)$ 對 $(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})$ 的對稱點，由於 $n_1, n_2$ 互質，其中必有一個不是偶數，不妨令 $n_1$ 是奇數，則 $\{1, 2, \dots, \frac{n_1-1}{2}\} \times \{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$ 滿足其所有點對 $(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})$ 對稱後

會洽會完全落在另一半 $(\{\frac{n_1+1}{2}, \frac{n_1+3}{2}, \dots, n_1 - 1\} \times \{1, 2, \dots, n_2 - 1\})$ 裡，故裡頭的所有點恰好對應到

一個重和 Lissajous 曲線的二重點，共有  $\frac{1}{2}(n_1-1)(n_2-1)$  個。

$$(iv)、(1')(2) \text{ 同時成立， } t_1 + t_2 = \frac{2s_1\pi}{n_1} \wedge t_1 - t_2 = \frac{2r_2\pi}{n_2} :$$

同(iii)有  $t_1 = (\frac{s_1}{n_1} + \frac{r_2}{n_2})\pi$ 、 $t_2 = (\frac{s_1}{n_1} + \frac{-r_2}{n_2})\pi$ ，令  $s_1 = x, r_2 = y$  即有

$$(t_1, t_2) = ((\frac{x}{n_1} + \frac{y}{n_2})\pi, (\frac{x}{n_1} + \frac{-y}{n_2})\pi)，對照(iii)中的解(t_1', t_2') = ((\frac{x}{n_1} + \frac{y}{n_2})\pi, (\frac{-x}{n_1} + \frac{y}{n_2})\pi)$$

(令  $r_1 = x, s_2 = y$ )即有  $t_1 = t_1', t_2 + t_2' = 0\pi$ ，故其代表的是同一二重點。

結合上述四種情況，一重和 Lissajous 曲線共有  $\frac{1}{2}(n_1-1)(n_2-1)$  個二重點，且每個二重點都擁

有 4 個不同的參數值(模  $2\pi$ )，分別是  $(\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi, (\frac{-r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi, (\frac{r}{n_1} + \frac{-s}{n_2})\pi, (\frac{-r}{n_1} + \frac{-s}{n_2})\pi$ ，其中

$(r, s) \in \{1, 2, \dots, \frac{n_1-1}{2}\} \times \{1, 2, \dots, n_2-1\}$  (假設  $n_1$  是奇數)。QED

## 4 分割區塊數

**Theorem 5.** 若圖形  $\Gamma$  不重合，則其將  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  分割成  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$  塊區域。

若圖形  $\Gamma$  重合，則其將  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  分割成  $\frac{1}{2}(n_1+1)(n_2+1)$  塊區域。

**Proof:** 運用歐拉定理  $v - e + f = 2$ ，其中  $v$  為頂點數、 $e$  為邊數、 $f$  為平面分割數。

先證明不重合的情況(如圖(5))，由 **Theorem 1.** 的內容反推可得到重合與  $\Gamma$  通過  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$

的頂點是等價的。所以不重合時  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  的頂點不在  $\Gamma$  上。

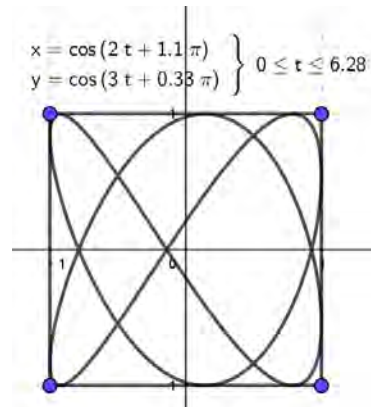
考慮  $\Gamma$  與  $x = \pm 1$  的交點，

$$\Rightarrow t = \frac{k_1\pi - c_1}{n_1} \wedge t \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{c_1}{\pi} \leq k_1 < 2n_1 + \frac{c_1}{\pi}，這樣的  $k_1$  有  $2n_1$  個，$$

且這  $2n_1$  個  $k_1$  所得到的交點皆是不同的。

同理  $\Gamma$  與  $y = \pm 1$  會有  $2n_2$  個交點。



圖(5)

$\Rightarrow \Gamma$  和  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$  四條邊界的交點數總共有  $2n_1 + 2n_2$  個(不妨稱其為「邊點」)。由 **Theorem**

**3.** 知  $\Gamma$  本身有  $2n_1n_2 - n_1 - n_2$  個二重點，再加上  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$  的 4 頂點得  $v = 2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 4$ 。

而圖中每個頂點(4 個)以外的點都接了 4 條線，每條不以頂點為端點的邊都有 2 個端點，而

以頂點為端點的邊共有 8 條，故其總邊數  $e = \frac{4(2n_1n_2 + n_1 + n_2) - 8}{2} + 8 = 4n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 4$ 。

由歐拉定理得  $\Gamma$  將  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$  分割出的區塊個數為

$$f - 1 = e - v + 1 = 4n_1n_2 + 2n_1 + 2n_2 + 4 - (2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 4) + 1 = 2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1 \quad \square$$

至於重合的情況(如圖(6))

討論  $\begin{cases} x = \cos(n_1t + k_1\pi) \\ y = \cos(n_2t + k_2\pi) \end{cases}$  與  $x = \pm 1$  的交點，

$$\Rightarrow t = \frac{h_1\pi}{n_1} \wedge t \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow 0 \leq h_1 \leq n_1$$

$\Rightarrow k_1$  有  $n_1 + 1$  個解，且這  $n_1 + 1$  個解所對應到的交點亦是不同的。

同理有  $\Gamma$  和  $y = \pm 1$  的交點有  $n_2 + 1$  個。

但當  $h_1 = 0 \vee n_1$  時對應到的點會是  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$  的頂點，

所以  $\Gamma$  和  $x = \pm 1$ 、 $y = \pm 1$  的交點個數應為  $(n_1 + 1) + (n_2 + 1) - 2 = n_1 + n_2$  個。

經由類似的討論可以得到： $v = (n_1 + n_2) + \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 1) + 2 = \frac{1}{2}(n_1n_2 + n_1 + n_2 + 5)$

$$e = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}(n_1n_2 + n_1 + n_2 - 3) - 10}{2} + 10 = n_1n_2 + n_1 + n_2 + 2$$

$$\Rightarrow f - 1 = e - v + 1 = \frac{1}{2}(n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1) = \frac{1}{2}(n_1 + 1)(n_2 + 1) \quad \square$$

## 5 Lissajous 曲線的一些連續性質

**Theorem 6.** 曲線上所有二重點之兩切線斜率等值異號。

**Proof:** 微分可得  $\Gamma$  在  $t$  處切線斜率為  $\frac{n_2 \sin(n_2t + c_2)}{n_1 \sin(n_1t + c_1)}$ ，先證不重合的情況，**Theorem 3** 之(I)中

二重點的兩參數值為  $(t_1, t_2) = ((\frac{k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2}, (-\frac{k}{n_1} + \frac{h}{n_2})\pi - \frac{c_2}{n_2})$ ，令  $m_1$ 、 $m_2$  代表兩切線斜率，

$$\text{代入得 } (m_1, m_2) = \left( \frac{n_2 \cos((\frac{n_2}{n_1}k + h)\pi)}{n_1 \cos((k + \frac{n_1}{n_2}h)\pi - \frac{n_1c_2}{n_2} + c_1)}, \frac{n_2 \cos((-\frac{n_2}{n_1}k + h)\pi)}{n_1 \cos((-k + \frac{n_1}{n_2}h)\pi - \frac{n_1c_2}{n_2} + c_1)} \right)$$

$\Rightarrow m_1 = -m_2$ ，而(II)和重合情況同理可證。 **QED**

**Theorem 7.** 曲線  $\Gamma$  在  $t$  處的曲率為

$$\frac{n_1 n_2 |(n_1 + n_2) \sin((n_1 - n_2)t + c_1 - c_2) - (n_1 - n_2) \sin((n_1 + n_2)t + c_1 + c_2)|}{2(n_1^2 \sin^2(n_1 t + c_1) + n_2^2 \sin^2(n_2 t + c_2))^{\frac{3}{2}}}。$$

**Proof:** 對一二維參數曲線，其在  $t$  處的曲率為  $\frac{|y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)|}{(y'(t)^2 + x'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，計算即可得□

另一我們欲探討的主題為反曲點，由 **Theorem 7.**，不難算出  $\Gamma$  在  $t$  處的二階導數為

$$\frac{n_2}{n_1 \sin^2(n_1 t + c_1)} (n_2 \sin(n_1 t + c_1) \cos(n_2 t + c_2) - n_1 \cos(n_1 t + c_1) \sin(n_2 t + c_2))。$$

$$\text{又 } n_2 \sin(n_1 t + c_1) \cos(n_2 t + c_2) - n_1 \cos(n_1 t + c_1) \sin(n_2 t + c_2) = \frac{1}{2} (A \sin(Bt + \varphi) + B \sin(At + \phi))$$

其中  $A = n_1 + n_2, B = n_1 - n_2, \phi = c_1 + c_2 + \pi, \varphi = c_1 - c_2$ ，令  $d(t) = A \sin(Bt + \varphi) + B \sin(At + \phi)$ 。

$\Rightarrow d(t) = 0$  為反曲點之參數須滿足的必要條件。

又若  $d$  與  $x$  軸相切在某處，則存在  $t_0$  使得  $d(t_0) = d'(t_0) = 0$ ，

$$d'(t) = AB(\cos(Bt + \varphi) + \cos(At + \phi)) \Rightarrow \cos(Bt_0 + \varphi) = -\cos(At_0 + \phi)$$

$$\Rightarrow \sin(Bt_0 + \varphi) = \pm \sin(At_0 + \phi)，\text{與 } d(t_0) = 0 \text{ 矛盾。}$$

故  $d(t) = 0$  即為該點是反曲點條之充要條件。

**Lemma 4.**  $A \sin(Bx + \varphi) + B \sin(Ax + \phi) = 0$  在  $[0, 2\pi)$  的區間內有  $2 \min(A, B)$  個解。

**Proof:**  $A = B$  時顯然是對的，不妨假設  $A > B$ 。

考慮  $f(x) = A \sin(Bx + \varphi)$  和  $g(x) = -B \sin(Ax + \phi)$  兩圖形的交點。

顯然  $|g(x)| \leq B$ ，故交點必發生在  $|f(x)| \leq B$  之處。

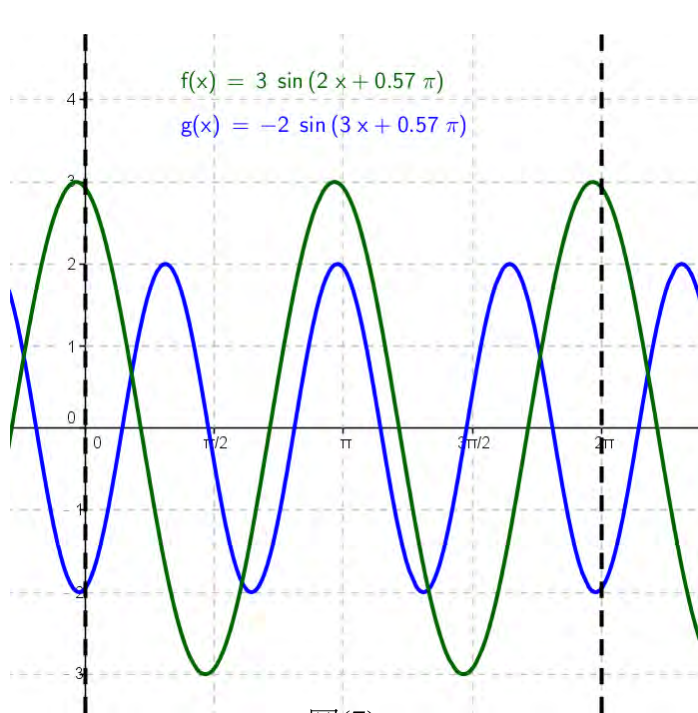
$$f(x) = B \Rightarrow x = \frac{1}{B} (2k\pi - \varphi + \arcsin \frac{B}{A}) \vee \frac{1}{B} ((2h+1)\pi - \varphi - \arcsin \frac{B}{A})$$

$$f(x) = -B \Rightarrow x = \frac{1}{B} (2k\pi - \varphi - \arcsin \frac{B}{A}) \vee \frac{1}{B} ((2h+1)\pi - \varphi + \arcsin \frac{B}{A})$$

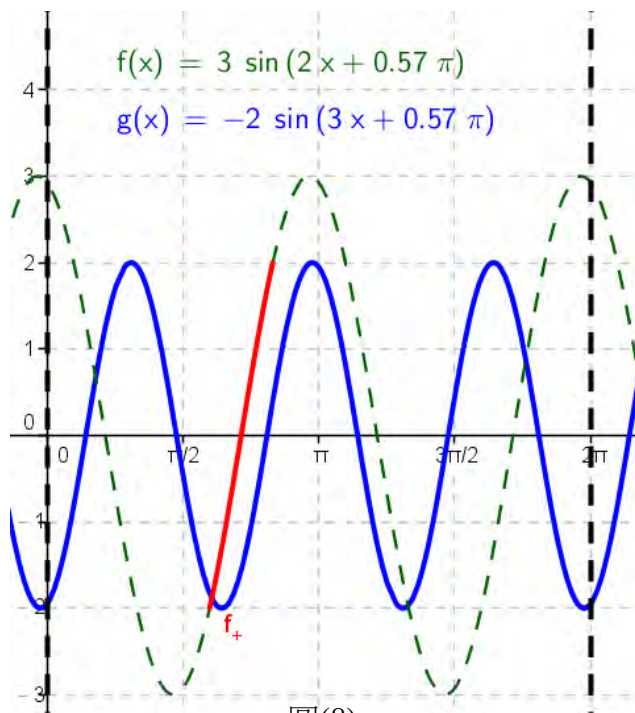


接下來我們要證明對所有整數  $k$ ， $x \in [\frac{1}{B}(2k\pi - \varphi - \arcsin \frac{B}{A}), \frac{1}{B}(2k\pi - \varphi + \arcsin \frac{B}{A})]$  ( $f$  的遞增

部分，接下來稱它為  $f_+$ ) 時， $f$  和  $g$  有且僅有一個交點。(遞減部分同理可證)。



圖(7)



圖(8)

令

$$a = \frac{1}{B}(2k\pi - \varphi - \arcsin \frac{B}{A}), b = \frac{1}{B}(2k\pi - \varphi + \arcsin \frac{B}{A}), f(a) = -B \leq g(a), f(b) = B \geq g(b)$$

又  $f$  和  $g$  皆為連續的，故其在  $[a, b]$  間的交點個數必為奇數個，兩等號不可能同時成立(因為

$0 < \frac{B}{A} < 1$  且  $\sin x$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是凹的，所以可推出  $b - a = \frac{2}{B} \arcsin \frac{B}{A} < g$  的半周期  $\frac{\pi}{A}$ )。

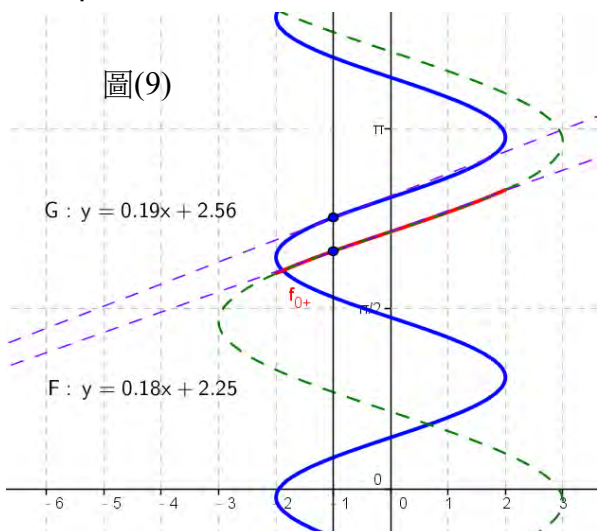
$$\text{假設 } f(x_1) = g(x_2) = p, \text{ 則 } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{B}((\arcsin \frac{p}{A}) - \varphi) + \frac{2k\pi}{B} \vee \frac{1}{B}((-\arcsin \frac{p}{A}) - \varphi) + \frac{(2h+1)\pi}{B} \\ x_2 = \frac{1}{A}((\arcsin \frac{p}{B}) - \varphi) + \frac{2k\pi}{A} \vee \frac{1}{A}((\arcsin \frac{p}{B}) - \varphi) + \frac{(2h+1)\pi}{A} \end{cases}$$

$$f'(x_1) = \pm AB \cos(\arcsin \frac{p}{A}) = \pm AB \sqrt{1 - (\frac{p}{A})^2}, g'(x_2) = \pm AB \sqrt{1 - (\frac{p}{B})^2}.$$

將  $f$  和  $g$  對  $y = x$  鏡射得到的圖形稱為  $f_0$  和  $g_0$  ( $f_+$

對  $y = x$  鏡射變換後稱為  $f_{0+}$ )，由上述知當  $f_0$  上  $x$  座

標相同的點其切線斜率的絕對值樣的定義



圖(9)

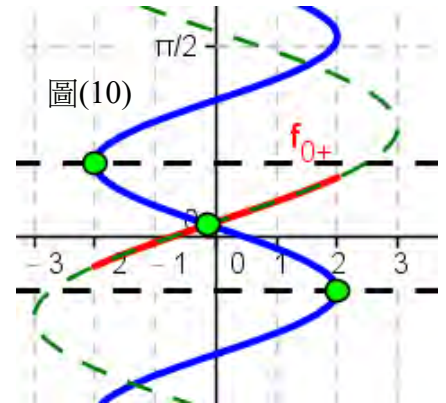
$$G(x) = \frac{1}{AB\sqrt{1-\left(\frac{p}{B}\right)^2}}, \text{ 由 } A > B \text{ 的假}$$

設可知，對所有  $x$  皆有  $F(x) < G(x)$ 。

又由於  $b-a = \frac{2}{B} \arcsin \frac{B}{A} < g$  的半周期  $\frac{\pi}{A}$ ，所以可照  $f_{0+}$  與  $g_0$  的相對關係分成以下三種情況：

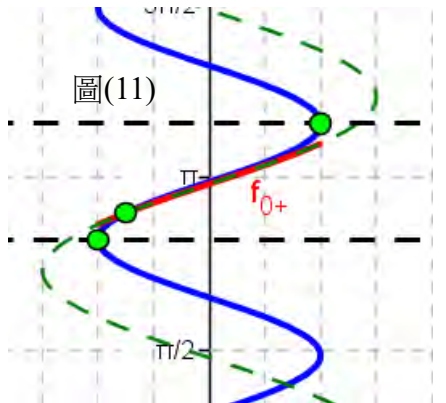
(1) 存在整數  $k$  使得  $\frac{1}{A}(\frac{4k+1}{2}\pi - \phi) \leq a \wedge \frac{1}{A}(\frac{4k+3}{2}\pi - \phi) \geq b$

( $f_+$  之  $y$  座標完全落在某一  $g_0$  的遞減段之  $y$  座標中)，此時  $f_+$  是遞增的，與該遞減部分顯然只有一交點。

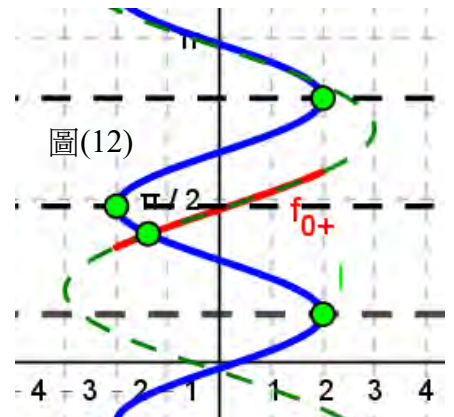


(2) 存在整數  $k$  使得  $\frac{1}{A}(\frac{4k-1}{2}\pi - \phi) \leq a \wedge \frac{1}{A}(\frac{4k+1}{2}\pi - \phi) \geq b$

( $f_+$  之  $y$  座標完全落在某一  $g_0$  的遞增段之  $y$  座標中)，此時該遞增部分在  $x$  處之斜率即為  $G(x)$ ， $f_+$  在  $x$  處之斜率為  $F(x)$ ，由  $G(x) > F(x)$  可知  $f_+$  和  $g_0$  只會有一交點。



(3) 非上述兩種情況，即為  $f_+$  橫跨了  $g_0$  的遞增段和遞減段，顯然  $f_+$  和遞減段必有一交點， $\Rightarrow$  若  $f_+$  和遞增段必是兩個以上(因為總交點數為奇數)，與(2)同理可知這是不可能的，故此情況下  $f_+$  和  $g_0$  亦只有一交點



故  $f$  的每段遞增部分(或遞減部分)與  $g$  皆有且僅有一個交點。□

又  $f$  在  $[0, 2\pi)$  區間總共有  $2B$  個半周期，且  $f$  和  $g$  皆以  $[0, 2\pi)$  為週期，故在  $[0, 2\pi)$  的區間內

$A \sin(Bx + \phi) + B \sin(Ax + \phi) = 0$  的解共有  $2 \min(A, B)$  個。

*QED*

**Theorem 8.** 若  $\Gamma$  為不重合的則其有  $2|n_1 - n_2|$  個反曲點；若為重合的則有  $|n_1 - n_2| - 1$  個反曲點。

**Proof:** 只證明  $\Gamma$  重合的情況，假設  $\Gamma$  可被表示為  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \end{cases}$ ， $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 。

延續 **Lemma 4.** 可知其反曲點判別式  $d(t) = A \sin(Bt + (-k_1 + k_2)\pi) + B \sin(At + (k_1 + k_2)\pi)$ ，

$d(0) = d(\pi) = 0$ ，但  $0, \pi$  此時皆為  $\Gamma$  的端點參數，不能算是反曲點。又僅需考慮  $t \in [0, \pi]$  的情

況，扣掉  $0, \pi$  故其共有  $|n_1 - n_2| - 1$  個反曲點。

## 6 空間中的 Lissajous

**Definition 4.** (三維)利薩如曲線(Lissajous curve):

空間中以參數式  $\begin{cases} x = p_1 \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = p_2 \cos(\alpha_2 t + c_2) \\ z = p_3 \cos(\alpha_3 t + c_3) \end{cases}$  所定義的圖形，振幅、頻率和起始相位同 **Definition 1.**

**Lemma 1.** 稍稍延伸其可得到:

**Lemma 5.** Lissajous 曲線  $\begin{cases} x = \cos(\alpha_1 t + c_1) \\ y = \cos(\alpha_2 t + c_2) \\ z = \cos(\alpha_3 t + c_3) \end{cases}$  有週期若且唯若  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$  皆為有理數。

類似 **Lemma 2、3.** 知有周期時只需討論  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \\ z = \cos(n_3 t + c_3) \end{cases}$ ， $t \in [0, 2\pi)$ ，其中  $n_1, n_2, n_3$  為互質正整數。

**Theorem 9.** Lissajous 曲線  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \\ z = \cos(n_3 t + c_3) \end{cases}$  是重合的若且唯若  $\frac{1}{\pi}(n_2 c_1 - n_1 c_2),$

$\frac{1}{\pi}(n_3 c_2 - n_2 c_3), \frac{1}{\pi}(n_1 c_3 - n_3 c_1)$  皆為整數。另外，其必可表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \\ z = \cos(n_3 t + k_3 \pi) \end{cases}$  的形式。

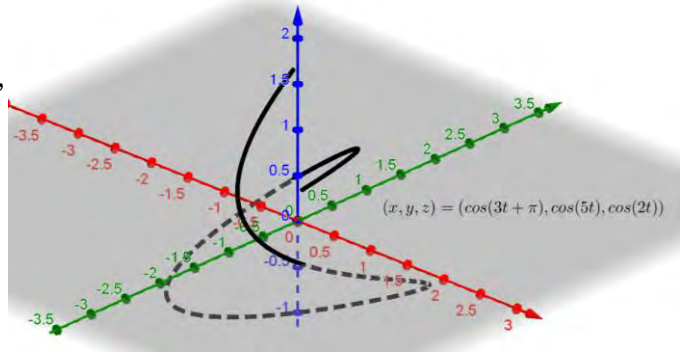
**Proof:**必要性與 **Theorem 1、2** 是類似的，

接下來證明充分性，假設

$$\begin{cases} n_2 c_1 - n_1 c_2 = k_1 \pi \dots (1) \\ n_3 c_2 - n_2 c_3 = k_2 \pi \dots (2) \text{ (其中 } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z} \text{)}, \\ n_1 c_3 - n_3 c_1 = k_3 \pi \dots (3) \end{cases}$$

欲證對任意整數  $k_1, k_2, k_3$ ，皆存在整數

$$h_1, h_2, h_3 \text{ 滿足 } \begin{cases} n_2 h_1 - n_1 h_2 = k_1 \dots (1') \\ n_3 h_2 - n_2 h_3 = k_2 \dots (2') \\ n_1 h_3 - n_3 h_1 = k_3 \dots (3') \end{cases}。$$



圖(13)

由(1)(2)(3)可得  $k_1, k_2, k_3$  必滿足  $n_3 k_1 + n_1 k_2 + n_2 k_3 = 0 \Rightarrow n_3 k_1 + n_1 k_2 \equiv 0 \pmod{n_2}$ ，故(1')(2')同時成立時有解的（ $n_3 k_1 \equiv n_1 n_3 h_2 \equiv n_1 k_2 \pmod{n_2}$  有解），而至於(3')，我們有

$$n_1 h_3 - n_3 h_1 = \frac{-n_3(n_2 h_1 - n_1 h_2) - n_1(n_3 h_2 - n_2 h_3)}{n_2} = \frac{-n_3 k_1 - n_1 k_2}{n_2} = k_3，\text{故}(1')(2')\text{成立則}(3')\text{成立。}\square$$

**Theorem 10.** 對 Lissajous 曲線  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \\ z = \cos(n_3 t + c_3) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$ ，其圖形有二重點必要

條件是下列兩者至少有一者成立：

(a)  $n_1, n_2, n_3$  中有兩者不互質。

(b)  $\frac{1}{\pi}(n_2 c_1 - n_1 c_2), \frac{1}{\pi}(n_3 c_2 - n_2 c_3), \frac{1}{\pi}(n_1 c_3 - n_3 c_1)$  三者中至少有一者為整數。

**Proof:**  $\Gamma$  有二重點，等價於存在  $t_1 \neq t_2 \pmod{2\pi}$  使得  $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ z(t_1) = z(t_2) \end{cases}$ ，即為

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1} \pi \dots (1) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi - \frac{2c_1}{n_1} \dots (1') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2}{n_2} \pi \dots (2) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2} \pi - \frac{2c_2}{n_2} \dots (2') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_3}{n_3} \pi \dots (3) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_3}{n_3} \pi - \frac{2c_3}{n_3} \dots (3') \end{cases}, \text{其中 } k_1, k_2, k_3, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z}。$$

顯然(1)(2)(3)、(1')(2')(3')這兩種情況皆不會有二重點(前者是因  $\gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$  故無解，後者的解則是  $t$  和  $-t$ ，切線一樣故並非二重點)，故只需討論(1)(2)(3')、(1')(2')(3)兩種情況(其他是對稱的)。

(a) 若(1)(2)(3')同時成立，則有 $t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1}\pi = \frac{2k_2}{n_2}\pi, t_1 + t_2 = \frac{2h_3}{n_3}\pi - \frac{2c_3}{n_3}$ ：

顯然有解的必要條件是 $\gcd(n_1, n_2) = d > 1$ ，此時 $k_1 \in \{\frac{n_1}{d}, \frac{2n_1}{d}, \dots, \frac{(d-1)n_1}{d}\}$ 。

解聯立得 $(t_1, t_2) = ((\frac{k_1}{n_1} + \frac{h_3}{n_3})\pi - \frac{c_3}{n_3}, (\frac{-k_1}{n_1} + \frac{h_3}{n_3})\pi - \frac{c_3}{n_3})$ ，結合 **Theorem 3**. 知只需考慮

$k_1 \in \{\frac{n_1}{d}, \frac{2n_1}{d}, \dots, \frac{(d-1)n_1}{d}\}, h_3 \in \{0, 1, \dots, n_3 - 1\}$  即可得到滿足(1)(2)(3')的所有二重點，有

$(d-1)n_3$ 個。(1)(2')(3)、(1')(2)(3)同理。故 $n_1, n_2, n_3$ 中有兩者不互質 $\Rightarrow$ 圖形必有二重點。

(b) 若(1')(2')(3)同時成立，則有 $t_1 - t_2 = \frac{2k_3}{n_3}\pi, t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1}\pi - \frac{2c_1}{n_1} = \frac{2h_2}{n_2}\pi - \frac{2c_2}{n_2}$ ，此時有解的

必要條件是 $n_2h_1 - n_1h_2 = \frac{1}{\pi}(n_2c_1 - n_1c_2) = m \in \mathbb{Z}$ 。且若存在整數 $x, y$ 使得

$n_2x - n_1y = \frac{1}{\pi}(n_2c_1 - n_1c_2)$  (等價於 $\gcd(n_1, n_2) = d \mid \frac{1}{\pi}(n_2c_1 - n_1c_2)$ )，則 $h_1$ 的在模 $n_1$ 的完全剩

餘系中恰有 $d$ 個解，解得 $(t_1, t_2) = ((\frac{h_1}{n_1} + \frac{k_3}{n_3})\pi - \frac{c_1}{n_1}, (\frac{h_1}{n_1} + \frac{-k_3}{n_3})\pi - \frac{c_1}{n_1})$ ，結合 **Theorem 3**. 知

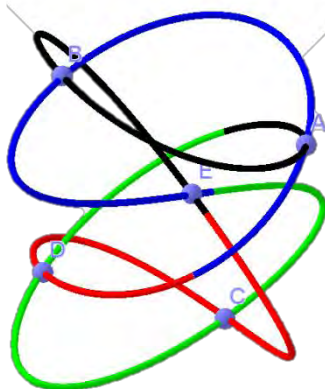
只需考慮 $k_3 \in \{1, 2, \dots, n_3 - 1\}, h_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\} \cap \{x \mid n_2x - n_1y = m\}$ 即可得到滿足(1)(2)(3')的

所有二重點，共有 $d(n_3 - 1)$ 個。

故圖形有二重點的必要條件是(a)(b)中至少一個是對的。QED

$$(x, y, z) = (\cos(4t + 1.6\pi), \cos(5t + 0.3\pi), \cos(2t))$$

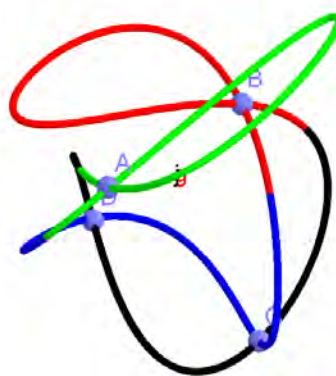
(a)



圖(14)

$$(x, y, z) = (\cos(3t + \pi), \cos(5t - 0.75\pi), \cos(2t))$$

(b)



圖(15)

上述的定理也說明了：

(1)(2)(3')成立的必要條件是 $\gcd(n_1, n_2) = d_3 > 1$ ，此條件下的二重點具有 $t = (\frac{\pm k}{n_1} + \frac{h}{n_3})\pi - \frac{c_3}{n_3}$ 的

形式，其中 $k \in \{\frac{n_1}{d_3}, \frac{2n_1}{d_3}, \dots, \frac{(d_3-1)n_1}{d_3}\}, h \in \{0, 1, \dots, n_3 - 1\}$ ，共有 $n_3(d_3 - 1)$ 個。

(1')(2')(3)成立的必要條件是存在整數  $x, y$  使得  $\frac{1}{\pi}(n_1c_2 - n_2c_1) = n_1x - n_2y$  (換句話說即為  $\frac{1}{\pi}(n_1c_2 - n_2c_1) = m \in \mathbb{Z} \wedge d_3 \mid m$ ) 此條件下的二重點具有  $t = (\frac{h}{n_1} + \frac{\pm k}{n_3})\pi - \frac{c_1}{n_1}$  的形式，其中  $k \in \{1, 2, \dots, n_3 - 1\}, h_1 = \{0, 1, \dots, n_1 - 1\} \cap \{x \mid n_2x - n_1y = m\}$ ，共有  $d_3(n_3 - 1)$  個。

**Theorem 11.** 對頻率兩兩互質的曲線  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1t + c_1) \\ y = \cos(n_2t + c_2) \\ z = \cos(n_3t + c_3) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$ ，若圖形有二重點

則  $\Gamma$  可被表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1t + \phi) \\ y = \cos(n_2t + k_1\pi) \\ z = \cos(n_3t + k_2\pi) \end{cases} \vee \begin{cases} x = \cos(n_1t + k_1\pi) \\ y = \cos(n_2t + \phi) \\ z = \cos(n_3t + k_2\pi) \end{cases} \vee \begin{cases} x = \cos(n_1t + k_1\pi) \\ y = \cos(n_2t + k_2\pi) \\ z = \cos(n_3t + \phi) \end{cases}$  的形式，其中

$k_1, k_2$  為整數。(即為  $\Gamma$  對  $x-y, y-z, z-x$ , 其中一平面的投影是重合的)

**Proof:**延續 Theorem 10.的符號，當 (1)(2')(3') 同時成立時，二重點參數對  $(t_1, t_2)$  滿足

$$t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2}\pi - \frac{2c_2}{n_2} = \frac{2h_3}{n_3}\pi - \frac{2c_3}{n_3} \wedge t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1}\pi, \text{ 令 } t_0 = \frac{h_2\pi - c_2}{n_2} = \frac{h_3\pi - c_3}{n_3}, t' = t + t_0 \text{ 帶入 } \Gamma$$

即可得證，(1')(2)(3')、(1')(2')(3) 同理可證。 QED

我們已經知道了單一條件下(如(1)(2)(3')) 三維 Lissajous 的二重點個數，接下來要求總數，必須考慮他們的交集的解。令  $d_1 = \gcd(n_2, n_3), d_2 = \gcd(n_3, n_1), d_3 = \gcd(n_1, n_2)$ :

(a)(a):無解

若存在  $t_1, t_2$  同時滿足(1)(2)(3'), (1)(2')(3)，則  $t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1}\pi = \frac{2k_2}{n_2}\pi = \frac{2k_3}{n_3}\pi$ ，故  $\frac{n_1}{d_3} \mid k_1 \wedge \frac{n_1}{d_2} \mid k_1$   
 $\Rightarrow \frac{n_1}{\gcd(d_2, d_3)} = \text{lcm}(\frac{n_1}{d_3}, \frac{n_1}{d_2}) \mid k_1$ ，但  $d_2, d_3$  是互質的，故  $n_1 \mid k_1$ ，不是二重點。

(a)(b)-1:無解

若存在  $t_1, t_2$  同時滿足(1)(2)(3'), (1')(2')(3)，則  $t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1}\pi = \frac{2k_2}{n_2}\pi = \frac{2k_3}{n_3}\pi$ ，同上。

(a)(b)-2:  $d_1(d_3 - 1)$

若存在  $t_1, t_2$  同時滿足 (1)(2)(3'), (1)(2')(3')，則  $\Gamma$  可被表示為  $\begin{cases} x = \cos(n_1t + \phi) \\ y = \cos(n_2t + m_2\pi) \\ z = \cos(n_3t + m_3\pi) \end{cases}$



$$t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1} \pi = \frac{2k_2}{n_2} \pi, t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2} \pi = \frac{2h_3}{n_3} \pi, \text{ 故 } \frac{n_1}{d_3} | k_1, \frac{n_2}{d_1} | h_2, \text{ 又只需考慮 } k_1 \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\},$$

$h_2 \in \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}$  即可得到全部的二重點，故總數為  $d_1(d_3 - 1)$ 。

(b)(b): 無解

$$\text{若存在 } t_1, t_2 \text{ 同時滿足 (1')(2)(3'), (1)(2')(3'), \text{ 則 } t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi - \frac{2c_1}{n_1} = \frac{2h_2}{n_2} \pi - \frac{2c_2}{n_2} = \frac{2h_3}{n_3} \pi - \frac{2c_3}{n_3},$$

$$\text{故 } \Gamma \text{ 是重合的，可被表示為 } \begin{cases} x = \cos(n_1 t + m_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + m_2 \pi) \\ z = \cos(n_3 t + m_3 \pi) \end{cases}, \text{ 故 } t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi = \frac{2h_2}{n_2} \pi = \frac{2h_3}{n_3} \pi, \text{ 同 (a)(a)}$$

這是無解的。

000: 無解

若存在  $t_1, t_2$  同時滿足三組以上的條件，則其中必有兩個(a)或(b)，故一定是無解的。

上述幾點再結合排容原理，即可求出任一不重合的三維 Lissajous 的二重點個數了。

**Theorem 12.** 二維的 Lissajous  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos n(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$  為三維的 Lissajous  $\Gamma_x: \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \\ z = \sin(n_2 t) \end{cases}$

在空間中以  $x$  軸為逆軸順時針(由正向看往原點)旋轉  $\phi$  (弧度)後對  $x-y$  平面的投影;亦為

$$\Gamma_y: \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \\ z = \sin(n_1 t) \end{cases} \text{ 在空間中以 } y \text{ 軸為轉軸逆時針(由正向看往原點)旋轉 } \frac{n_1}{n_2} \phi \text{ (弧度)後對}$$

**Proof:** 令  $P(\sin(n_1 t), \sin(n_2 t), \cos(n_2 t))$  為  $\Gamma_x$  上的點，以  $x$  軸為轉軸順時針(由正向看往原點)  $\phi$  後

$$\text{之 } P' \text{ 座標為 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(n_1 t) \\ \cos(n_2 t) \\ \sin(n_2 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n_1 t) \\ \cos(n_2 t) \cos \phi - \sin(n_2 t) \sin \phi \\ \cos(n_2 t) \sin \phi + \sin(n_2 t) \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(n_1 t) \\ \cos(n_2 t + \phi) \\ \sin(n_2 t + \phi) \end{bmatrix}$$

其對  $x-y$  平面的投影的即為  $(\cos(n_1t), \cos(n_2t + \phi))$ ，故  $\Gamma$  是  $\Gamma_x$  對  $x-y$  平面的投影。

平移參數後得  $\Gamma$  亦可表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1t - \frac{n_1}{n_2}\phi) \\ y = \cos(n_2t) \end{cases}$ ，同上述作法即得證。 *QED*

**Theorem 13.** 對不重合的二維 Lissajous  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t + \phi) \end{cases}$ ， $\Gamma_x: \begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t) \\ z = \sin(n_2t) \end{cases}$  本身在

空間中的二重點旋轉後的投影，會是  $\Gamma$  的(II)型二重點； $\Gamma_y: \begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t) \\ z = \sin(n_1t) \end{cases}$  本身在空間中的

自交點旋轉後的投影，會是  $\Gamma$  的(I)型二重點。(指 **Theorem 3.**中的(I)、(II)型)

**Proof:**  $\Gamma_x$  旋轉後的參數式為  $\begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t + \phi) \\ z = \sin(n_2t + \phi) \end{cases}$ ，由 **Theorem 10.(a)**知其是有二重點的，

又由 **Theorem 3.**知  $\Gamma$  的二重點參數值為下列兩種形式之一：

$$(I) \quad t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1}\pi \wedge t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2}\pi - \frac{2\phi}{n_2}$$

$$(II) \quad t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1}\pi \wedge t_1 - t_2 = \frac{2k_2}{n_2}\pi$$

他是  $\Gamma_x$  二重點的投影若且唯若其滿足  $\sin(n_2t_1 + \phi) = \sin(n_2t_2 + \phi)$ ，等價於

$$t_1 - t_2 = \frac{2m\pi}{n_2} \vee t_1 + t_2 = \frac{(2m-1)\pi - 2\phi}{n_2}$$

故只有(II)中的參數對會是  $\Gamma_x$  的二重點旋轉後的投影，(I)中的參數對皆不是  $\Gamma_x$  的二重點。

對  $\Gamma_y$  同理可證。 *QED*



**Theorem 14.** 對重合的二維 Lissajous  $\Gamma : \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$  ,  $\Gamma_x : \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \\ z = \sin(n_2 t) \end{cases}$  本身在空

間中的二重點旋轉後的投影，就是  $\Gamma$  的所有二重點； $\Gamma_y : \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \\ z = \sin(n_1 t) \end{cases}$  亦是。

**Proof:**  $\Gamma_x$  旋轉後的參數式為  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \\ z = \sin(n_2 t + \phi) \end{cases}$  , 由 **Theorem 10.(a)** 知其是有二重點的，

由 **Theorem 1.** 知存在整數  $k_1, k_2$  滿足  $\frac{k_1 \pi}{n_1} = \frac{k_2 \pi - \phi}{n_2} = t_0$  , 由 **Theorem 4.** 知  $\Gamma_1$  經過  $t = t' + t_0$  平移變

成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t' + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t' + k_2 \pi) \end{cases}$  之後的二重點參數值為下列兩種形式之一：

$$(I) \quad (t_1, t_2) = ((\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi, (-\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi)$$

$$(II) \quad (t_1, t_2) = ((\frac{s}{n_1} + \frac{r}{n_2})\pi, (\frac{s}{n_1} - \frac{r}{n_2})\pi)$$

故  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi) \end{cases}$  之二重點為下列兩種形式之一：

$$(I) \quad (t_1, t_2) = ((\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi + t_0, (-\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi + t_0)$$

$$(II) \quad (t_1, t_2) = ((\frac{s}{n_1} + \frac{r}{n_2})\pi + t_0, (\frac{s}{n_1} - \frac{r}{n_2})\pi + t_0)$$

但由於  $t_0$  是端點參數，由 **Theorem 1.** 知  $(t_1', t_2') = (-(\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi + t_0, -(-\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi + t_0)$  與和(I)

中的  $(t_1, t_2) = ((\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi + t_0, (-\frac{r}{n_1} + \frac{s}{n_2})\pi + t_0)$  代表的是同一二重點(由重合的定義)，

(I)型的參數對  $t_1 - t_2' = \frac{2s\pi}{n_2}$  , 故  $\sin(n_2 t_1 + \phi) = \sin(n_2 t_2' + \phi)$

$\Rightarrow$  (I)型的二重點皆會是  $\Gamma_x$  的二重點的投影，(II)型同理可證。

對  $\Gamma_y : \begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \\ z = \sin(n_1 t) \end{cases}$  亦是如此。 *QED*

## 伍、研究結果

以下的  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  皆為正整數。

- 對二維的 Lissajous 曲線  $\Gamma_1 : \begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \end{cases}$  :

1. 圖形重合的充要條件為  $\frac{1}{\pi}(n_1 c_2 - n_2 c_1) \in \mathbb{Z}$ 。且其必可被表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \end{cases}$ ， $t \in [0, \pi]$

的形式，此時  $0$ 、 $\pi$  為其端點參數。

2. 對所有的圖形  $\Gamma : \begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \end{cases}$ ，都存在唯一的  $\phi_0 \in [0, \frac{\pi}{n_1}]$  使得  $\Gamma$  可表示成

$$\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t + \phi_0) \end{cases} \text{ 的形式。}$$

3. (a) 若圖形不重合，則其每個二重點擁兩個不同的參數值，必是下列兩種形式之一：

$$(I) t = \left( \frac{\pm k}{n_1} + \frac{h}{n_2} \right) \pi - \frac{c_2}{n_2},$$

其中  $(k, h) \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_2 - 1\}$ ，

共有  $n_2(n_1 - 1)$  組解。

$$(II) t = \left( \frac{h}{n_1} + \frac{\pm k}{n_2} \right) \pi - \frac{c_1}{n_1},$$

其中  $(k, h) \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\} \times \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ ，

共有  $n_1(n_2 - 1)$  組解。

故總二重點個數為  $2n_1 n_2 - n_1 - n_2$ ，且其將  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  分割成  $2n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1$  塊區域。

(b) 若圖形重合，則其每個二重點擁有四個不同的參數值：(假設  $n_1$  為奇數)

$$t = \left( \frac{\pm k}{n_1} + \frac{\pm h}{n_2} \right) \pi, \text{ 其中 } (k, h) \in \{1, 2, \dots, \frac{n_1 - 1}{2}\} \times \{1, \dots, n_2 - 1\},$$

故總二重點個數為  $\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 1)$ ，且其將  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  分割成  $\frac{1}{2}(n_1 + 1)(n_2 + 1)$  塊區域。

4. 二重點的兩切線斜率等值異號。若圖形不重合則其有  $2|n_1 - n_2|$  個反曲點；若圖形重合則其

有  $|n_1 - n_2| - 1$  個反曲點。

- 對三維的 Lissajous 曲線  $\Gamma_2 : \begin{cases} x = \cos(n_1 t + c_1) \\ y = \cos(n_2 t + c_2) \\ z = \cos(n_3 t + c_3) \end{cases}$

5. 圖形是重合的充要條件為  $\frac{n_2c_1 - n_1c_2}{\pi}, \frac{n_3c_2 - n_2c_3}{\pi}, \frac{n_1c_3 - n_3c_1}{\pi}$  皆為整數，且其必可被表示成

$$\begin{cases} x = \cos(n_1t + k_1\pi) \\ y = \cos(n_2t + k_2\pi) \\ z = \cos(n_3t + k_3\pi) \end{cases}, t \in [0, \pi] \text{ 的形式，此時 } 0, \pi \text{ 為其端點參數。}$$

6. 圖形有二重點的必要條件是下列兩者至少有一者成立：

(a)  $n_1, n_2, n_3$  三者中有兩者不互質。

(b)  $\frac{n_2c_1 - n_1c_2}{\pi}, \frac{n_3c_2 - n_2c_3}{\pi}, \frac{n_1c_3 - n_3c_1}{\pi}$  三者中至少有一者為整數。

$$7. \begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1}\pi \dots\dots(1) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1}\pi - \frac{2c_1}{n_1} \dots\dots(1') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2}{n_2}\pi \dots\dots(2) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2}\pi - \frac{2c_2}{n_2} \dots\dots(2') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_3}{n_3}\pi \dots\dots(3) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_3}{n_3}\pi - \frac{2c_3}{n_3} \dots\dots(3') \end{cases} \text{ :排容原理}$$

◎(1)(2)(3')成立的必要條件是  $\gcd(n_1, n_2) = d_3 > 1$ ，此條件下的二重點具有  $t = (\frac{\pm k}{n_1} + \frac{h}{n_3})\pi - \frac{c_3}{n_3}$

的形式，其中  $k \in \{\frac{n_1}{d_3}, \frac{2n_1}{d_3}, \dots, \frac{(d_3-1)n_1}{d_3}\}, h \in \{0, 1, \dots, n_3-1\}$ ，共有  $n_3(d_3-1)$  個。

◎(1')(2')(3)成立的必要條件是存在整數  $x, y$  使得  $\frac{1}{\pi}(n_1c_2 - n_2c_1) = n_1x - n_2y$  (換句話說即為

$\frac{1}{\pi}(n_1c_2 - n_2c_1) = m \in \mathbb{Z} \wedge d_3 \mid m$ ) 此條件下的二重點具有  $t = (\frac{h}{n_1} + \frac{\pm k}{n_3})\pi - \frac{c_1}{n_1}$  的形式，其中

$k \in \{1, 2, \dots, n_3-1\}, h_1 = \{0, 1, \dots, n_1-1\} \cap \{x \mid n_2x - n_1y = m\}$ ，共有  $d_3(n_3-1)$  個。



◎兩組以上條件同時成立的話，只有(1)(2)(3'), (1)(2')(3')這種情況有解，解數為  $d_1(d_3-1)$ ；其餘都是無解的


$$8. \Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t + \phi) \end{cases} \text{ 為 } \Gamma_x: \begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t) \\ z = \sin(n_2t) \end{cases} \text{ 在空間中以 } x \text{ 軸為轉軸逆時針(由正向看往原點)旋}$$

轉  $\phi$  後對  $x-y$  平面的投影；亦為  $\Gamma_y: \begin{cases} x = \cos(n_1t) \\ y = \cos(n_2t) \\ z = \sin(n_1t) \end{cases}$  在空間中以  $y$  軸為轉軸逆時針(由正向看往

原點)旋轉  $\frac{n_1}{n_2}\phi$  (弧度)後對  $x-y$  平面的投影。

9.延續上述 8.之符號:

(a)若  $\Gamma$  不重合,則  $\Gamma_x$  本身在空間中的二重點旋轉後的投影,會是  的(II)型二重點;  $\Gamma_y$  本身在空間中的二重點旋轉後的投影,會是  的(I)型二重點。(指 **Theorem 3.**中的(I)、(II)型)。

(b) 若  $\Gamma$  重合,則  $\Gamma_x$  本身在空間中的二重點旋轉後的投影,就是  的所有二重點;  $\Gamma_y$  亦是。

## 陸、討論

• 對於二維 Lissajous 圖形的二重點,我們將其分為兩種類型 (**Theorem 3.**),並也得出了(不重合時)兩種類形分別的個數,此外還發現符合 **Theorem 3.**之(I)的二重點( $n_2(n_1-1)$ 個)會分布在  $n_1-1$ 條水平線上,每條上有  $n_2$ 個,同樣的符合 **Theorem 3.**之(II)的二重點( $n_1(n_2-1)$ 個)會分布在  $n_2-1$ 條鉛直線上,每條上有  $n_1$ 個(如圖(16))。有趣的是當圖形隨著相位差變化旋轉時(**Theorem 13.**),這  $n_1-1$ 條水平線、 $n_2-1$ 條鉛直線是固定不動的,換句話說,當頻率比不變時,相位差的改變不影響(I)類二重點的  $y$  座標,亦不影響(II)類二重點的  $x$  座標(從 **Theorem 3.**之二重點的參數值便可看出這點)。

• 而在討論二重點的過程中,發現了在某些條件下的 Lissajous 曲會是重合的——「會打到  $[-1,1] \times [-1,1]$  的一個頂點並原路返回」——,於是我們也得出了重合時的充要條件 (**Theorem 1.**)(這條件是代數上的,幾何上的重合等價於其通過  $[-1,1] \times [-1,1]$  四頂點中的兩個),並由

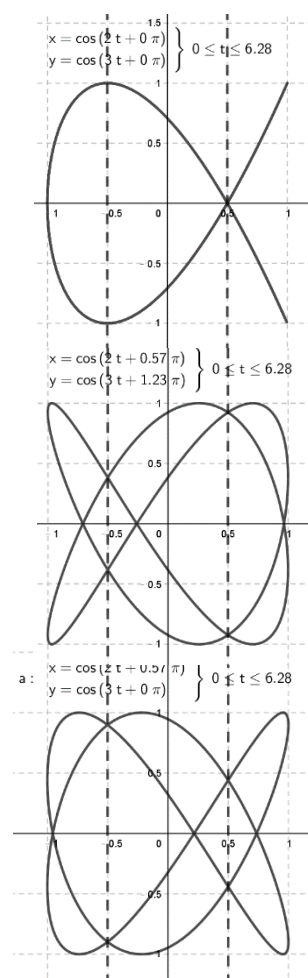
**Theorem 2.**知其可被表示成  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + k_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + k_2 \pi) \end{cases}, t \in [0, \pi]$  的形式。此

時由三角函數的週期性知只需考慮  $k_1, k_2 \in \{0,1\}$  四種情況,注意到  $(n_1, n_2) \neq (0,0)$  (這裡的相等代表對 2 同餘),且

$\begin{cases} x = \cos(n_1 t) \\ y = \cos(n_2 t) \end{cases}$  和  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + n_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + n_2 \pi) \end{cases}$  代表的是同一曲線(令  $t = \pi - t'$  帶入前者即

可知)同理有  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + \varepsilon_1 \pi) \\ y = \cos(n_2 t + \varepsilon_2 \pi) \end{cases}$  和  $\begin{cases} x = \cos(n_1 t + (\varepsilon_1 + n_1) \pi) \\ y = \cos(n_2 t + (\varepsilon_2 + n_2) \pi) \end{cases}$  也是與前者相異的同一曲線(其中

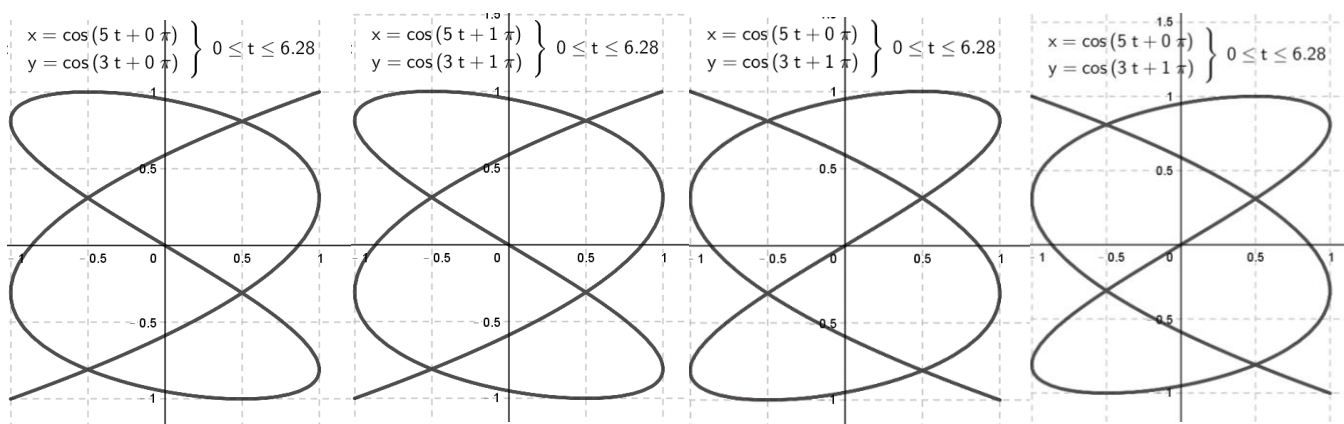
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (0,0)$  且  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (n_1, n_2)$ ), 且  $(0,0)$ 、 $(n_1, n_2)$ 、 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 、 $(n_1 + \varepsilon_1, n_2 + \varepsilon_2)$  的兩兩相異,



圖(16)

恰為  $k_1, k_2 \in \{0,1\}$  的四種情況，故頻率比固定的情況下，重合的圖形只會有兩種。

(i) 若  $(n_1, n_2) = (1, 1)$ ，則圖形的端點會是  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  中相對的兩個頂點，且第二類重合圖形為第一類對  $x$  軸或  $y$  軸的鏡像，如圖(17)。



圖(17)

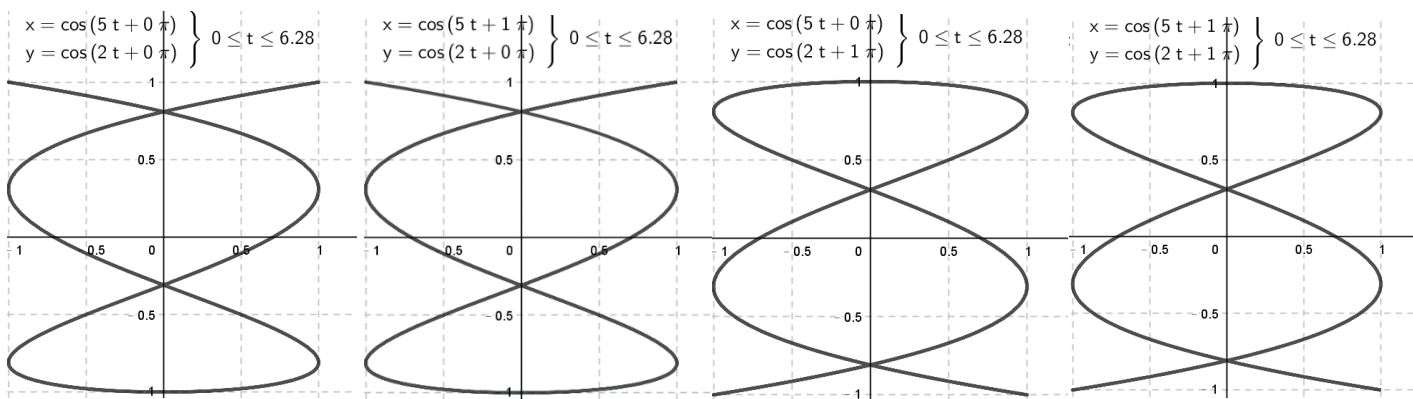
$$(k_1, k_2) = (0, 0)$$

$$(k_1, k_2) = (n_1, n_2) = (1, 1)$$

$$(k_1, k_2) = (0, 1)$$

$$(k_1, k_2) = (n_1 + 0, n_2 + 1) = (1, 0)$$

(ii) 若  $(n_1, n_2) = (1, 0)$ ，則圖形的端點會是  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  中兩個在  $x$  軸同側的頂點，且第二類重合圖形為的第一類對  $x$  軸的鏡像，如圖(18)。



圖(18)

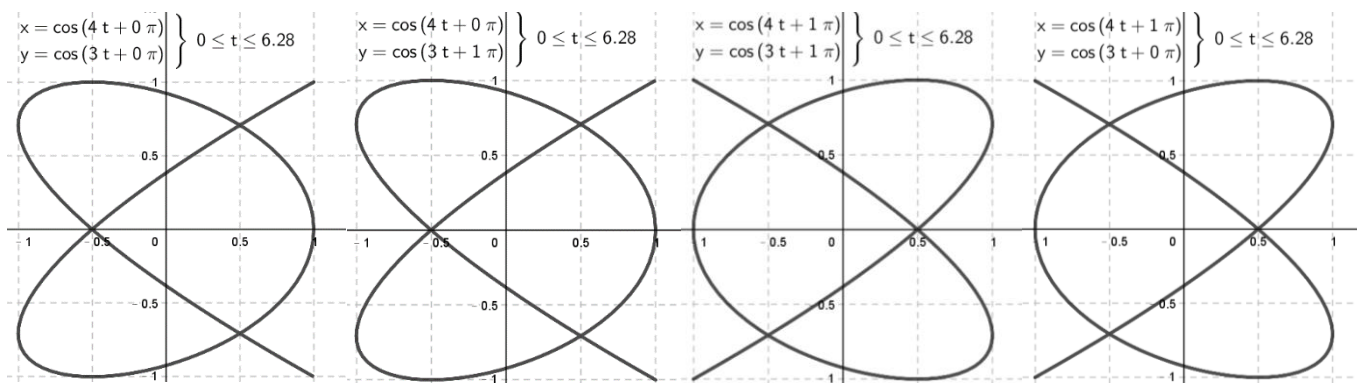
$$(k_1, k_2) = (0, 0)$$

$$(k_1, k_2) = (n_1, n_2) = (1, 0)$$

$$(k_1, k_2) = (0, 1)$$

$$(k_1, k_2) = (n_1 + 0, n_2 + 1) = (1, 1)$$

(iii) 若  $(n_1, n_2) = (0, 1)$ ，則圖形的端點會是  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  中兩個在  $y$  軸同側的頂點，且第二類重合圖形為的第一類對  $y$  軸的鏡像，如圖(19)。



圖(19)

$$(k_1, k_2) = (0, 0)$$

$$(k_1, k_2) = (n_1, n_2) = (0, 1)$$

$$(k_1, k_2) = (1, 1)$$

$$(k_1, k_2) = (n_1 + 1, n_2 + 1) = (1, 0)$$

我們也利用類似的方法求出了重合時二重點的個數，符合 **Theorem 4** 之(I)的二重點

$((n_2 - \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor)(\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor - 1))$  個)會分布在  $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor - 1$  條水平線上，每條上有  $n_2 - \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor$  個，同樣的符合

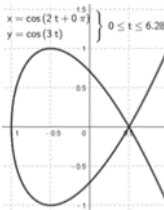
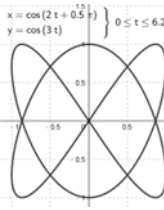
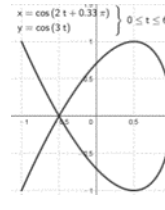
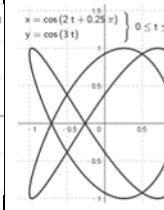
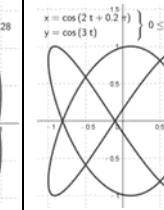
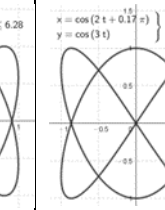
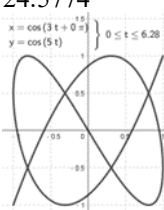
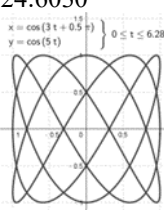
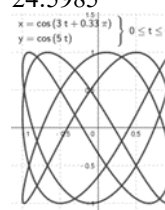
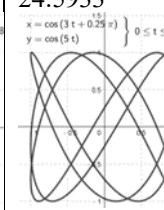
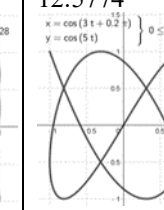
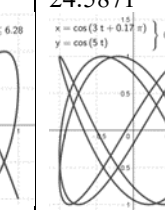
**Theorem 4** 之(II) 的二重點  $((n_1 - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor)(\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor - 1))$  個)會分布在  $\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor - 1$  條鉛直線上，每條上有  $n_1 - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor$  個。

- 在做連續性的研究時，我們原先也想做曲線長的計算，對  $\Gamma: \begin{cases} x = \cos(n_1 t + \phi) \\ y = \cos(n_2 t) \end{cases}$  其曲線長為

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{n_1^2 \sin^2(n_1 t + \phi) + n_2^2 \sin^2(n_2 t)} dt &= \int_0^{2n_2\pi} \sqrt{n_1^2 \sin^2\left(\frac{n_1}{n_2} x + \phi\right) + n_2^2 \sin^2 x} \frac{1}{n_2} dx \quad (\text{其中 } x = n_2 t) \\ &= \int_0^{2n_2\pi} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n_1}{n_2} x + \phi\right) + 1 - \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{2n_2\pi} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n_1}{n_2} x + \phi\right) + 1} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n_1}{n_2} x + \phi\right) + 1}} dx \end{aligned}$$

但後來我們查閱了文獻發現了此式在目前是無法以基礎函數表達的，只能用近似值去逼近。

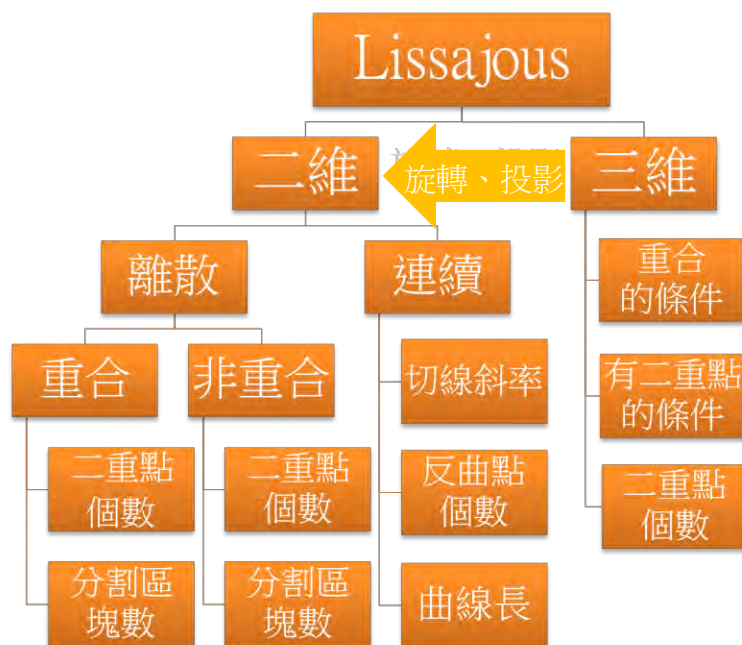
以下附上由 **Wolfram Alpha** 算出的近似值(灰格者是重合的)

$(n_1, n_2, \phi)$	$(2, 3, 0)$	$(2, 3, \frac{\pi}{2})$	$(2, 3, \frac{\pi}{3})$	$(2, 3, \frac{\pi}{4})$	$(2, 3, \frac{\pi}{5})$	$(2, 3, \frac{\pi}{6})$
曲線長	15.2530 	15.2564 	15.2530 	15.2552 	15.2547 	15.2564 
$(n_1, n_2, \phi)$	$(3, 5, 0)$	$(3, 5, \frac{\pi}{2})$	$(3, 5, \frac{\pi}{3})$	$(3, 5, \frac{\pi}{4})$	$(3, 5, \frac{\pi}{5})$	$(3, 5, \frac{\pi}{6})$
曲線長	24.5774 	24.6030 	24.5985 	24.5933 	12.5774 	24.5871 

我們猜測在頻率比固定的情況下，重合的圖形有最短的曲線長(參數值從  $0$  到  $2\pi$ )、標準的(存在二重點在  $x$  軸或  $y$  軸上，如上表格第二列第二行)圖形有最長的曲線長。希望能未來能利用 **Theorem 14.**(二維圖形相位差變化可視為三維圖形的旋轉)的旋轉觀點加以證明。

## 柒、結論

這篇報告的主軸是研究 Lissajous 曲線，在過程中發現了二維的曲線可分為重合及不重合兩個部分，也都分別得出了二重點之個數與參數值，並以此算出了隨之而來的分割區塊數。在連續的部分也得出了切線斜率和反曲點個數等結果。三維的部分也如法炮製，探討了重合的條件，卻發現三維中的 Lissajous 大部分是沒有二重點的，故也得出了有二重點的充要條件。以下是我們研究的架構



## 捌、參考資料

1. 結城浩(2015)，數學女孩秘密筆記：圓圓的三角函數篇。世茂出版社。
2. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊。龍騰出版社。
3. Vaughan F. R. Jones and Józef H. Przytycki. "Lissajous Knots and Billiard Knots." Banach Center Publications 42 (1998), 145–163.
4. M. G. V. Bogle, J. E. Hearst, V. F. R. Jones, and L. Stoilov. "Lissajous Knots." J. Knot Theory Ramifications 3:2 (1994), 121–140.

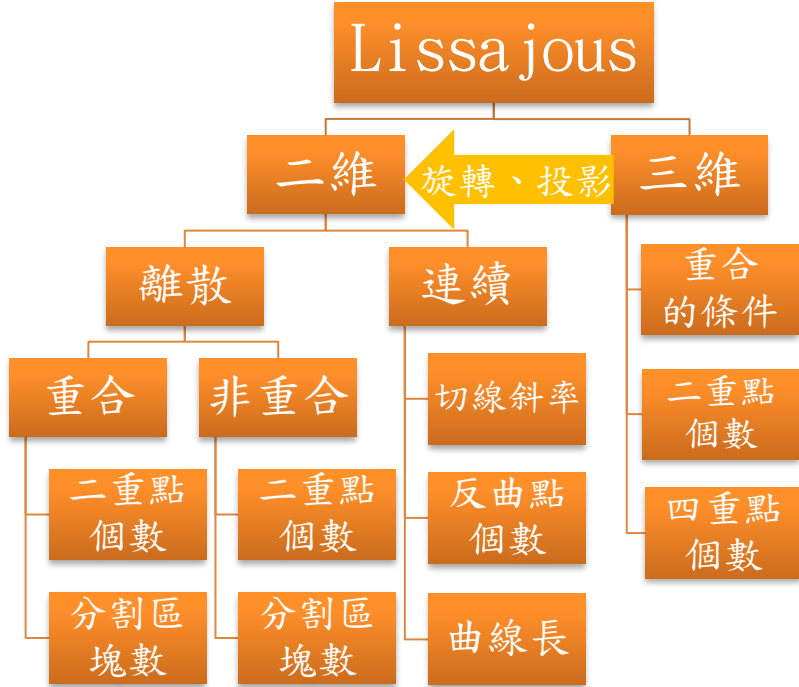
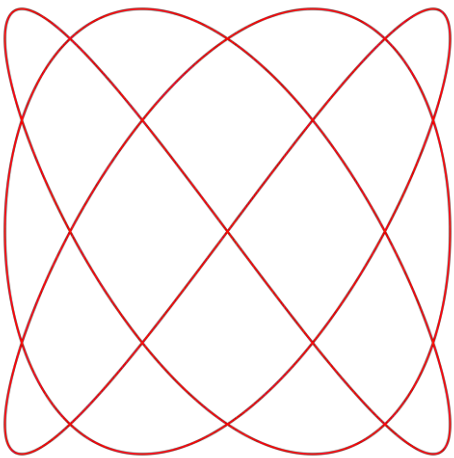
## 【評語】 050401

1. 本文主要探討 Lissajous 曲線之性質，研究方法有創意，唯這題材已有作品發表，需要做文獻探討，來說明本文與已發表的相關文章是否有不同研究方向。
2. 對三角參數方程式圖形的主要性質掌握度高，討論詳盡。從二維推廣至三維的處理手法相似，並未能從中找出推廣至更高維度的數學方法，值得再深究。
3. 圖形自身的交點所代表的意義為何？二重點、四重點的重要性及所代表的意義為何？



# 壹、研究動機

國中看了本書《數學女孩：圓圓的三角函數》，書中有提到，兩個互相垂直的三角函數，其產生的軌跡就是利薩如曲線。很湊巧的，暑假作業又是這本書的讀書心得，重新拾起這本書，再一次閱讀又是另外一番滋味，在我們討論的過程中，也與利薩如曲線有了第二次的相遇，美麗的圖形吸引了我們的目光，這次，我們不滿足於書中給的介紹，便進行了一些資料查閱，並一起討論，發現利薩如曲線並不只是肉眼觸目所及的美，其搶眼的自交點變化更是引起了我們研究的興趣，於是便有了這篇研究。



# 貳、研究目的

- 一、甚麼情況下 Lissajous 曲線會是重合的？
- 二、Lissajous 曲線的多重點(multiple point)個數。
- 三、二維 Lissajous 曲線的連續性質。

# 參、研究內容

## 1 名詞定義

**Definition 1.** 利薩如曲線(Lissajous curve):

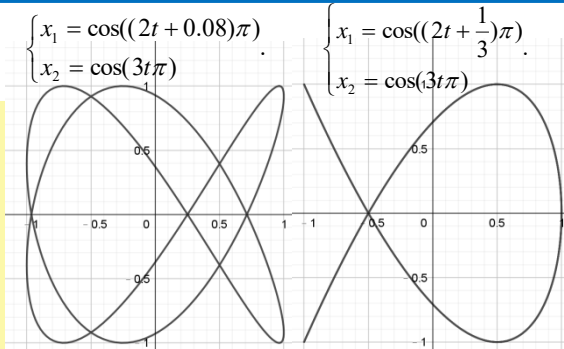
以參數式 
$$\begin{cases} x_1 = \cos((n_1 t + c_1)\pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + c_2)\pi) \\ \vdots \\ x_k = \cos((n_k t + c_k)\pi) \end{cases}$$
 定義的曲線稱為( $k$  維)Lissajous curve，其中  $n_1, n_2, \dots, n_k$  為無共同因數的整數， $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$ 。(接下來的報告中以  $\Gamma_k$  稱之)

**Definition 2.** 重合:

對一以參數式定義的曲線  $\Gamma$ ，若存在  $t_0$  使得對任意實數  $t$ ， $t_0 + t$  和  $t_0 - t$  在  $\Gamma$  上代表的點是恆相等，則稱此圖形是重合的(當然， $t_0$  和  $t$  需在定義域內)，並稱  $t_0$  為端點參數。(如圖(2))

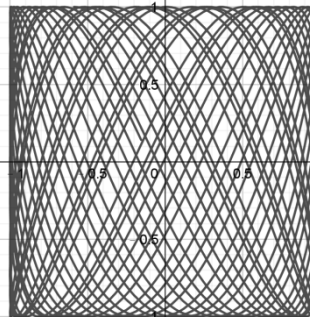
**Definition 3.**  $k$  重點:

曲線軌跡和它本身相交的點，且該點同時位於曲線的  $k$  個不同分支之上。



圖(1)

圖(2) 
$$\begin{cases} x_1 = \cos(\sqrt{2}t\pi) \\ x_2 = \cos(3t\pi) \end{cases}, 0 \leq t \leq 30$$



圖(3)

約定  $\Gamma_\phi: \begin{cases} x_1 = \cos(n_1 t \pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + \phi)\pi) \end{cases}$ 、 $\Gamma_2^\circ: \begin{cases} x_1 = \cos((n_1 t + m_1)\pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + m_2)\pi) \end{cases}$ 、 $\Gamma_3^\circ: \begin{cases} x_1 = \cos((n_1 t + m_1)\pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + m_2)\pi) \\ x_3 = \cos((n_3 t + m_3)\pi) \end{cases}$ 、 $\Gamma_{3x}: \begin{cases} x_1 = \cos(n_1 t \pi) \\ x_2 = \cos(n_2 t \pi) \\ x_3 = \sin(n_2 t \pi) \end{cases}$ 、 $\Gamma_{3y}: \begin{cases} x_1 = \cos(n_1 t \pi) \\ x_2 = \cos(n_2 t \pi) \\ x_3 = \sin(n_1 t \pi) \end{cases}$

## 2 重合(※本報告只討論頻率比皆為有理數的”封閉”Lissajous 曲線)

我們發現特定條件下，圖形會和自己重疊，形成看似不封閉的曲線(如圖(2))，我們稱它是重合的並給出以下條件:

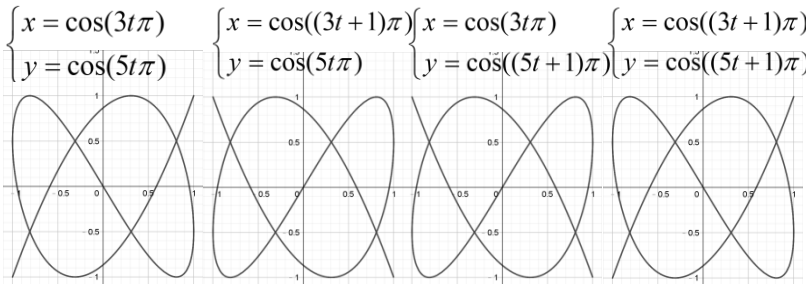
**Theorem 1.**  $\Gamma_2$  是重合的  $\Leftrightarrow n_1 c_2 - n_2 c_1$  是整數  $\Leftrightarrow \Gamma_2$  可表示成  $\begin{cases} x_1 = \cos((n_1 t + m_1)\pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + m_2)\pi) \end{cases}$ ， $t \in [0, 1]$  的形式( $m_1, m_2$  為整數)。

**Proof:** 由定義知若圖形重合則存在  $t_0$  使得對所有  $t \in R$ ， $\begin{cases} \cos((n_1(t_0 - t) + c_1)\pi) = \cos((n_1(t_0 + t) + c_1)\pi) \\ \cos((n_2(t_0 - t) + c_2)\pi) = \cos((n_2(t_0 + t) + c_2)\pi) \end{cases}$  恆成立，

故需存在整數  $m_1, m_2$  使得  $\frac{c_1}{n_1} - \frac{c_2}{n_2} = \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}$ 。由 **Be’zout 定理** 知  $n_1 c_2 - n_2 c_1 \in Z$  即為等號成立之充要條件。□

由此條件可得到以下推論:

- 令  $t_0$  為重合的端點參數，則有  $t_0 + 1$  亦為端點參數。
- $t_0$ 、 $t_0 + 1$  的取值為  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  的四個頂點中相異的兩個。
- 只需考慮  $t \in [t_0, t_0 + 1]$  即可得到完整的圖形。
- 無相位的 Lissajous 曲線必重合。
- 任給定一有理數  $p$ ，以  $p$  為頻率比的重合 Lissajous 圖形只有兩種。



圖(4)

## 3 多重點

對平面上的 Lissajous 曲線來說(包括重合和不重合)，二重點是其唯一可能擁有的多重點。

**Theorem 2.** 不重合的  $\Gamma$  之二重點有  $n_1(n_2 - 1) + n_2(n_1 - 1)$  個，且其參數值( $t_1, t_2$ )必是下列兩種形式之一:

(I)  $(\frac{k}{n_1} + \frac{h - c_2}{n_2}, \frac{-k}{n_1} + \frac{h - c_2}{n_2})$ ， $\begin{cases} k \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\} \\ h \in \{0, 1, \dots, n_2 - 1\} \end{cases}$  (II)  $(\frac{k}{n_2} + \frac{h - c_1}{n_1}, \frac{-k}{n_2} + \frac{h - c_1}{n_1})$ ， $\begin{cases} k \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\} \\ h \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\} \end{cases}$

重合的曲線  $\Gamma_0$  之二重點有  $\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 1)$  個，且每個二重點擁有四(模 2)相異的參數值，分別是

$(\frac{k}{n_1} + \frac{h}{n_2}, \frac{-k}{n_1} + \frac{h}{n_2}, \frac{k}{n_1} + \frac{-h}{n_2}, \frac{-k}{n_1} + \frac{-h}{n_2})$ ， $\begin{cases} k \in \{1, 2, \dots, \frac{n_1 - 1}{2}\} \\ h \in \{1, 2, \dots, n_2 - 1\} \end{cases}$  (假設  $n_1$  為奇數)。

**Proof:** 圖形有二重點，即為存在相異的  $t_1, t_2$  (模 2) 使得  $\begin{cases} \cos((n_1 t_1 + c_1)\pi) = \cos((n_1 t_2 + c_1)\pi) \\ \cos((n_2 t_1 + c_2)\pi) = \cos((n_2 t_2 + c_2)\pi) \end{cases}$ ，即為存在整數  $k_1, k_2, h_1, h_2$  使

得  $\begin{cases} n_1 t_1 - n_1 t_2 = 2k_1 \vee n_1 t_1 + n_1 t_2 + 2c_1 = 2h_1 \\ n_2 t_1 - n_2 t_2 = 2k_2 \vee n_2 t_1 + n_2 t_2 + 2c_2 = 2h_2 \end{cases}$ 。分四種情況討論即可得。□



$$\begin{cases} x_1 = \cos(4t\pi) \\ x_2 = \cos((3t + 0.1)\pi) \end{cases}$$

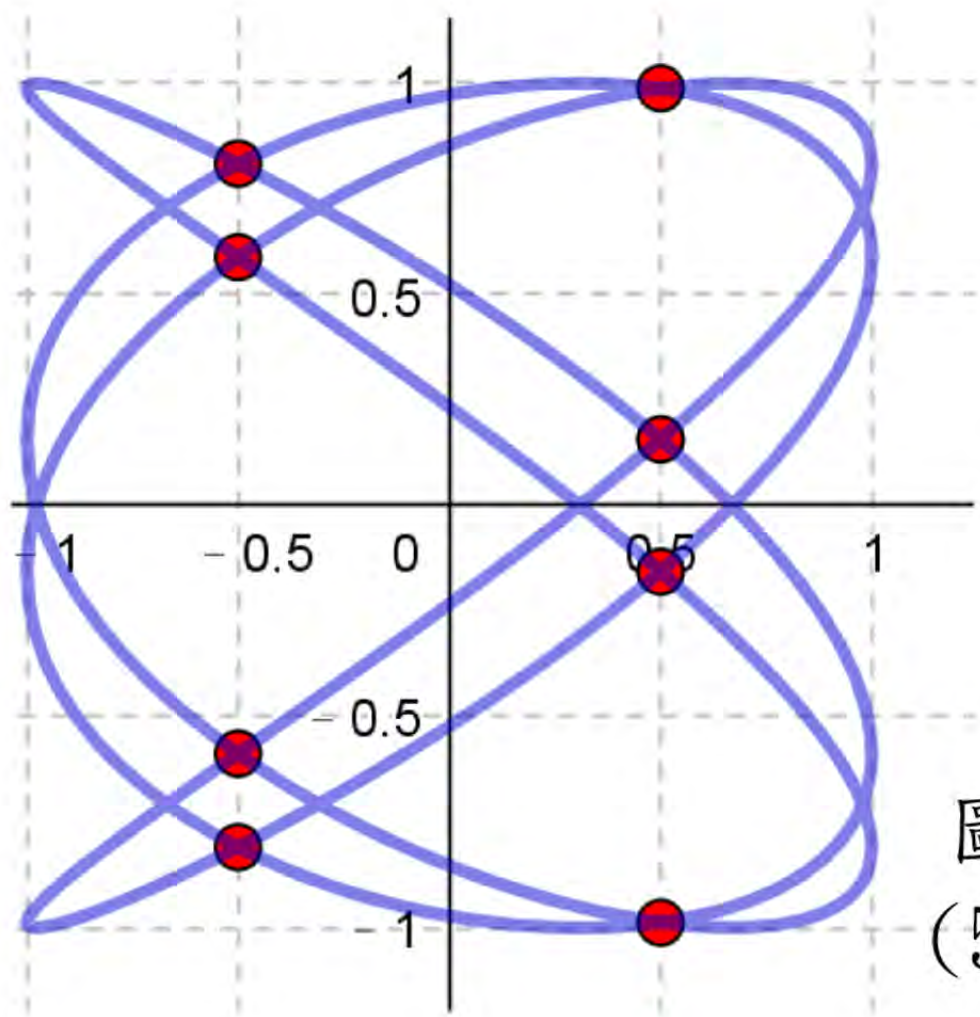


圖 (5)

$$\begin{cases} x_1 = \cos(4t\pi) \\ x_2 = \cos((3t + 0.1)\pi) \end{cases}$$

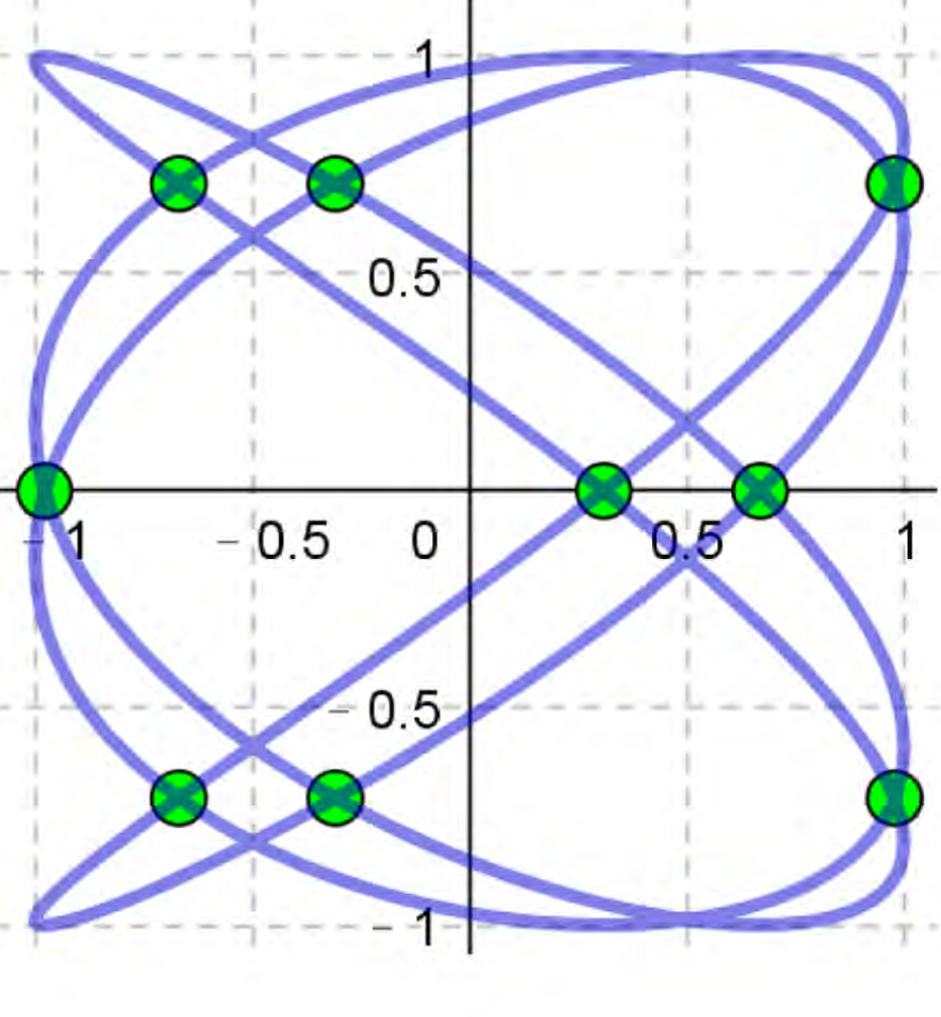


圖 (6)

$$\begin{cases} x_1 = \cos(4t\pi) \\ x_2 = \cos((3t + 0.1)\pi) \end{cases}$$

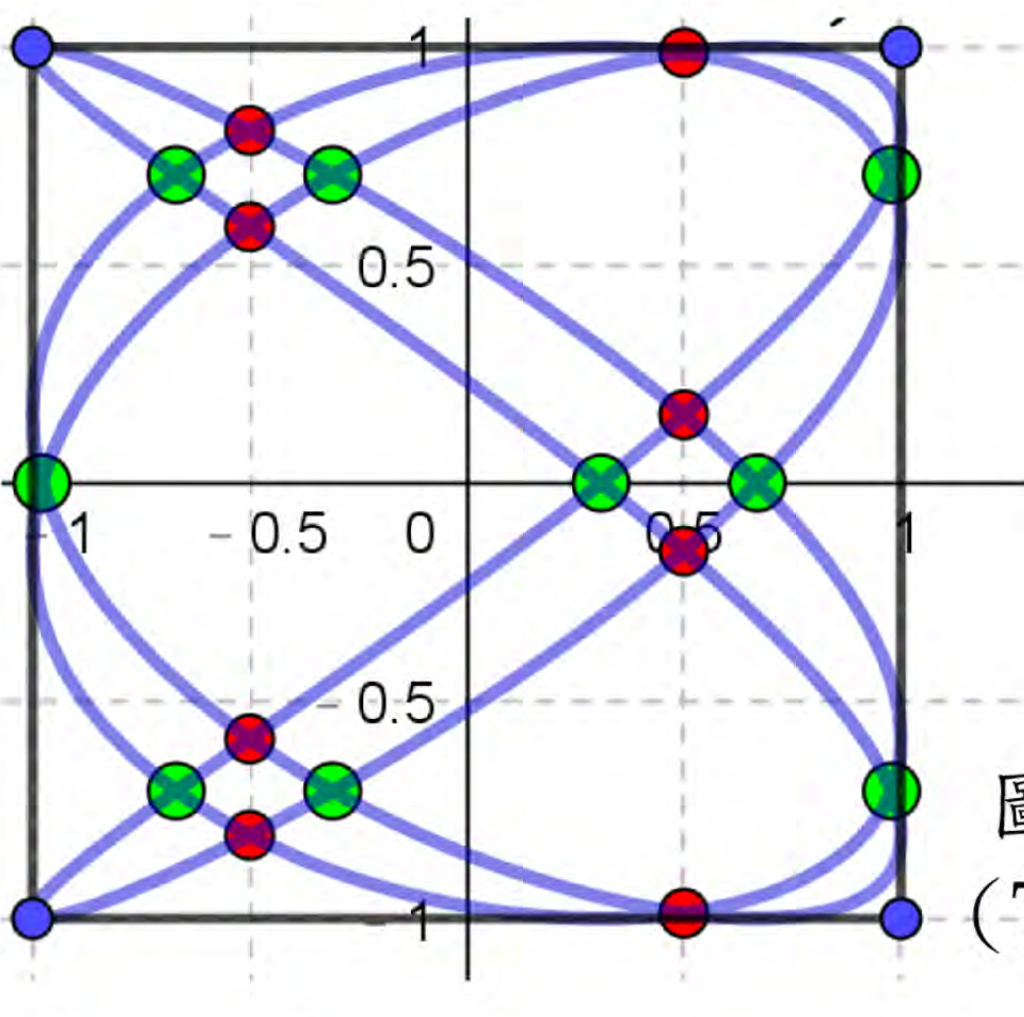


圖 (7)

$$\begin{cases} x_1 = \cos(4t\pi) \\ x_2 = \cos(3t\pi) \end{cases}$$

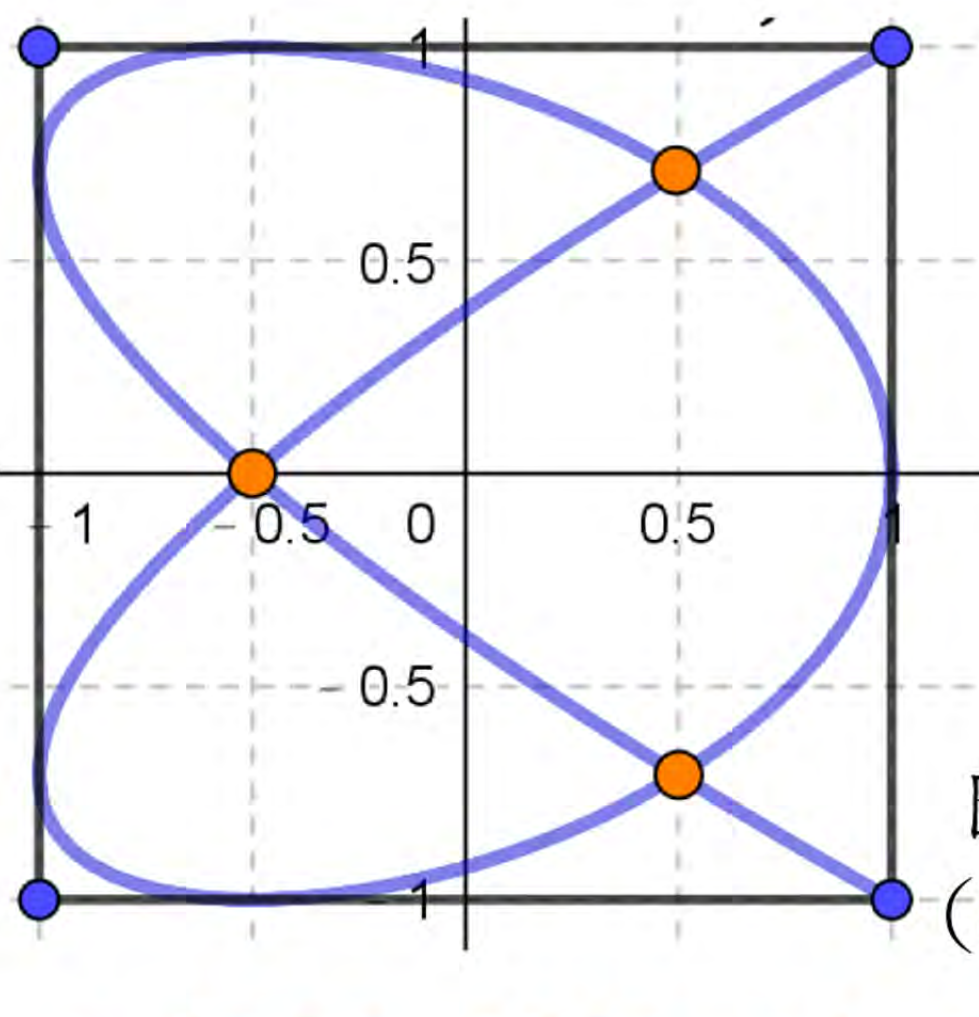


圖 (8)

$$4(3-1)+3(4-1)=17$$

$$1/2(4-1)(3-1)=3$$

#### 4.分割區塊數

**Theorem 3.** 對曲線  $\Gamma_2$ :若圖形不重合，則其將  $[-1,1] \times [-1,1]$  分割成  $2n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1$  塊區域。

若圖形重合，則其將  $[-1,1] \times [-1,1]$  分割成  $\frac{1}{2}(n_1 + 1)(n_2 + 1)$  塊區域。

#### 5.三維 Lissajous 曲線

**Theorem 4.**  $k$  維 Lissajous 曲線  $\Gamma_k$  是重合的  $\Leftrightarrow \forall$  相異的  $i, j$ ,  $n_i c_j - n_j c_i$  皆為整數  $\Leftrightarrow \Gamma_k$  可表示成 
$$\begin{cases} x_1 = \cos((n_1 t + m_1)\pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + m_2)\pi) \\ \vdots \\ x_k = \cos((n_k t + m_k)\pi) \end{cases} \quad (m_1, m_2, \dots, m_k \text{ 為整數})$$

為了討論方便，我們規定  $\gcd(n_1, n_2) = d_{12}, \gcd(n_2, n_3) = d_{23}, \gcd(n_3, n_1) = d_{31}$ ，注意到有  $\gcd(d_{12}, d_{23}) = \gcd(d_{23}, d_{31}) = \gcd(d_{31}, d_{12}) = \gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$ 。

**Theorem 5.** 對不重合 Lissajous 曲線  $\Gamma_3$ ，其圖形有二重點充要條件是(a)、(b)至少有一者成立：

(a)  $d_{12} > 1$  (或其輪換)，且滿足此條件的二重點序對有  $n_3(d_{12} - 1)$  個。

(b)  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$  (或其輪換)，且滿足此條件的二重點序對有  $d_{12}(n_3 - 1)$  個。

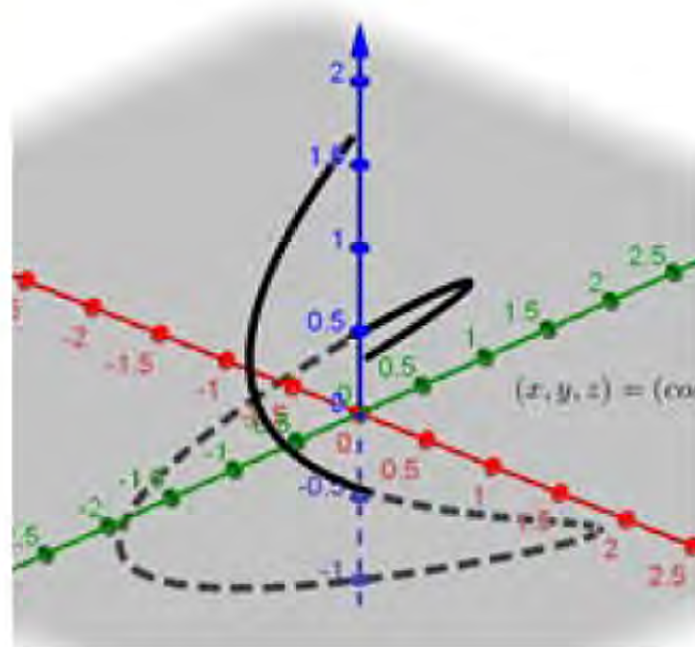


圖 (8)

**Proof:** 考慮  $t_1 \neq t_2 \pmod{2\pi}$  滿足 
$$\begin{cases} t_1 - t_2 = \frac{2k_1}{n_1} \pi \dots\dots(1) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_1}{n_1} \pi - \frac{2c_1}{n_1} \dots\dots(1') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_2}{n_2} \pi \dots\dots(2) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_2}{n_2} \pi - \frac{2c_2}{n_2} \dots\dots(2') \\ t_1 - t_2 = \frac{2k_3}{n_3} \pi \dots\dots(3) \vee t_1 + t_2 = \frac{2h_3}{n_3} \pi - \frac{2c_3}{n_3} \dots\dots(3') \end{cases} \quad (k_1, k_2, k_3, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z})$$

(1)(2)(3): 無。(1')(2')(3'): 重合，先不討論。由對稱性只需討論(1)(2)(3')和(1')(2')(3)兩種情況

(1)(2)(3'): 成立的充要條件為  $d_{12} > 1$ ，此時  $(t_1, t_2) = \left( \frac{k_{12}}{d_{12}} + \frac{h_3 - c_3}{n_3}, \frac{-k_{12}}{d_{12}} + \frac{h_3 - c_3}{n_3} \right)$ ， $\left\{ \begin{matrix} k_{12} \in \{1, 2, \dots, d_{12} - 1\} \\ h_3 \in \{0, 1, \dots, n_3 - 1\} \end{matrix} \right\}$ ，有  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$  個二重點序對。(如圖(9))

(1')(2')(3): 成立的充要條件為  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$ ，並可將  $t$  平移使  $\Gamma_3$  成 
$$\begin{cases} x_1 = \cos((n_1 t + m_1)\pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + m_2)\pi) \\ x_3 = \cos((n_3 t + \phi)\pi) \end{cases}$$
，此時(平移後的)

$(t_1, t_2) = \left( \frac{k_3}{n_3} + \frac{h_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_3}{n_3} + \frac{h_{12}}{d_{12}} \right)$ ， $\left\{ \begin{matrix} k_3 \in \{1, 2, \dots, n_3 - 1\} \\ h_{12} \in \{0, 1, \dots, d_{12} - 1\} \end{matrix} \right\}$ ，有  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$  個二重點序對。(如圖(10))

接著考慮同時滿足兩種以上的條件的序對，發現只有(1)(2)(3')  $\wedge$  (1)(2')(3')這類的解之交集非空集，其解

的形式為  $\left( \frac{k_{12}}{d_{12}} + \frac{h_{23}}{d_{23}}, \frac{-k_{12}}{d_{12}} + \frac{h_{23}}{d_{23}} \right)$ ， $\left\{ \begin{matrix} k_{12} \in \{1, 2, \dots, d_{12} - 1\} \\ h_{12} \in \{0, 1, \dots, d_{23} - 1\} \end{matrix} \right\}$ ，有  $d_{23}(d_{12} - 1)$  個二重點序對。

由以上內容再配上**排容原理**，便可求出**所有三維不重合 Lissajous 的二重點序對個數**了。

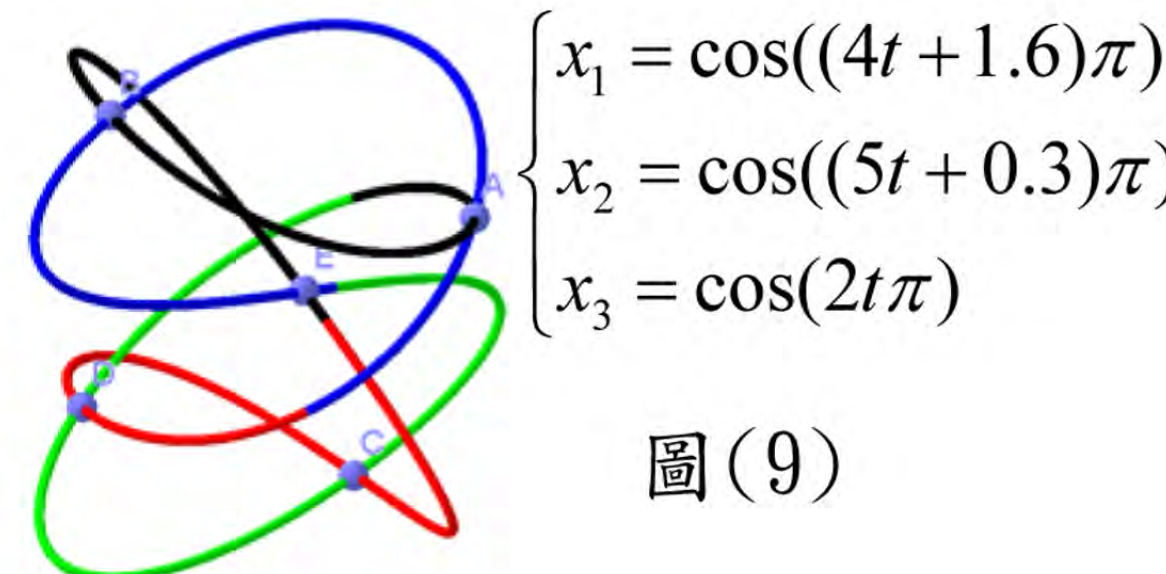


圖 (9)

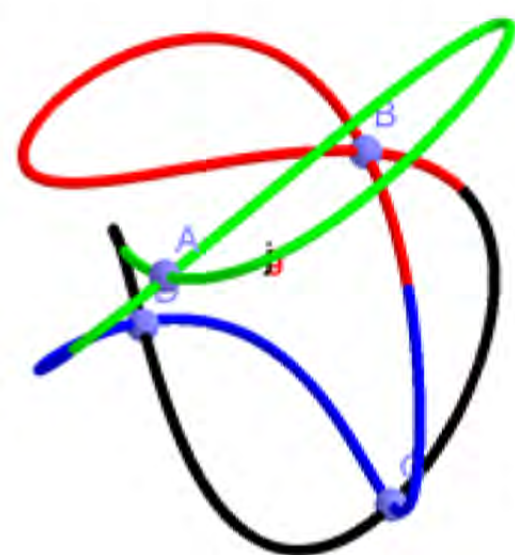


圖 (10)

我們還發現某些三維 Lissajous 是會擁有四重點的，並在隨後證明了二重點和四重點是唯二種三維 Lissajous 能擁有的多重點。

**Theorem 6.** 不重合 Lissajous 曲線  $\Gamma_3$  有四重點之充要條件為  $d_{23} > 1 \wedge d_{31} > 1 \wedge d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$  (或另外兩個輪換形式成立)。

而對  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$ 、 $d_{23} \mid n_3 c_2 - n_2 c_3$ 、 $d_{31} \mid n_1 c_3 - n_3 c_1$  三條件來說：

(I) **恰有一者**成立時(假設是  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$ )， $\Gamma_3$  會有  $\frac{1}{2}d_{12}(d_{23} - 1)(d_{31} - 1)$  個四重點。

(II) **恰有兩者**成立時(假設是  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$  和  $d_{23} \mid n_3 c_2 - n_2 c_3$ )， $\Gamma_3$  會有  $\frac{1}{2}d_{12}(d_{23} - 1)(d_{31} - 1) + \frac{1}{2}d_{23}(d_{31} - 1)(d_{12} - 1)$  個四重點。

**Proof:** 定理的前半部我們先證明了不存在五重以上的多重點，接著假設存在三重點序對  $(t_1, t_2, t_3)$ ，並由此假設導出了存在三重以上的重點的充要條件並說明必可找到與  $t_1, t_2, t_3$  皆相異的  $t_4$  使得  $(t_1, t_2, t_3, t_4)$  是一組四重點序對。

若只有一者成立(假設是  $d_{12} \mid n_2 c_1 - n_1 c_2$ )，此時四重點形式為  $\left( \frac{k_{23}}{d_{23}} + \frac{k_{31}}{d_{31}} + \frac{h_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_{23}}{d_{23}} + \frac{k_{31}}{d_{31}} + \frac{h_{12}}{d_{12}}, \frac{k_{23}}{d_{23}} + \frac{-k_{31}}{d_{31}} + \frac{h_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_{23}}{d_{23}} + \frac{-k_{31}}{d_{31}} + \frac{h_{12}}{d_{12}} \right)$ ，

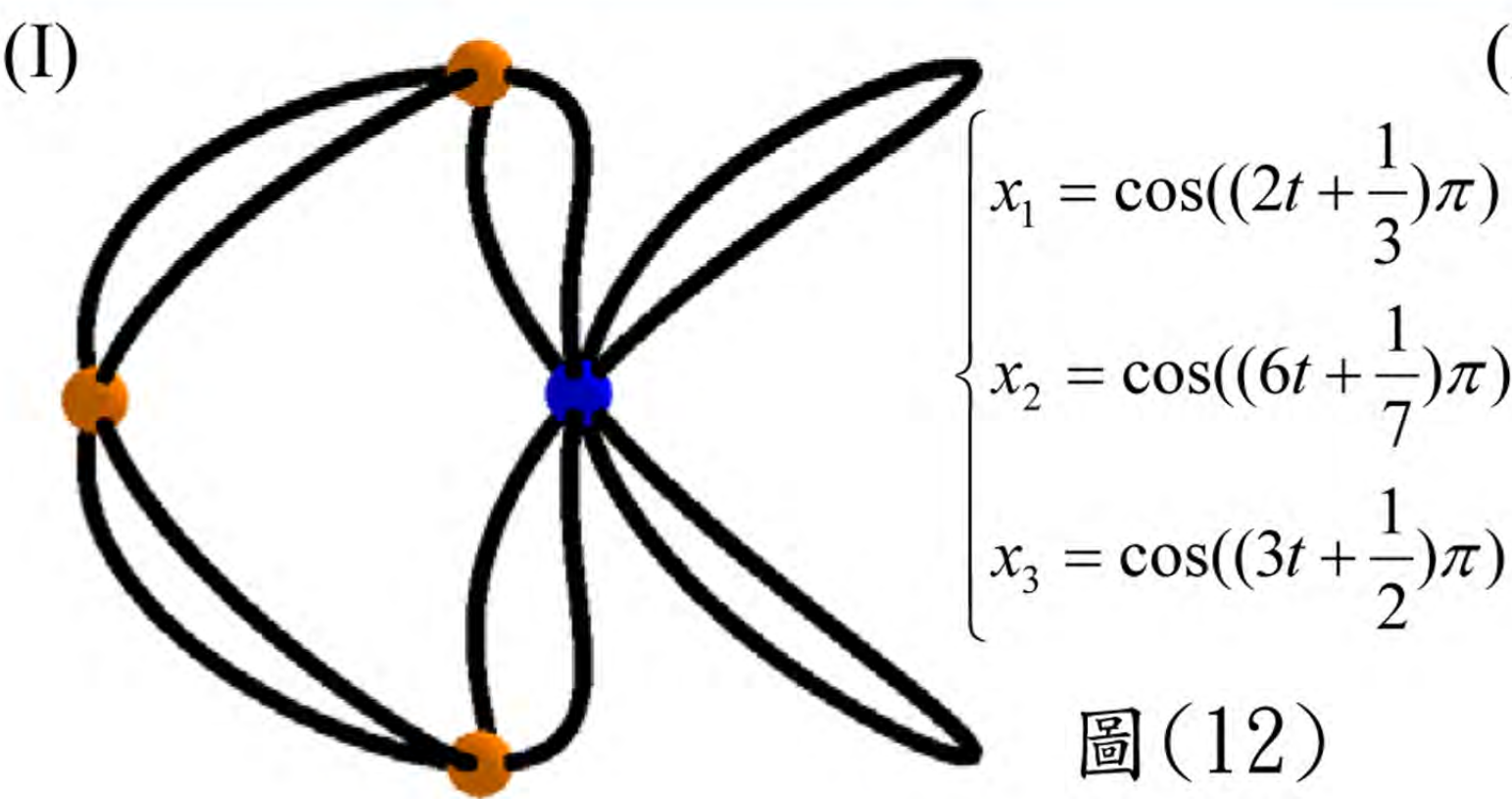
其中  $k_{23} \in \{1, 2, \dots, d_{23} - 1\}, k_{31} \in \{1, 2, \dots, \frac{d_{31} - 1}{2}\}, h_{12} \in \{0, 1, \dots, d_{12} - 1\}$  (此處假設  $d_{31}$  是奇數)，共有  $\frac{1}{2}d_{12}(d_{23} - 1)(d_{31} - 1)$  個。

若是兩者成立的情況，我們發現並證明了兩者的解的交集為空集，故只需將(I)的清況簡單相加即可。

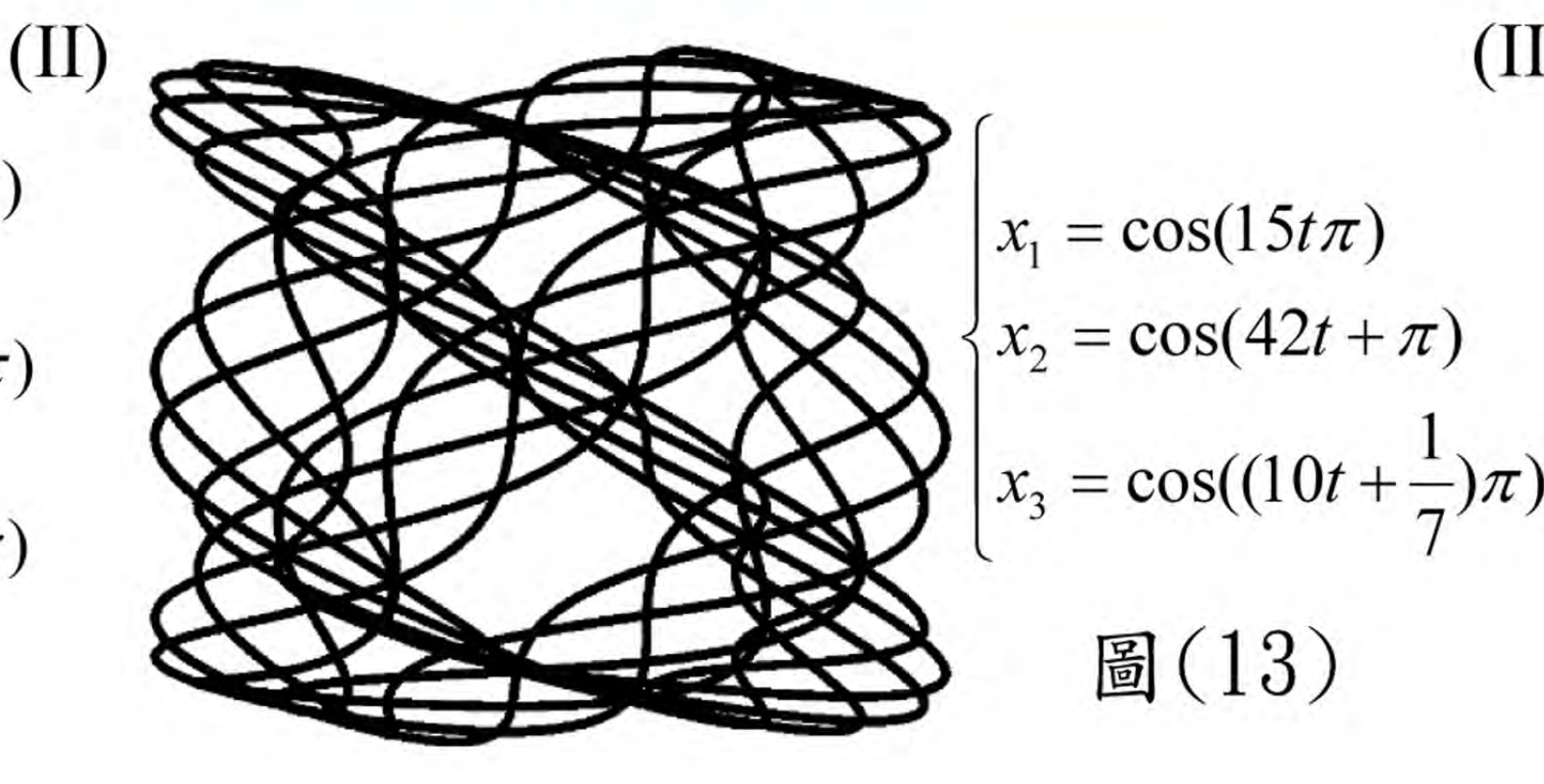
**Theorem 7.** (III) 重合 Lissajou 曲線(**三者皆成立**)  $\Gamma_3$  有四重點之充要條件為  $d_{12} > 1 \wedge d_{23} > 1 \wedge d_{31} > 1$ 。且個數為  $\frac{1}{4}(d_{12} - 1)(d_{23} - 1)(d_{31} - 1)$ 。

**Proof:** 結合二維重合和三維不重合的情況，我們發現  $\Gamma_3$  每個四重點擁有**八**個相異的參數值，分別是  $\left( \frac{k_{23}}{d_{23}} + \frac{k_{31}}{d_{31}} + \frac{k_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_{23}}{d_{23}} + \frac{k_{31}}{d_{31}} + \frac{k_{12}}{d_{12}}, \frac{k_{23}}{d_{23}} + \frac{-k_{31}}{d_{31}} + \frac{k_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_{23}}{d_{23}} + \frac{-k_{31}}{d_{31}} + \frac{k_{12}}{d_{12}}, \frac{k_{23}}{d_{23}} + \frac{k_{31}}{d_{31}} + \frac{-k_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_{23}}{d_{23}} + \frac{k_{31}}{d_{31}} + \frac{-k_{12}}{d_{12}}, \frac{k_{23}}{d_{23}} + \frac{-k_{31}}{d_{31}} + \frac{-k_{12}}{d_{12}}, \frac{-k_{23}}{d_{23}} + \frac{-k_{31}}{d_{31}} + \frac{-k_{12}}{d_{12}} \right)$ ， $k_{23} \in \{1, 2, \dots, d_{23} - 1\}, k_{31} \in \{1, 2, \dots, \frac{d_{31} - 1}{2}\}, k_{12} \in \{1, 2, \dots, \frac{d_{12} - 1}{2}\}$  (此處假設  $d_{31}, d_{12}$  是奇數)。

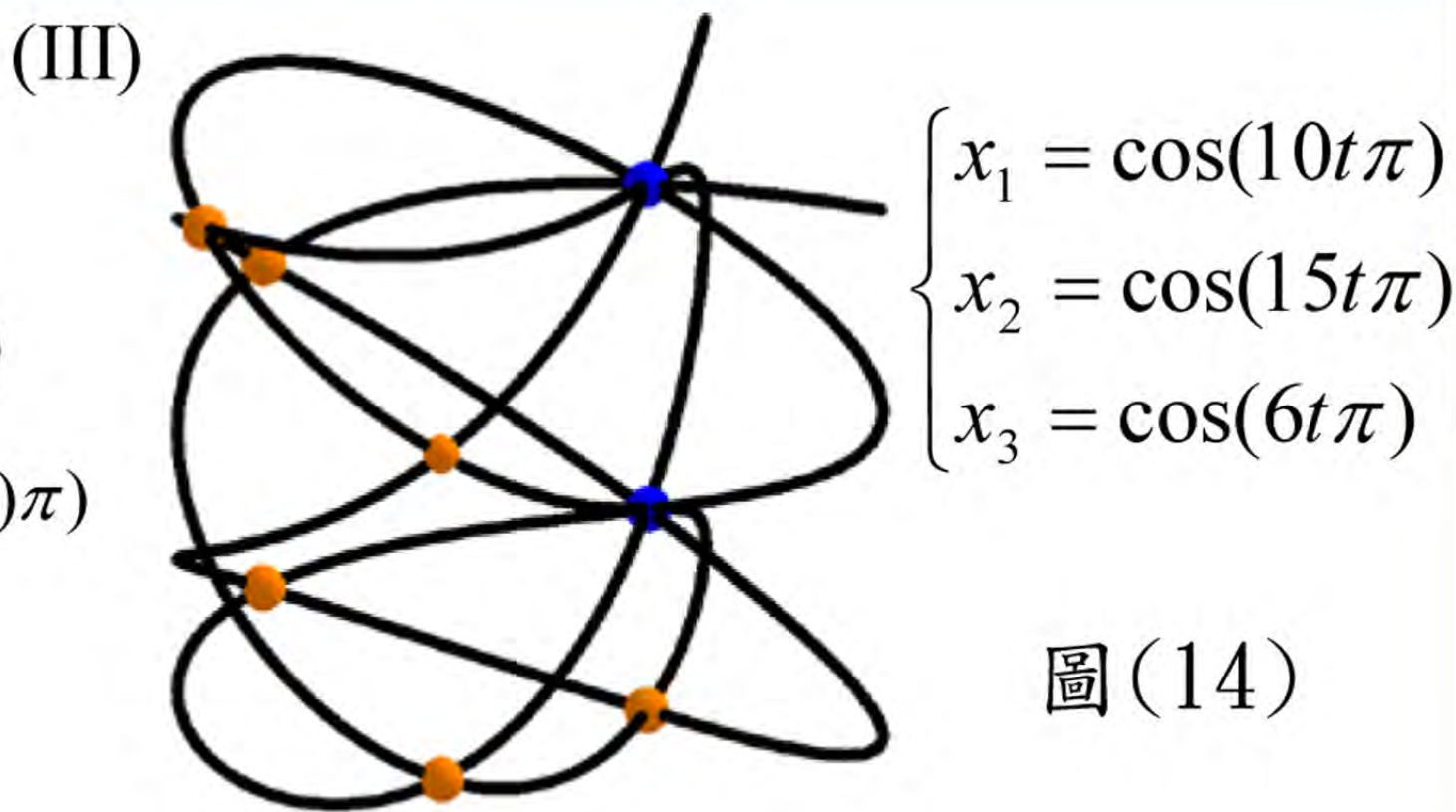




圖(12)



圖(13)



圖(14)

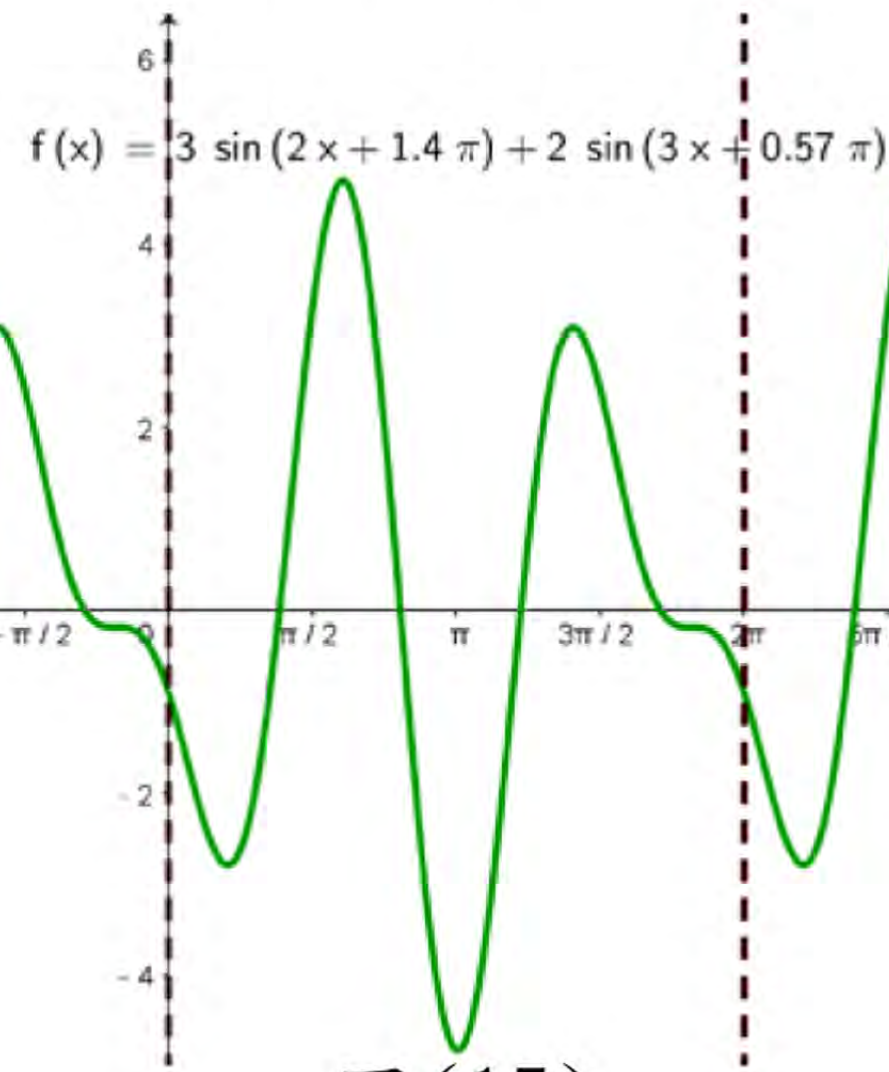
**Theorem 7.** 二維的 Lissajous  $\Gamma_\phi$  為三維的 Lissajous  $\Gamma_{3x}$  以  $x$  軸為轉軸逆時針(由正向看往原點)旋轉  $\phi$  後對  $x-y$  平面的投影；亦可視作  $\Gamma_{3y}$  以  $y$  軸為轉軸逆時針旋轉  $\frac{n_1}{n_2}\phi$  後的投影。

### 6. Lissajous 的一些連續性質

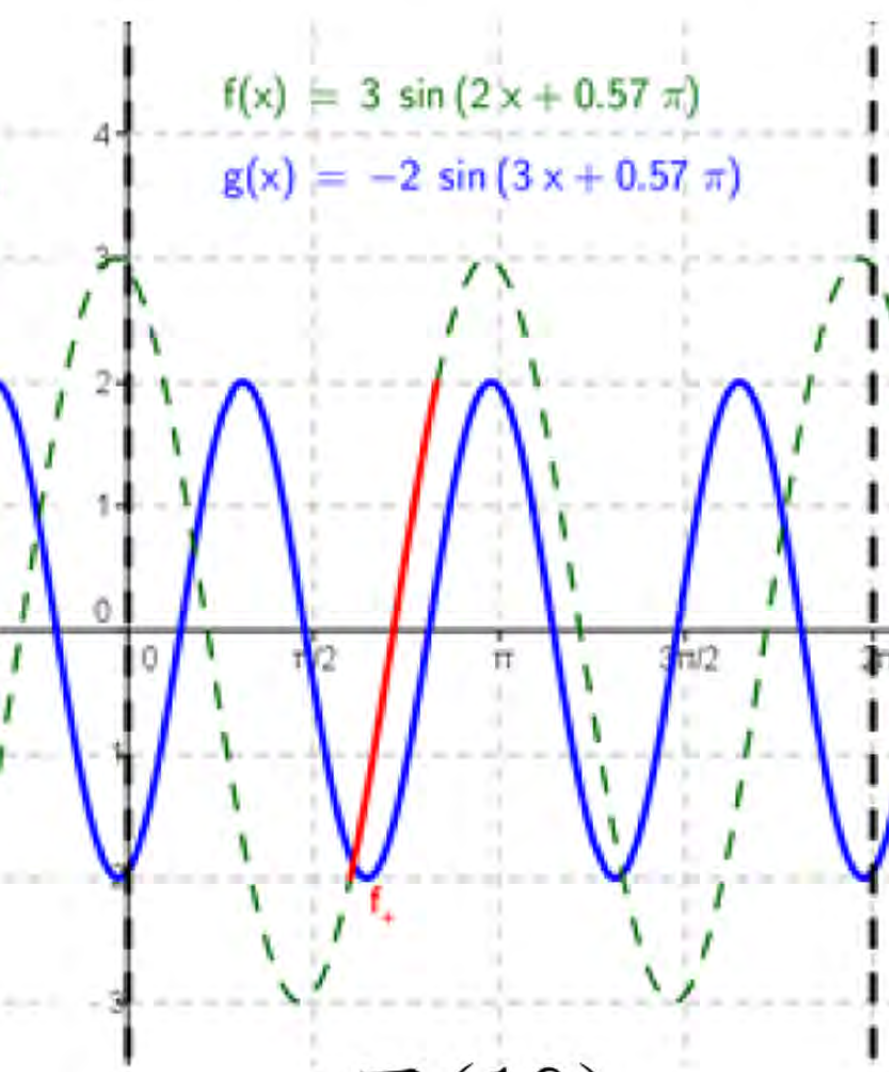
**Theorem 8.** Lissajous 曲線  $\Gamma_2$  在  $t$  處的切線斜率為  $\frac{n_2 \sin(n_2 t + c_2)}{n_1 \sin(n_1 t + c_1)}$ ，且每個二重點的兩切線斜率都是等值異號的。

**Theorem 9.**  $A \sin(Bx + \phi_2) + B \sin(Ax + \phi_1) = 0$  在  $[0, 2\pi)$  的區間內有  $2 \min(A, B)$  個解。

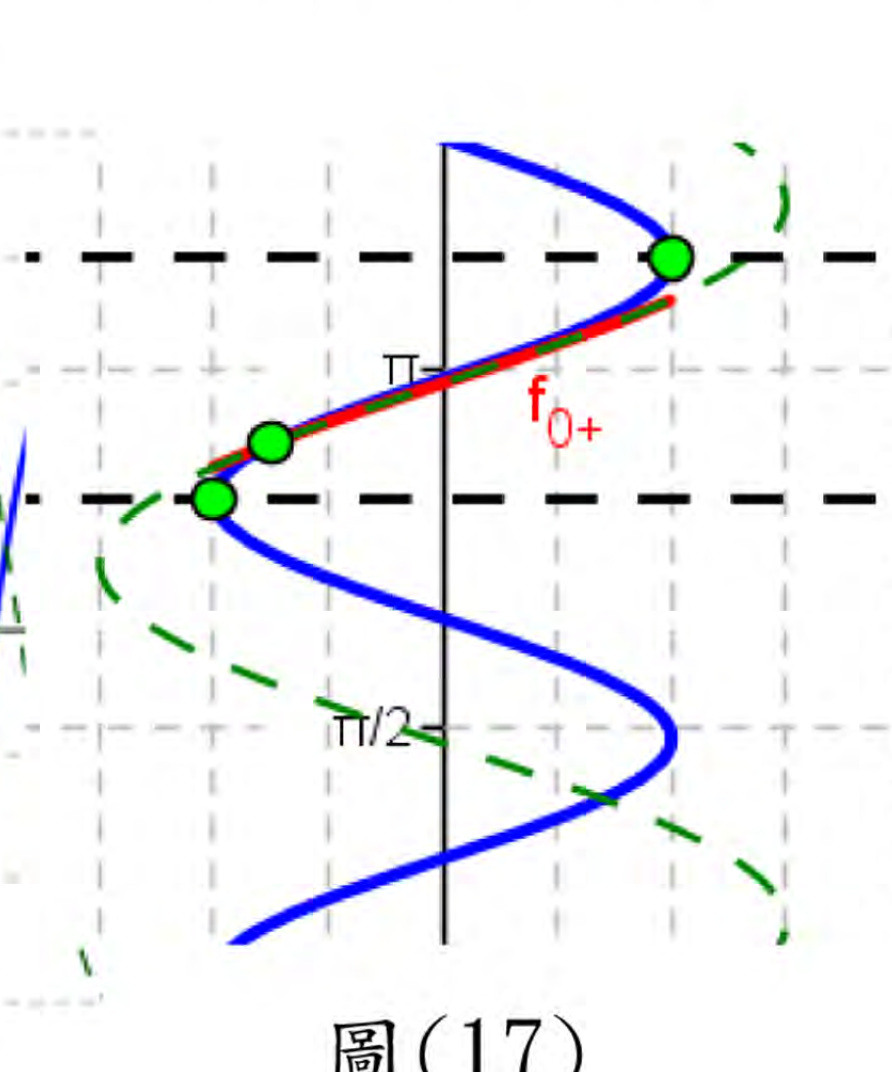
**Proof:** 不妨設  $A \geq B$ ，我們將原式理解為解  $f(x) = A \sin(Bx + \phi_2)$  和  $g(x) = -B \sin(Ax + \phi_1)$  的交點，證明  $f$  的每個個半周期(波峰到波谷)只會和  $g$  有一個交點，又  $f$  在  $[0, 2\pi)$  內有  $2B$  個半周期，故得證。□



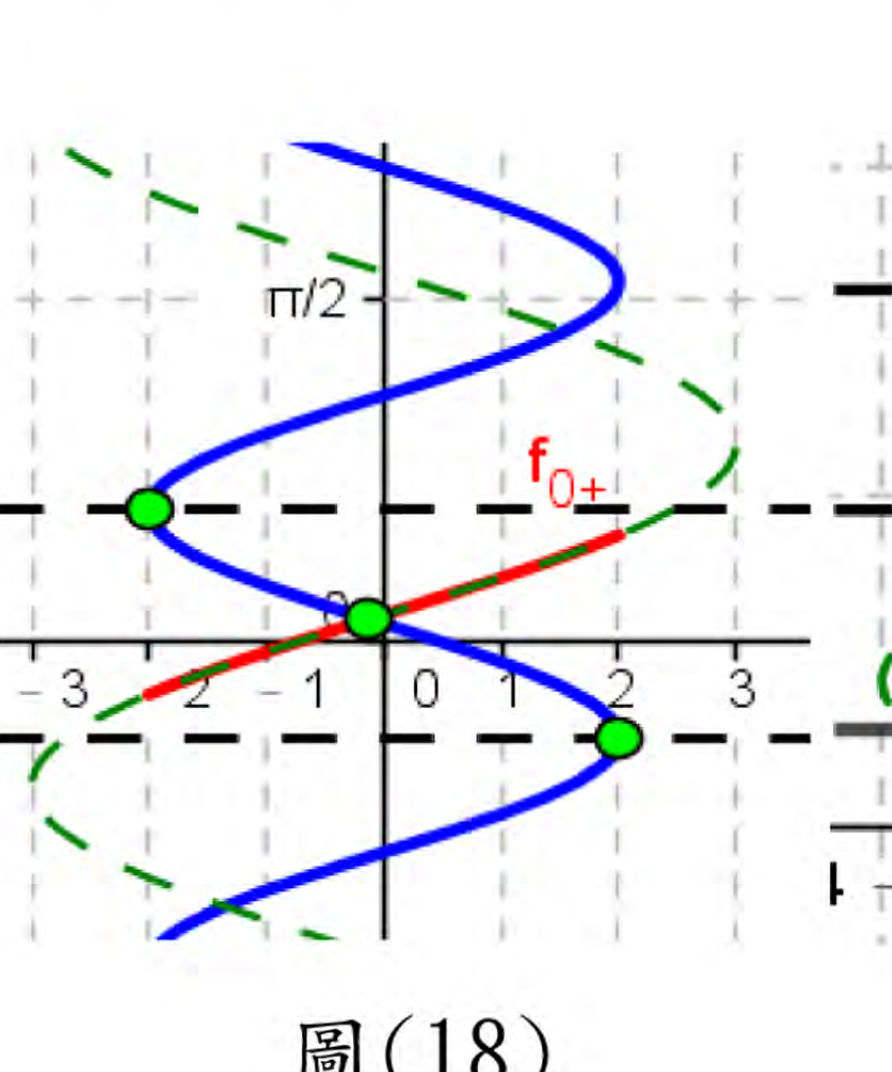
圖(15)



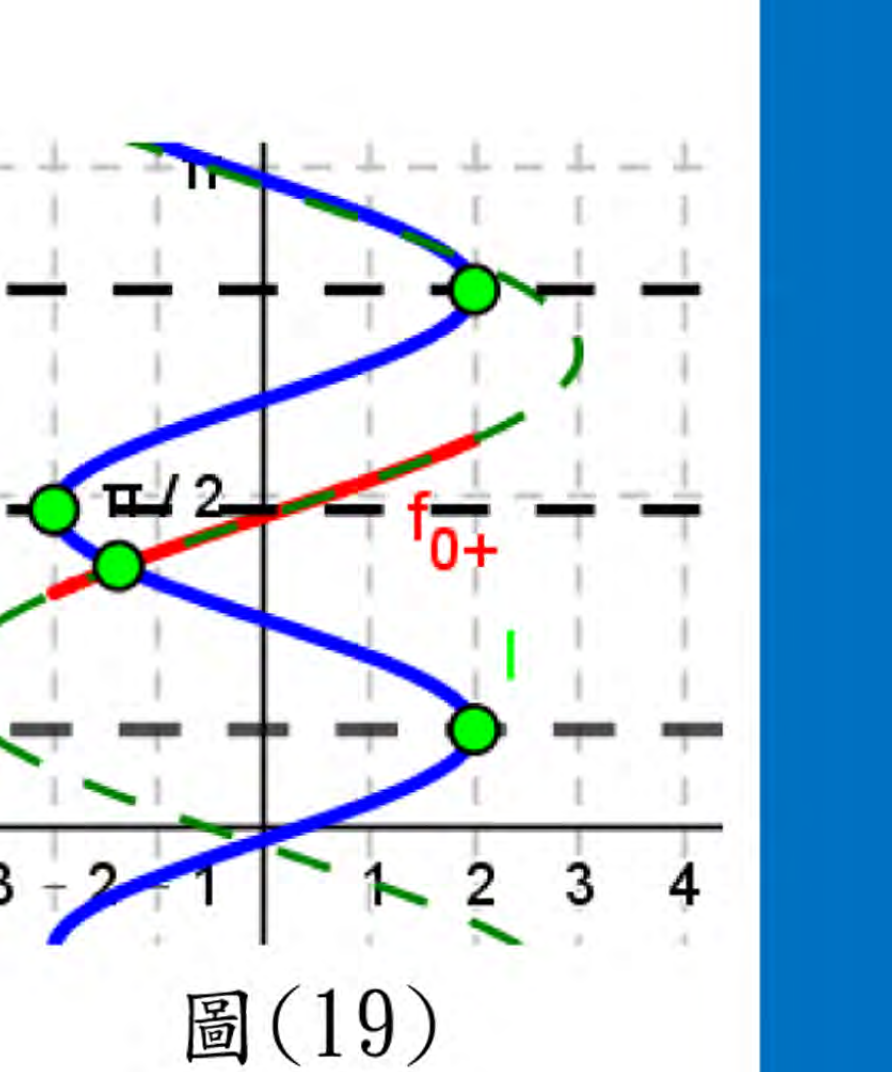
圖(16)



圖(17)



圖(18)



圖(19)

**Theorem 10.** 若  $\Gamma_2$  不重合則其有  $2|n_1 - n_2|$  個反曲點；若其重合則有  $|n_1 - n_2| - 1$  個反曲點。

**Theorem 11.**  $\Gamma: \begin{cases} x_1 = \cos(t\pi) \\ x_2 = \cos((t + \phi)\pi) \end{cases}$  之周長在  $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$  遞增。且最大值發生在  $\phi = \frac{1}{2}$ ；最小值發生在  $\phi = 0$ 。

**Proof:**  $\Gamma$  之周長可表示為

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{\sin^2(t\pi) + \sin^2((t + \phi)\pi)} dt &= \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}(\cos(2t\pi) + \cos(2(t + \phi)\pi))} dt = \int_0^2 \sqrt{1 - \cos(\phi\pi) \cos((2t + \phi)\pi)} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 - \cos(\phi\pi)(1 - 2\sin^2(t\pi))} dt = \int_0^2 \sqrt{1 - \cos(\phi\pi) + 2\cos(\phi\pi)\sin^2(t\pi)} dt = (1 - \cos(\phi\pi)) \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{2\cos(\phi\pi)}{\cos(\phi\pi) - 1} \sin^2(t\pi)} dt \end{aligned}$$

又當  $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$  時， $1 - \cos(\phi\pi)$  是遞增的且  $\frac{2\cos(\phi\pi)}{\cos(\phi\pi) - 1}$  是遞減的，故  $\Gamma$  之周長在  $[0, \frac{1}{2}]$  內對  $\phi$  遞增。

## 肆、研究結果

- $\Gamma_k$  是重合的若且唯若對所有相異的  $i, j$ ， $n_i c_j - n_j c_i$  為一整數，亦等價於其可表示為  $\Gamma_k^\circ$  的形式。
- (a) 若  $\Gamma_2$  不重合，則其二重點個數為  $n_1(n_2 - 1) + n_2(n_1 - 1)$ ，並將  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  分割成  $\frac{1}{2}(n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1)$  個區塊。  
(b) 若  $\Gamma_2$  重合，則其二重點個數為  $\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_2 - 1)$ ，並將  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  分割成  $2n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 1$  個區塊。
- $\Gamma_3$  只可能有二或四重點，令  $D_{12}$  代表  $d_{12} | n_2 c_1 - n_1 c_2$  成立、 $D_{23}$  代表  $d_{23} | n_3 c_2 - n_2 c_3$  成立、 $D_{31}$  代表  $d_{31} | n_1 c_3 - n_3 c_1$  成立。

四重點個數		二重點個數
無	0	$n_1(d_{23} - 1) + n_2(d_{31} - 1) + n_3(d_{12} - 1)$
$D_{12}$	$\frac{1}{2}d_{12}(d_{23} - 1)(d_{31} - 1)$	$n_1(d_{23} - 1) + n_2(d_{31} - 1) + n_3(d_{12} - 1) + d_{12}(n_3 - 3d_{23}d_{31} + 2d_{23} + 2d_{31} - 2)$
$D_{12} \wedge D_{23}$	$\frac{1}{2}[d_{12}(d_{23} - 1)(d_{31} - 1) + d_{23}(d_{31} - 1)(d_{12} - 1)]$	$n_1(d_{23} - 1) + n_2(d_{31} - 1) + n_3(d_{12} - 1) + d_{12}(n_3 - 3d_{23}d_{31} + 2d_{23} + 2d_{31} - 2) + d_{23}(n_1 - 3d_{31}d_{12} + 2d_{31} + 2d_{12} - 2)$
$D_{12} \wedge D_{23} \wedge D_{31}$	$\frac{1}{4}(d_{12} - 1)(d_{23} - 1)(d_{31} - 1)$	$\frac{1}{2}[(n_1 - 1)(d_{23} - 1) + (n_2 - 1)(d_{31} - 1) + (n_3 - 1)(d_{12} - 1) - d_{12}(d_{23} - 1)(d_{31} - 1) - d_{23}(d_{31} - 1)(d_{12} - 1) - d_{31}(d_{12} - 1)(d_{23} - 1)]$

- $\Gamma_2$  之二重點的兩切線斜率等值異號。反曲點個數不重合時有  $2|n_1 - n_2|$  個，重合時有  $|n_1 - n_2| - 1$  個。
- 存在唯一  $\phi \in [0, \frac{1}{2n_1}]$  使得  $\Gamma_2$  可被表示為  $\begin{cases} x_1 = \cos(n_1 t \pi) \\ x_2 = \cos((n_2 t + \phi)\pi) \end{cases}$  的形式。
- 猜想： $\Gamma_\phi$  的周長在  $\phi \in [0, \frac{1}{2n_1}]$  是遞增的，在  $\phi \in [\frac{1}{2n_1}, \frac{1}{n_1}]$  是遞減的。(只證明了  $n_1 = n_2$  的情況。)
- $\Gamma_\phi$  隨著  $\phi$  的變化可表示為  $\Gamma_3$  以  $x$  軸為轉軸旋轉，或以  $y$  軸為轉軸旋轉在投影
- 若  $\Gamma_2$  不重合，則  $\Gamma_{3x}$  的二重點旋轉後的投影，會是  $\Gamma_2$  的(II)型二重點； $\Gamma_{3y}$  的則會是  $\Gamma_2$  的(I)型二重點 (指 **Theorem 3.** 中的(I)、(II)型)。若  $\Gamma_2$  重合，則  $\Gamma_{3x}$  在空間中二重點旋轉後的投影，即是  $\Gamma_2$  的所有二重點； $\Gamma_{3y}$  亦是。

## 伍、參考資料

- 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊。龍騰出版社。
- Vaughan F. R. Jones and Jozef H. Przytycki. “Lissajous Knots and Billiard Knots.” Banach Center Publications 42 (1998), 145–163.
- M. G. V. Bogle, J. E. Hearst, V. F. R. Jones, and L. Stoilov. “Lissajous Knots.” J. Knot Theory Ramifications 3:2 (1994), 121–140.